Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского

На правах рукописи

Бейненсон Леонид Борисович

Монотонно невозрастающие случайные поля на частично упорядоченных множествах

01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород – 2009

Работа выполнена на кафедре прикладной теории вероятностей факультета ВМК Нижегородского государственного университета им. Н.И.Лобачевского.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Шевченко Валерий Николаевич
Научный консультант:	кандидат физико-математических наук Антонец Михаил Александрович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук профессор Егоров Владимир Алексеевич
	кандидат физико-математических наук Гордин Михаил Иосифович
Ведущая организация:	Институт Проблем Передачи Информации РАН

Защита состоится «____»____________ 20__ г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 в Санкт-Петербургском отделении Математического Института им. В.А. Стеклова Российской Академии наук по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д.27, ауд.311

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Санкт-Петербургского отделения Математического Института им. В.А. Стеклова РАН.

Автореферат разослан «____»____________ 20__ г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.202.01
доктор физико-математических наук Зайцев А.Ю.

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Исследование монотонно невозрастающих полей на частично упорядоченных множествах (ч.у.м.) естественным образом связано с исследованием распределений вероятностей на множествах идеалов ч.у.м. — в данной работе, следуя за Д.-К. Рота, идеалом ч.у.м. мы будем называть его подмножество, содержащее вместе с каждым своим элементом все элементы меньшие данного.

Одним из направлений, связанных с распределениями вероятностей на идеалах ч.у.м., является исследование вероятностных распределений на множестве диаграмм Юнга – ограниченных идеалов целочисленного квадранта $\boldsymbol{N}^2$, трехмерных диаграмм Юнга – ограниченных идеалов целочисленного октанта $\boldsymbol{N}^3$, а также марковских процессов, принимающих значения на множестве диаграмм Юнга.

Так в работах А.М.Вершика и С.В.Керова, выполненных в 1977–1993 гг., была исследована монотонно возрастающая марковская цепь на множестве диаграмм Юнга, у которой начальное состояние (в момент времени 0) — пустая диаграмма Юнга, каждое следующее состояние отличается от предыдущего на одну ячейку, а распределение вероятностей для значения цепи в момент времени n соответствует мере Планшереля симметрической группы степени n. В этих работах описано асимптотическое поведение для описанной в них марковской цепи при больших временах; в частности, была найдена асимптотическая форма диаграмм Юнга, являющихся значениями этой марковской цепи.

К этому направлению относится также опубликованное в 2001 г. исследование Р.Кениона и Р.Серфа распределения вероятностей на множестве ограниченных идеалов решетки $\boldsymbol{N}^3$ в случае, когда вероятность каждого идеала пропорциональна экспоненте от произведения мощности этого идеала и некоторого отрицательного коэффициента: $\mathbf{P}(I) = e^{-\alpha|I|}$.

В работах А.Ю.Окунькова и соавторов был дан аналитический подход к изучению распределений вероятностей на диаграммах Юнга. В работе 2000 года А.М.Бородина, А.Ю.Окунькова и Г.И.Ольшанского этот подход использовался для исследования формы значений описанной выше марковской случайной цепи на множестве диаграмм Юнга, а в работе 2003 года А.Ю.Окунькова и Н.Ю.Решетихина была изучена форма случайного идеала решетки $\boldsymbol{N}^3$.

Другое направление, связанное с распределениями вероятностей на идеалах ч.у.м., возникло при построении модели кровотока в сети мелких сосудов. В.А.Антонцом, М.А.Антонцом и И.А.Шерешевским в 1992 г. была построена модель кровотока как марковская цепь, значению которой в каждый момент времени соответствовало корневое дерево сосудов, которые в данный момент заполнены. Таким образом, в этой модели состояние марковской цепи в каждый момент времени описывалось распределением вероятностей на множестве идеалов ч.у.м. — бесконечного корневого дерева T.

В 1995 г. М.А.Антонцом и И.А.Шерешевским было доказано, что при определенных условиях она будет стремиться к предельному состоянию μ^∞, описывающемуся следующим образом: для любого поддерева T^* дерева T имеет место равенство

$$\mu^\infty\Big\{T' : \ T' \supset T^*\Big\} = e^{-\nu(T^*)}, \tag{1}$$

где ν – мера на множестве вершин дерева T, определяемая только переходными вероятностями марковского процесса.

В связи с рассмотрением моделей роста на произвольном ч.у.м. М.А.Антонцом и И.А.Шерешевским было дано обобщение конструкции меры, описываемой формулой (1); а именно, была построена мера μ_ρ на множестве $\mathcal{L}(S)$ всех идеалов ч.у.м. S, удовлетворяющая для любого I из $\mathcal{L}(S)$ следующему соотношению:

$$\mu_\rho\Big\{I' \in \mathcal{L}(S) : \ I' \supset I\Big\} = e^{-\rho(I)}, \tag{2}$$

где ρ — некоторая конечно-аддитивная (возможно, неограниченная) мера на S. Ими также были найдены условия на меру ρ, обеспечивающие существование меры μ_ρ, удовлетворяющей (2), и было показано, что мера μ_ρ однозначно определяется мерой ρ.

Мера μ_ρ, определяемая формулой (2), была названа геометрической мерой, поскольку ее конструкция является обобщением классического геометрического распределения вероятности.

В этих работах М.А.Антонцом и И.А.Шерешевским также исследовались безгранично делимые меры на решетке идеалов частично упорядоченного множества относительно теоретико-множественного пересечения и было показано, что геометрическая мера является безгранично делимой.

