На правах рукописи

КОНОНОВА АННА АЛЕКСАНДРОВНА

# АСИМПТОТИКА ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ И КОМПАКТНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ОПЕРАТОРА ЯКОБИ

01.01.01 — математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2009

Работа выполнена на кафедре “Прикладная математика” Нижегородского государственного технического университета.

Научный руководитель - доктор физико-математических наук, профессор В. А. Калягин.

Официальные оппоненты - доктор физико-математических наук, профессор А. И. Аптекарев;
- кандидат физико-математических наук Е. В. Абакумов.

Ведущая организация - Санкт-Петербургский государственный университет.

Защита состоится «____» __________ 2009 года в ______час. на заседании Диссертационного Совета Д 002.202.01
в Санкт-Петербургском отделении Математического института
им. В.А.Стеклова Российской академии наук
по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, ауд. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ПОМИ РАН.

Автореферат разослан «____» ____________ 2009 года.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук

А.Ю.Зайцев

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** В диссертации рассматриваются задачи, относящиеся к теории ортогональных многочленов и теории операторов Якоби. Хорошо известно, что асимптотические свойства ортогональных многочленов играют важную роль при изучении спектральных свойств операторов Якоби[1].

Пусть $\mu$ — положительная мера с компактным носителем в комплексной плоскости. Определим последовательность многочленов $Q_n(z) = z^n + \ldots$, ортогональных по мере $\mu$:

$$(Q_n, z^k)_\mu := \int\limits_{supp(\mu)} Q_n(\zeta; \mu)\overline{\zeta}^k d\mu = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

*Задачей о сильной асимптотике* называют задачу об асимптотическом поведении многочленов $Q_n(z)$ вне носителя меры и на самом носителе. В классическом случае $supp(\mu) = [-1; 1]$ сильная асимптотика ортогональных многочленов определяется теорией С. Н. Бернштейна и Г. Сегё. Теория Бернштейна—Сегё была развита на случай системы кусочно-гладких дуг и контуров в фундаментальной работе Г. Видома[2]. Результаты Г. Видома были уточнены А. И. Аптекаревым, который получил точные формулы сильной асимптотики в терминах стандартных тэта-функций Римана на римановой поверхности, определяемой геометрией дуг и контуров[3]. Основное условие, накладываемое при этом на меру — условие Сегё. Среди результатов последних лет следует отметить статью[4] Ф. Пехерсторфера и П. Юдицкого, в которой методами, отличными от методов Видома, изучается асимптотика многочленов, ортогональных на действительной оси для некоторого класса мер с дискретными массами. Задача о нахождении асимптотики при возмущении меры добавлением масс впервые была рассмотрена в неявном виде А. А. Гончаром[5] для случая отрезка действительной оси. Позднее многие авторы исследовали

[1] Н. И. Ахиезер, *Классическая проблема моментов*, 1961.

[2] H. Widom, *Extremal Polynomials Associated with a System of Curves and Arcs in the Complex Plane*, Adv. in Mathem., v.3 (1969), n.2, pp.127 – 232.

[3] А. И. Аптекарев, *Асимптотические свойства многочленов, ортогональных на системе контуров, и периодические движения цепочек Тода*, Матем. сб., **125(167)**(1984), № 2(10), 231 – 258.

[4] F. Peherstorfer, P. Yuditskii *Asymptotic behavior of polynomials orthonormal on a homogeneous set,* J. d'Analyse Mathe'matique, **89** (2003), no 1, 113 – 154.

[5] А. А. Гончар, *О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных функций*, Мат. сборник, **97(139)**(1975), № 4(8), 607 – 629.

асимптотическое поведение ортогональных многочленов при добавлении к мере дискретной составляющей.

Асимптотические свойства ортогональных многочленов применяются для изучения спектральных свойств операторов Якоби. В свою очередь прямая и обратная спектральные задачи играют фундаментальную роль, например, в исследовании динамики колебаний периодической цепочки Тода, в решении обратной задачи рассеяния для разностных операторов Штурма—Лиувилля второго рода на полуоси[6]. Мера ортогональности является спектральной мерой соответствующего оператора Якоби. Возмущение меры ортогональности системы многочленов приводит к возмущению оператора. Исследование связи между возмущениями спектральной меры и возмущениями оператора является основной задачей теории. Этому вопросу посвящены работы Ю. А. Березанского, В. Ван Ассе, Дж. Джеронимо, П. Неваи, Е. М. Никишина и др.

В настоящей работе исследуется вопрос о компактности возмущения оператора Якоби при возмущениях спектральной меры. В общей теории ортогональных многочленов известны некоторые классы возмущений меры, интересные для приложений. Одно из таких возмущений — это умножение абсолютно непрерывной части меры на неотрицательную функцию, другое получается при добавлении точечных масс к мере. Решение этой задачи известно для класса спектральных мер с носителем на $[-1;1]$ и условием $\mu' > 0$ почти всюду на отрезке $[-1;1]$ (класс Рахманова). Актуальной является задача определения условий компактности возмущения оператора Якоби при возмущении спектральной меры для конечнозонного оператора Якоби, т.е. оператора, существенный спектр которого состоит из конечного набора отрезков действительной оси. Решению этой задачи посвящена настоящая диссертация.

**Целью работы** является решение следующих задач.

1. Исследовать сильную асимптотику многочленов, ортогональных на системе дуг и замкнутых контуров по мере, имеющей дискретную часть.

2. Исследовать асимптотику отношения многочленов, ортогональных на конечном наборе отрезков действительной оси с дополнительными дискретными массами.

3. На основе результатов пунктов 1 и 2 исследовать компактность

[6] Е. М. Никишин, *Дискретный оператор Штурма—Лиувилля и некоторые задачи теории функций*, Тр. семинара им. Петровского, **9**(1984).

возмущения оператора Якоби при возмущении его спектральной меры добавлением конечного числа дискретных масс и/или домножением абсолютно непрерывной части спектральной меры на неотрицательный множитель.

**Методы исследования.** В работе используются современные методы теории функций, теории пространств Харди, теории римановых поверхностей и тэта-функций Римана, спектральной теории операторов.

**Научная новизна полученных результатов.**

1. Для многочленов, ортогональных на системе дуг и контуров относительно меры класса Сегё с конечной дискретной составляющей, доказана теорема об их асимптотическом поведении. Получено описание асимптотики в терминах тэта-функций Римана.
2. Для предельно-периодических операторов Якоби найдено необходимое и достаточное условие компактности возмущения оператора при возмущении дискретной составляющей спектральной меры.
3. Для конечнозонных операторов Якоби получены необходимые и достаточные условия компактности возмущения оператора при комбинированном возмущении спектральной меры.

Все основные результаты диссертации являются новыми.

**Теоретическая и практическая ценность полученных результатов.** Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут найти применение в различных областях математики и физики, связанных с теорией операторов Якоби и асимптотикой ортогональных многочленов.

**Достоверность результатов.** Все результаты диссертационной работы являются достоверными научными фактами, все утверждения строго доказаны и обоснованы.

**Личный вклад соискателя.** Доказательства всех основных положений получены соискателем лично. В совместной работе научному руководителю принадлежат постановка задач и возможная методика их решения.

**Научные положения, выносимые на защиту.**

1) Результаты, описывающие асимптотическое поведение многочленов, ортогональных на системе дуг и контуров по мере с конечной дискретной частью.

2) Результаты о необходимом и достаточном условии компактности возмущения предельно-периодического оператора Якоби при возмущении дискретной составляющей спектральной меры.