Следует заметить, что безгранично делимые меры на различных решетках (в частности, решетках множеств) ранее изучались многими авторами. Так, в теории Г.Шоке рассматриваются безгранично делимые меры на решетке замкнутых множеств некоторого топологического пространства, а И. Молчановым рассматривались безгранично делимые меры на решетках, топология Скотта которых обладает счетной базой. Однако результаты, полученные М.А. Антонцом и И.А. Шерешевским, не могут быть выведены из результатов Г.Шоке и И.Молчанова, поскольку решетка идеалов частично упорядоченного множества, рассматривавшаяся в работах М.А.Антонца и И.А.Шерешевского, не является частным случаем решеток, рассматриваемых Г.Шоке или И.Молчановым.

В этих же работах М.А.Антонцом и И.А.Шерешевским было указано на существование связи между случайными полями на ч.у.м. H и мерами на множестве $\mathcal{L}(H \times \boldsymbol{R})$ идеалов ч.у.м. $H \times \boldsymbol{R}$. Эта связь обусловлена соответствием между монотонно невозрастающими функциями на ч.у.м. H и идеалами ч.у.м. $H \times \boldsymbol{R}$: любой монотонно невозрастающей действительной функции f на H отвечает идеал $\mathcal{U}f = \Big\{(a, y) \in H \times \boldsymbol{R}: \ y \leq f(a)\Big\}$ ч.у.м. $H \times \boldsymbol{R}$.

Случайное поле ξ на ч.у.м. H мы называем монотонно невозрастающим, если для любых $a < b$ из H почти наверное имеет место неравенство $\xi(a) \geq \xi(b)$.

Используя соответствие $f \to \mathcal{U}f$, можно по случайному монотонно невозрастающему полю ξ построить меру на множестве $\mathcal{L}(H \times \boldsymbol{R})$ идеалов ч.у.м. $H \times \boldsymbol{R}$: если все реализации случайного поля ξ на H являются монотонно невозрастающими функциями, то мы можем определить меру μ^ξ на $\mathcal{L}(H \times \boldsymbol{R})$, полагая для некоторого подмножества A множества идеалов $\mathcal{L}(H \times \boldsymbol{R})$

$$\mu^\xi(A) = \mathbf{P}\Big\{\xi \in \mathcal{U}^{-1}A\Big\}.$$

При этом сигма-алгебра, на которой будет определена мера μ^ξ, порождается подмножествами A множества $\mathcal{L}(H \times \boldsymbol{R})$, для которых определено выражение в правой части данного соотношения.

Для любого конечного подмножества Λ множества H и любой функции

$\boldsymbol{x} : \Lambda \to \boldsymbol{R}$ обозначим $\mathbf{Y}_\Lambda \boldsymbol{x}$ минимальный идеал ч.у.м. $H \times \boldsymbol{R}$, порожденный элементами $\Big\{\big(a, \boldsymbol{x}(a)\big),\ a \in \Lambda\Big\}$:

$$\mathbf{Y}_\Lambda \boldsymbol{x} = \bigcup_{a \in \Lambda} \Big\{(a', y') \in H \times \boldsymbol{R} :\ a' \leq a,\ y' \leq \boldsymbol{x}(a)\Big\}.$$

Множество $\mathbf{Y}_\Lambda \boldsymbol{x}$ является обобщением диаграммы Юнга на случай ч.у.м. $H \times \boldsymbol{R}$.

Если для некоторого монотонно невозрастающего случайного поля ξ на H соответствующая ему мера μ^ξ на $\mathcal{L}(H \times \boldsymbol{R})$ совпадает с некоторой мерой μ_ρ, удовлетворяющей равенству (2), то для любого конечного подмножества Λ множества H и любой функции $\boldsymbol{x} : \Lambda \to \boldsymbol{R}$ будет выполняться соотношение

$$\mathbf{P}\Big\{\xi(a) \geq \boldsymbol{x}(a) \quad \forall a \in \Lambda\Big\} = \exp\Big(-\rho\Big(\mathbf{Y}_\Lambda \boldsymbol{x}\Big)\Big). \tag{3}$$

Таким образом мы приходим к следующей задаче: построить по мере ρ на $H \times \boldsymbol{R}$ монотонно невозрастающее случайное поле η_ρ на H такое, что для любого конечного подмножества Λ множества H и любой функции $\boldsymbol{x} : \Lambda \to \boldsymbol{R}$ соотношение (3) будет выполняться для $\xi = \eta_\rho$.

Будем называть монотонно невозрастающее случайное поле η_ρ, удовлетворяющее данному условию для некоторой меры ρ, экспоненциально распределенным случайным полем.

Цели и задачи диссертационной работы:

- Построение экспоненциально распределенного случайного поля η_ρ на H по мере ρ на $H \times \boldsymbol{R}$; описание множества мер, заданных на $H \times \boldsymbol{R}$, по которым можно построить экспоненциально распределенное случайное поле на H.
- Исследование структуры конечномерных распределений экспоненциально распределенного случайного поля η_ρ

В данной работе, следуя терминологии, использовавшейся как в работах А. Окунькова, так и в работах М.А.Антонца и И.А. Шерешевского, коррелятором[1] g_ν меры ν, определенной на ч.у.м. S, мы называем действительную функцию на S, определяемую следующим выражением: для любого x из S

$$g_\nu(x) = \nu\Big\{x' \in S :\ x' \geq x\Big\}. \tag{4}$$

[1] В опубликованных автором статьях вместо термина “коррелятор” использовался термин “инвертированная функция распределения” (ср. англ. термин decumulative distribution function)

Заметим, что вероятность в левой части формулы (3) является коррелятором конечномерного распределения случайного поля η_ρ.

Также заметим что конечномерные распределения экспоненциально распределенного случайного поля η_ρ однозначно определяются формулой (3). Тем не менее для проведения анализа структуры этих конечномерных распределений требуются дополнительные комбинаторно-геометрические построения.

В ходе исследования решались следующие задачи:

1. Описание мер, непрерывных снизу на частично упорядоченном множестве. Построение по мере ρ, непрерывной снизу на $H \times \boldsymbol{R}$, экспоненциально распределенного случайного поля η_ρ на H.
2. Построение разложения конечномерного распределения монотонно невозрастающего случайного поля в сумму абсолютно непрерывной меры и сингулярных мер, сосредоточенных на подпространствах различной размерности. Выражение сингулярных слагаемых этого разложения через односторонние частные производные коррелятора конечномерного распределения.
3. Выражение сингулярных составляющих конечномерного распределения экспоненциально распределенного случайного поля η_ρ через частные производные функции распределения меры ρ.
4. Вычисление конечномерных распределений и вероятностных характеристик экспоненциально распределенного случайного поля η_ρ в частном случае, когда мера ρ является прямым произведением некоторой меры γ на H и меры λ_+, являющейся ограничением меры Лебега λ на положительную полуось $\boldsymbol{R}_+$: $\rho = \gamma \times \lambda_+$.
5. Описание свойств многогранного конуса всех монотонно невозрастающих функций на конечном частично упорядоченном множестве.
6. Выражение распределений вероятностей на гранях многогранного конуса через односторонние частные производные коррелятора.
7. Определение условий, при которых меры, заданные на алгебре, порожденной главными идеалами ч.у.м., и непрерывные снизу, могут быть продолжены на алгебру, порожденную всеми идеалами этого ч.у.м., при сохранении условия непрерывности снизу.

Объект и предмет исследования Объектом исследования данной диссертации являются монотонно невозрастающие случайные поля на частично упорядоченных множествах. Предметом исследования данной диссертации являются экспоненциально распределенные случайные поля на частично упорядоченных множествах и структура их конечномерных распределений.

Заметим, однако, что некоторые из полученных результатов относятся к монотонно невозрастающим случайным полям общего вида.

Методы исследования В данной диссертационной работе используются методы теории вероятностей и теории меры (в частности, геометрической теории меры), теории частично упорядоченных множеств, теории решеток, а также теории многогранных конусов.

Научная новизна Результаты данной диссертационной работы являются новыми. Исследование структуры конечномерных распределений случайных полей экспоненциального типа на частично упорядоченных множествах производится впервые.

Теоретическая и практическая ценность Результаты, полученные в данной диссертационной работе, имеют теоретический характер.

Результаты работы могут быть использованы в дальнейших исследованиях при изучении монотонно невозрастающих полей на частично упорядоченных множествах, а также при изучении моделей роста на произвольных частично упорядоченных множествах

Самостоятельный интерес представляет предложенный метод построения неотрицательно определенных и положительно определенных функций на частично упорядоченных множествах.

Апробация работы Основные результаты диссертации докладывались на совместных научных семинарах кафедры теории вероятностей и математической статистики и кафедры математической логики и высшей алгебры факультета Вычислительной Математики и Кибернетики Нижегородского государственного университета им. Н.И.Лобачевского (сентябрь и октябрь 2006 года).

Также основные положения диссертации докладывались на семинаре в Добрушинской математической лаборатории Института проблем передачи информации им. А.А.Харкевича Российской академии наук (апрель 2006 года)

Некоторые результаты данной работы докладывались на четвертой молодежной научной школе по дискретной математике и ее приложениям, проходившей на механико-математическом факультете Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова (сентябрь 2000 года), и на VII Нижегородской сессии молодых ученых, проходившей в Сарове (май 2002 года).

Публикации Результаты диссертации опубликованы в двух работах автора. Был опубликован перевод этих работ на английский язык.

Личный вклад автора Все результаты, выносимые на защиту, получены автором самостоятельно.

Структура и объем диссертации Диссертация состоит из введения, шести глав, разбитых в общей сложности на 26 параграфов, и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 226 страниц. Список литературы включает 27 наименований.

Содержание работы

Во Введении сформулированы цели и задачи диссертационной работы, обоснована ее актуальность, а также дано подробное описание структуры данной работы.

В главе 1 описывается структура конечномерных распределений монотонно невозрастающего случайного поля на частично упорядоченном множестве.

Пусть ξ — некоторое монотонно невозрастающее случайное поле на H, Λ — произвольное конечное подмножество H. Обозначим $\mu_{\xi,\Lambda}$ конечномерное распределение случайного поля ξ на множестве Λ, $\mu_{\xi,\Lambda}$ является мерой на борелевской σ-алгебре евклидового пространства $\boldsymbol{R}^{\Lambda}$.

Обозначим $\mathcal{M}_{\Lambda}$ множество всех монотонно невозрастающих вещественных функций на Λ, $\mathcal{M}_{\Lambda}$ является многогранным конусом в $\boldsymbol{R}^{\Lambda}$.

Случайное поле ξ будет монотонно невозрастающим тогда и только тогда, когда для любого конечного подмножества Λ множества H мера $\mu_{\xi,\Lambda}$ будет сосредоточена на конусе $\mathcal{M}_{\Lambda}$. Так как любой многогранный конус может быть представлен в виде непересекающегося объединения внутренних частей его граней, то имеет место равенство $\mu_\Lambda = \sum_\Gamma \mu_\Lambda\Big|_{\Gamma^{int}}$, где сумма производится по всем граням Γ конуса $\mathcal{M}_\Lambda$, а $\mu_\Lambda\Big|_{\Gamma^{int}}$ есть ограничение меры μ_Λ на внутренность Γ^{int} грани Γ. Поэтому исследование строения меры μ_Λ, сосредоточенной на многогранном конусе, сводится к исследованию строения мер $\mu_\Lambda\Big|_{\Gamma^{int}}$ для каждой грани Γ.

Обозначим $G_{\xi,\Lambda}$ коррелятор меры $\mu_{\xi,\Lambda}$.

Для любого подмножества A некоторого ч.у.м. S будем обозначать $\inf^* A$ и $\sup^* A$ множество минимальных элементов множества A и множество максимальных элементов множества A соответственно:

$\inf^* A = \{a \in A : \nexists a' \in A,\ a' < a\}, \ \ \sup^* A = \{a \in A : \nexists a' \in A,\ a' > a\}.$

Определим для любой грани Γ конуса $\mathcal{M}_\Lambda$ отношение эквивалентности k_Γ на множестве Λ, полагая элементы a и b эквивалентными в том и только в том случае, когда для всех $\boldsymbol{x}$ из $V(\Gamma)$ имеет место равенство $\boldsymbol{x}(a) = \boldsymbol{x}(b)$.

Поскольку конус $\mathcal{M}_\Lambda$ является множеством решений системы линейных неравенств $\boldsymbol{x}(a) \geq \boldsymbol{x}(b)\ \forall a < b$, а каждая грань такого многогранного конуса получается превращением части из этих неравенств в равенства, то отношение эквивалентности k_Γ однозначно определяет грань Γ.
Обозначим $\mathcal{K}_\Lambda$ множество всех граней Γ конуса $\mathcal{M}_\Lambda$, у которых для любого класса эквивалентности $\overline{a}$ отношения k_Γ мощность множества $\inf^* \overline{a}$ равна единице.

Определим для любого отношения эквивалентности k на Λ множество $\mathit{Inf}(k)$ всех минимальных элементов классов эквивалентности отношения k, полагая $\mathit{Inf}(k) = \bigcup_{\overline{a} \in \Lambda/k} \inf^* \overline{a}$.

Определим для любой грани Γ конуса $\mathcal{M}_\Lambda$ действительное число $\boldsymbol{q}_\Lambda(\Gamma)$, полагая $\boldsymbol{q}_\Lambda(\Gamma) = \prod_{\overline{a} \in \Lambda/k_\Gamma} \frac{1}{\sqrt{|\overline{a}|}}$.

Определим для любого элемента a из множества Λ, функцию $\boldsymbol{e}^a$ из $\boldsymbol{R}^\Lambda$, полагая для любого b из Λ $\ \boldsymbol{e}^a(b) \overset{df}{=} \delta_{ab}$, где δ — символ Кронекера.

Обозначим $\frac{\partial}{\partial^+ \boldsymbol{v}}$ одностороннюю производную по направлению $\boldsymbol{v}$. Для любого подмножества W множества Λ обозначим

$$\frac{\partial^{|W|}}{\partial \boldsymbol{e}^W} \overset{df}{=} \prod_{a \in W} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{e}^a}, \qquad \frac{\partial^{|W|}}{\partial^+ \boldsymbol{e}^W} \overset{df}{=} \prod_{a \in W} \frac{\partial}{\partial^+ \boldsymbol{e}^a}.$$

Будем говорить, что функция f непрерывна на множестве M вплоть до его границ, если она продолжается до функции, непрерывной на замыкании M.

Следующая теорема является одним из основных результатов данной работы:

Теорема 1.1 *Пусть H — произвольное частично упорядоченное множество, ξ — монотонно невозрастающее случайное поле на H, Λ — произвольное конечное подмножество H, μ_Λ — конечномерное распределение случайного поля ξ.*

И пусть U_Λ — открытое подмножество множества $\boldsymbol{R}^\Lambda$ такое, что на множестве $U_\Lambda \cap \mathcal{M}_\Lambda$ функция $G_{\xi,\Lambda}$ непрерывна, а во всех внутренних точках множества $U_\Lambda \cap \mathcal{M}_\Lambda$ существует непрерывная производная $\frac{\partial^{|\Lambda|} G_{\xi,\Lambda}}{\partial \boldsymbol{e}^\Lambda}(\boldsymbol{x})$, которая непрерывно продолжается вплоть до границ множества $U_\Lambda \cap \mathcal{M}_\Lambda$.

Тогда для любой грани Γ конуса $\mathcal{M}_\Lambda$ ограничение $\mu_\Lambda\Big|_{U_\Lambda \cap \Gamma^{int}}$ меры μ_Λ на множество $U_\Lambda \cap \Gamma^{int}$ абсолютно непрерывно относительно меры Лебега $\lambda_{V(\Gamma)}$ на линейном подпространстве $V(\Gamma)$, причем имеют место следующие соотношения:

1) если Γ не принадлежит $\mathcal{K}_\Lambda$, то $\mu_\Lambda\Big|_{U_\Lambda \cap \Gamma^{int}} = 0$

2) если Γ принадлежит $\mathcal{K}_\Lambda$, то на множестве $U_\Lambda \cap \Gamma^{int}$ существует производная $\frac{\partial^{|Inf(k_\Gamma)|} G_{\xi,\Lambda}}{\partial^+ \boldsymbol{e}^{Inf(k_\Gamma)}}$, и для любого $\boldsymbol{x}$ из $U_\Lambda \cap \Gamma^{int}$ имеет место соотношение

$$\frac{d\mu_\Lambda\Big|_{U_\Lambda \cap \Gamma^{int}}}{d\lambda_{V(\Gamma)}}(\boldsymbol{x}) = (-1)^{|\Lambda/k_\Gamma|} \boldsymbol{q}_\Lambda(\Gamma) \frac{\partial^{|Inf(k_\Gamma)|} G_{\xi,\Lambda}}{\partial^+ \boldsymbol{e}^{Inf(k_\Gamma)}}(\boldsymbol{x})$$

Доказательство теоремы 1.1 дано в параграфе 3.3 главы 3. Оно основано на результатах главы 2 о структуре меры, сосредоточенной на многогранном конусе, и результатах главы 3 о свойствах граней конуса $\mathcal{M}_\Lambda$.

В главе 2 рассматриваются вероятностные меры на конусах и устанавливаются условия, обеспечивающие возможность представления меры на конусе в виде суммы мер, каждая из которых будет сосредоточена на некоторой грани конуса и абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на этой грани.

Если на множестве C^{int} внутренних точек C существует производная $\frac{\partial^d g_\nu}{\partial \boldsymbol{e}^1 \ldots \partial \boldsymbol{e}^d}$ (где $\boldsymbol{e}^1, \ldots, \boldsymbol{e}^d$ — канонический базис в $\boldsymbol{R}^d$), то ограничение $\nu\Big|_{C^{int}}$ меры ν на множество C^{int} будет абсолютно непрерывным относительно меры Лебега λ^d на евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}^d$, и плотность этого ограничения равна

$\frac{d\nu\big|_{C^{int}}}{d\lambda^d}(\boldsymbol{y}) = (-1)^d \cdot \frac{\partial^d g_\nu}{\partial \boldsymbol{e}^1 \ldots \partial \boldsymbol{e}^d}(\boldsymbol{y})$.

Основная цель второй главы — найти условия, гарантирующие, что из существования производной $\frac{\partial^d g_\nu}{\partial \boldsymbol{e}^1 \ldots \partial \boldsymbol{e}^d}$ на множестве C^{int} следует абсолютная непрерывность мер $\nu\big|_{\Gamma^{int}}$ относительно меры Лебега λ_Γ для любой грани Γ (а не только для всего конуса C), а также найти явные формулы для плотностей $\frac{d\nu\big|_{\Gamma^{int}}}{d\lambda_\Gamma}$.

Эти условия получаются в результате анализа геометрических свойств граней конуса C.

Для любого выпуклого множества M, элемента $\boldsymbol{x}$ из M и вектора $\boldsymbol{v}$ из $\boldsymbol{R}^d$ будем говорить что вектор $\boldsymbol{v}$ из точки $\boldsymbol{x}$ направлен вовнутрь M, если существует такое положительное h, что точка $\boldsymbol{x} + h \cdot \boldsymbol{v}$ принадлежит M.

Для любого многогранного конуса C и любой его грани Γ определим множество $\mathrm{In}_C(\Gamma)$ всех тех индексов i из $\{1, \ldots, d\}$, что вектор $\boldsymbol{e}^i$ направлен вовнутрь конуса C из всех точек Γ^{int}.

Будем называть блоками в $\boldsymbol{R}^d$ d-мерные (возможно, незамкнутые) параллелепипеды с ребрами, параллельными осям координат в $\boldsymbol{R}^d$. Для любых элементов $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_d)$ из $\boldsymbol{R}^d$ таких, что $\boldsymbol{x} < \boldsymbol{y}$, обозначим $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})$ открытый справа блок с наименьшей точкой $\boldsymbol{x}$ и наибольшей точкой $\boldsymbol{y}$:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) = \Big\{(x'_1, \ldots, x'_d) \in \boldsymbol{R}^d : x_j \le x'_j < y_j,\ j = 1, \ldots, d\Big\}.$$

Точки $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ для блока $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})$ будем называть экстремальными точками.

Определим для любого подмножества I множества $\{1, \ldots, d\}$ множество $\boldsymbol{B}_I(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})$ как d-мерный блок, открытый справа и неограниченный по направлениям $\boldsymbol{e}^i,\ i \in \{1, \ldots, d\} \backslash I$:

$$\boldsymbol{B}_I(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) = \Big\{(x'_1, \ldots, x'_d) \in \boldsymbol{R}^d :\ x_i \le x'_i < y_i,\ i \in I,\ \ x'_j \ge x_j,\ j \notin I\Big\}.$$

Будем говорить, что грань Γ многогранного конуса C правильно рассекает блоки, если выполняются следующие условия:

1. существует хотя бы один открытый справа блок $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})$ такой, что его экстремальные вершины принадлежат Γ^{int};
2. для любого такого блока множество $\boldsymbol{B}_{\mathrm{In}_C(\Gamma)}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) \cap C$ содержится в $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})$.

Для любого подмножества M пространства $\boldsymbol{R}^d$ обозначим $V(M)$ линейную оболочку множества M. Определим для любой грани Γ конуса C подпространство $L(\Gamma)$ в $\boldsymbol{R}^d$, полагая $L(\Gamma) = V\Big(\{\boldsymbol{e}^i,\ i \in \mathrm{In}_C(\Gamma)\}\Big)$.
Для любой грани Γ конуса C такой, что $|\,\mathrm{In}_C(\Gamma)| = \dim \Gamma$ обозначим $\boldsymbol{q}_C(\Gamma)$ модуль определителя Якоби отображения ортогональной проекции $V(\Gamma) \to L(\Gamma)$.
Теперь мы можем сформулировать один из основных результатов диссертации:
Теорема 2.1 *Пусть C — многогранный конус в $\boldsymbol{R}^d$, ν — вероятностная мера на C, $g_\nu(\boldsymbol{x})$ — ее коррелятор, а U — открытое подмножество множества $\boldsymbol{R}^d$ такое, что на множестве $U \cap C$ функция $\boldsymbol{g}_\nu$ непрерывна, а во всех внутренних точках множества $U \cap C$ существует непрерывная производная $\frac{\partial^d g_\nu}{\partial \boldsymbol{e}^1 \ldots \partial \boldsymbol{e}^d}(\boldsymbol{y})$, которая непрерывно продолжается вплоть до границ этого множества.*

Тогда для любой правильно рассекающей блоки грани Γ конуса C ограничение $\nu\Big|_{U\cap\Gamma^{int}}$ меры ν на множество $U \cap \Gamma^{int}$ абсолютно непрерывно относительно меры Лебега $\lambda_{V(\Gamma)}$ на линейном подпространстве $V(\Gamma)$, причем имеют место следующие соотношения:

1) если $|\,\mathrm{In}_C(\Gamma)| > \dim \Gamma$, то $\nu\Big|_{U\cap\Gamma^{int}} = 0$

2) если $|\,\mathrm{In}_C(\Gamma)| = \dim \Gamma$ и все надграни Γ правильно рассекают блоки, то на множестве $U \cap \Gamma^{int}$ существует производная $\frac{\partial^{|\,\mathrm{In}_C(\Gamma)|} g_\nu}{\partial^+ \boldsymbol{e}^{\mathrm{In}_C(\Gamma)}}$, непрерывная на $U \cap \Gamma^{int}$, и для любого $\boldsymbol{y}$ из $U \cap \Gamma^{int}$ имеет место соотношение
$$\frac{d\nu\Big|_{U\cap\Gamma^{int}}}{d\lambda_{V(\Gamma)}}(\boldsymbol{y}) = (-1)^{|\,\mathrm{In}_C(\Gamma)|} \boldsymbol{q}_C(\Gamma) \frac{\partial^{|\,\mathrm{In}_C(\Gamma)|} g_\nu}{\partial^+ \boldsymbol{e}^{\mathrm{In}_C(\Gamma)}}(\boldsymbol{y})$$

Кроме данной теоремы в первой главе также сформулирована теорема 1.2, позволяющая определять грани, правильно рассекающие блоки, и теорема 1.3, описывающая свойства таких граней. В теореме 1.3, в частности, доказывается, что если грань Γ конуса C правильно рассекает блоки, то $|\,\mathrm{In}_C \Gamma| \geq \dim \Gamma$.

Кроме этого, в первой главе даны примеры конусов с гранями, правильно рассекающими блоки, а также даны примеры, демонстрирующие, что никакие из условий теоремы 1.1 не могут быть отброшены.

В главе 3 мы формулируем теорему 3.1, дающую описание свойств граней конуса монотонно невозрастающих функций $\mathcal{M}_\Lambda$. В частности, в ней доказывается, что все грани конуса $\mathcal{M}_\Lambda$ правильно рассекают блоки.

Эта теорема используется в доказательстве теоремы 1.1, которое также включено в главу 3.

В главе 4 мы описываем классы мер, по которым (как будет показано в теореме 5.1 главы 5) можно построить экспоненциально распределенные поля. Для любого элемента a из ч.у.м. S обозначим $\mathcal{I}_S(a)$ главный идеал для элемента a в S: $\mathcal{I}_S(a) = \{a' \in S : \ a' \leq a\}$. Идеалы, которые можно представить в виде конечного объединения главных идеалов, будем называть конечнопорожденными.

Обозначим $\mathcal{L}(S)$ множество всех идеалов ч.у.м. S, $\mathcal{P}(S)$ — множество всех конечнопорожденных идеалов S.

Обозначим $\mathcal{L}_1(S)$ множество всех тех идеалов S, которые могут быть представлены как конечное пересечение конечнопорожденных идеалов. По определению, все элементы решетки множеств $\mathcal{L}_1(S)$ являются идеалами, и если S — $\wedge$-полурешетка, то $\mathcal{L}_1(S) = \mathcal{P}(S)$.

Для любого ч.у.м. S обозначим $\mathcal{A}(S)$ алгебру множеств на S, порожденную множеством всех идеалов $\mathcal{L}(S)$, и $\mathcal{A}_0(S)$ — алгебру множеств на S, порожденную множеством конечнопорожденных идеалов $\mathcal{P}(S)$. Очевидно, алгебра множеств $\mathcal{A}_0(S)$, содержит решетку множеств $\mathcal{L}_1(S)$.

В данной работе под неограниченной конечно-аддитивной мерой будем понимать конечно-аддитивную неотрицательную меру, которая на некоторых множествах может принимать значение $+\infty$.

Для любого ч.у.м. S, любой алгебры множеств $\mathcal{A}$ на S, содержащей $\mathcal{A}_0(S)$, и для любой конечно-аддитивной неограниченной меры ρ на $\mathcal{A}$ определим неотрицательную функцию $\overline{\rho}$ на $\mathcal{L}(S)$, полагая для любого идеала J из $\mathcal{L}(S)$

$$\overline{\rho}(J) = \sup_{\substack{J' \in \mathcal{P}(S) \\ J' \subset J, \ \ J' \neq J}} \rho\bigl(J'\bigr).$$

Следует заметить, что функция $\overline{\rho}$ есть продолжение меры ρ на все идеалы ч.у.м. S, но не на все множества алгебры $\mathcal{A}(S)$.

Для любого ч.у.м. S, любой алгебры множеств $\mathcal{A}$ на S, содержащей $\mathcal{A}_0(S)$, любого подмножества $\mathcal{L}$ множества $\mathcal{L}(S) \cap \mathcal{A}$ и для любой конечно-аддитивной неограниченной меры ρ на $\mathcal{A}$ будем говорить, что мера ρ *непрерывна снизу* на $\mathcal{L}$, если для любого идеала J из $\mathcal{L}$ выполняется соотношение $\rho(J) = \overline{\rho}(J)$.

Пусть S — ч.у.м., на котором задана такая топология, что внутренность любого идеала из $\mathcal{L}(S)$ является идеалом.

Для любой алгебры множеств $\mathcal{A}$ на S, содержащей $\mathcal{A}_0(S)$, для любого подмножества $\mathcal{L}$ множества $\mathcal{L}(S) \cap \mathcal{A}$ и для любой конечно-аддитивной неограниченной меры ρ на $\mathcal{A}$ будем говорить, что мера ρ *регулярна снизу* на $\mathcal{L}$, если для любого идеала J из $\mathcal{L}$ выполняется соотношение $\rho(J) = \overline{\rho}(J^{int})$.

Очевидно, что если мера ρ регулярна снизу на некотором множестве идеалов $\mathcal{L}$, то мера ρ будет и непрерывна снизу на $\mathcal{L}$.

Цель главы 4 – найти такие условия на меру ρ, определенную на $\mathcal{A}_0(S)$, при которых можно продолжить меру ρ до регулярной снизу меры $\widehat{\rho}$ на $\mathcal{A}(S)$.

Следующая теорема дает эти условия

Теорема 4.1. *Пусть S — частично упорядоченное множество, на котором задана топология так, что для любого идеала J из $\mathcal{L}(S)$ множество J^{int} также является идеалом. И пусть ρ — неограниченная конечно-аддитивная мера на $\mathcal{A}_0(S)$, непрерывная снизу на $\mathcal{L}_1(S)$ и регулярная снизу на $\mathcal{P}(S)$.*

Тогда существует неограниченная конечно-аддитивная мера $\widehat{\rho}$ на $\mathcal{A}(S)$, регулярная снизу на $\mathcal{L}(S)$, такая, что для любого J из $\mathcal{L}(S)$ выполняется соотношение $\widehat{\rho}(J) = \overline{\rho}(J^{int})$. При этом на множестве всех конечнопорожденных идеалов $\mathcal{P}(S)$ меры $\widehat{\rho}$ и ρ будут совпадать.

В главе 5 рассматриваются непосредственно экспоненциально распределенные случайные поля на частично упорядоченных множествах.

В параграфе 5.1 главы 5 описывается метод построения экспоненциально распределенных случайных полей на ч.у.м.

Пусть H – произвольное частично упорядоченное множество.

Будем обозначать $\widehat{H} \stackrel{df}{=} H \times \boldsymbol{R}$ декартово произведение ч.у.м. H и линейно упорядоченного множества действительных чисел $\boldsymbol{R}$. При этом будем считать, что на $\widehat{H}$ задана топология произведения тривиальной топологии на H и топологии действительной оси $\boldsymbol{R}$.

Для любого элемента (a, y) из $\widehat{H}$ будем обозначать $\mathcal{I}_{\widehat{H}}(a, y)$ главный идеал, порожденный элементом (a, y): $\mathcal{I}_{\widehat{H}}(a, y) = \{(a', y') \in \widehat{H} :\ a' \leq a,\ y' \leq y\}$.

Пусть ρ — конечно-аддитивная неограниченная мера на $\mathcal{A}_0(\widehat{H})$.

Для любого a из H и любого действительного y обозначим $Q_{\rho,a}(y)$ меру $\rho\Big(\mathcal{I}_{\widehat{H}}(a,y)\Big)$ идеала $\mathcal{I}_{\widehat{H}}(a,y)$. Эта функция является аналогом функции распределения меры на $\boldsymbol{R}^d$. Определим для любого конечного подмножества Λ множества H функцию $g_{\rho,\Lambda}$ на $\boldsymbol{R}^\Lambda$, полагая для любого вектора $\boldsymbol{x}$ из $\boldsymbol{R}^\Lambda$ $g_{\rho,\Lambda}(\boldsymbol{x}) = \exp\Big(-\rho(\mathbf{Y}_\Lambda \boldsymbol{x})\Big)$. Данная функция совпадает с правой частью соотношения (3) из определения экспоненциально распределенного случайного поля.

Теорема 5.1. *Пусть H — частично упорядоченное множество, ρ — произвольная неограниченная конечно-аддитивная мера на алгебре множеств $\mathcal{A}_0(\widehat{H})$, непрерывная снизу на $\mathcal{L}_1(\widehat{H})$, регулярная снизу на $\mathcal{P}(\widehat{H})$, и такая, что для любого a из H выполняется соотношение $\lim\limits_{y\to+\infty} Q_{\rho,a}(y) = +\infty$.*

Тогда существует экспоненциально распределенное случайное поле η_ρ на H такое, что для любого конечного подмножества Λ множества H и для любой функции $\boldsymbol{x}$ из $\boldsymbol{R}^\Lambda$ имеет место равенство

$$\mathbf{P}\Big\{\eta_\rho(a) \geq \boldsymbol{x}(a)\ \forall a \in \Lambda\Big\} = g_{\rho,\Lambda}(\boldsymbol{x}) \tag{5}$$

Теорема 5.2 позволяет упростить условия, налагаемые на меру ρ в теореме 5.1 в случае, если H — $\wedge$-полурешетка: в этом случае мера ρ регулярна снизу на $\mathcal{P}(\widehat{H})$ тогда и только тогда, когда для любого элемента a из H функция $Q_{\rho,a}(y)$ непрерывна снизу на $\boldsymbol{R}$.

Но если H — $\wedge$-полурешетка, то $\mathcal{L}_1(\widehat{H}) = \mathcal{P}(\widehat{H})$. Значит для того, чтобы по мере ρ на $\mathcal{A}_0(\widehat{H})$ можно было построить экспоненциально распределенное случайное поле η_ρ на $\wedge$-полурешетке H, удовлетворяющее соотношению (5), достаточно, чтобы для любого a из H функция $Q_{\rho,a}$ была непрерывна снизу и выполнялось соотношение $\lim\limits_{y\to+\infty} Q_{\rho,a}(y) = +\infty$.

В параграфе 5.2 описывается структура конечномерных распределений экспоненциально распределенных случайных полей.

Для любого конечного подмножества Λ множества H обозначим $\mu_\Lambda(\rho)$ конечномерное распределение экспоненциально распределенного случайного поля η_ρ на Λ. По формуле (5), функция $g_{\rho,\Lambda}(\boldsymbol{x})$ будет коррелятором меры $\mu_\Lambda(\rho)$.

Будем говорить, что подмножество Λ ч.у.м. H замкнуто относительно решеточных пересечений, если для любых элементов a и b из Λ существует их решеточное пересечение $c = a \wedge b$, и это пересечение также принадлежит Λ (при этом не обязательно, чтобы решеточное пересечение существовало для всех пар элементов из H).

В параграфе 5.2 сформулирована теорема 5.3, позволяющая в случае множества Λ, замкнутого относительно решеточных пересечений, выразить коррелятор $g_{\rho,\Lambda}$ конечномерного распределения $\mu_\Lambda(\rho)$ случайного поля η_ρ как экспоненту от линейной комбинации функций $Q_{\rho,a}$, $a \in \Lambda$.

Также в параграфе 5.2 сформулирована теорема 5.4, уточняющая теорему 1.1 в частном случае экспоненциально распределенных случайных полей. Эта теорема позволяет в случае множества Λ, замкнутого относительно решеточных пересечений, выразить плотность распределения $\frac{d\mu_\Lambda(\rho)\Big|_{\Gamma^{int}}}{d\lambda_\Gamma}$ через производные функций $Q_{\rho,a}$, $a \in \Lambda$, для всех граней Γ конуса $\mathcal{M}_\Lambda$.
Хотя теорема 5.4 дает полное описание конечномерных распределений экспоненциально распределенного случайного поля η_ρ, в общем случае мы не можем вычислить в явном виде характеристики случайного поля η_ρ — такие как математическое ожидание значения поля в точке или корреляционную функцию.

В параграфе 5.3 эти характеристики случайного поля η_ρ вычислены в следующем случае: H — $\wedge$-полурешетка, а мера ρ имеет вид $\rho(\gamma) = \gamma \times \lambda_+$ где γ — некоторая конечно-аддитивная мера на $\mathcal{A}_0(H)$, а $\lambda_+ = \lambda\Big|_{\mathbf{R}_+}$ — ограничение меры Лебега λ на множество положительных чисел $\boldsymbol{R}_+$.

В главе 6 результаты предыдущих глав используются для построения положительно определенных функций на частично упорядоченных множествах.

Функцию от двух переменных $K(a,b) : H \times H \to \boldsymbol{R}$ называем положительно определенной (неотрицательно определенной), если для любых попарно различных элементов $a_1, \ldots, a_n$ из H матрица $\Big(K(a_i, a_j)\Big)_{i,j=1,\ldots,n}$ является положительно определенной (неотрицательно определенной).

Пусть H — ч.у.м., γ – неограниченная конечно-аддитивная мера на $\mathcal{A}_0(H)$. Будем говорить, что мера γ строго положительна на $\mathcal{A}_0(H)$, если для любого непустого множества A из $\mathcal{A}_0(H)$ имеет место неравенство $\gamma(A) > 0$.

Теорема 6.1 дает простой критерий строгой положительности меры:
если H — $\wedge$-полурешетка, то мера γ строго положительна на $\mathcal{A}_0(H)$ тогда и

только тогда, когда для любых конечнопорожденных идеалов I_1 и I_2 из $\mathcal{P}(H)$ таких, что $I_1 \backslash I_2 \neq \emptyset$, имеет место неравенство $\gamma(I_1 \backslash I_2) > 0$.

Теорема 6.2. *Пусть H — произвольное частично упорядоченное множество, γ — неограниченная конечно-аддитивная мера на $\mathcal{A}_0(H)$, такая, что для любого a из H мера $\gamma\Big(\mathcal{I}_H(a)\Big)$ имеет конечное значение.*

Тогда функция $K(a,b)$ на H, определяемая по формуле

$$K_\gamma(a,b) = \frac{\gamma\Big(\mathcal{I}_H(a) \cap \mathcal{I}_H(b)\Big)}{\gamma\Big(\mathcal{I}_H(a) \cup \mathcal{I}_H(b)\Big)} \tag{6}$$

является неотрицательно определенной на H.

При этом, если H — $\wedge$-полурешетка и мера γ строго положительна на $\mathcal{A}_0(H)$, то функция $K(a,b)$ будет положительно определенной на H.

Используя эту теорему, мы построили в главе 6 ряд примеров положительно определенных и неотрицательно определенных функций на частично упорядоченных множествах.

В Заключении диссертации дано описание основных результатов, полученных в данной работе.

Список публикаций

1. *Бейненсон Л.Б.* Монотонно невозрастающие случайные поля на частично упорядоченных множествах. I. // *Записки научных семинаров ПОМИ.* — 2003. — Т. 301. — С. 92–143.

   Перевод на англ.: *Beinenson L.* Monotone Nonincreasing Random Fields on Partially Ordered Sets. I // *Journal of Mathematical Sciences.* — 2005. — Vol. 129, no. 2. — Pp. 3730–3756.

2. *Бейненсон Л.Б.* Монотонно невозрастающие случайные поля на частично упорядоченных множествах. II. Распределения вероятностей на многогранных конусах. // *Записки научных семинаров ПОМИ.* — 2004. — Т. 307. — С. 5–56.

   Перевод на англ.: *Beinenson L.* Monotone Nonincreasing Random Fields on Partially Ordered Sets. II. Probability Distributions on Polyhedral Cones // *Journal of Mathematical Sciences.* — 2005. — Vol. 131, no. 2. — Pp. 5445–5470.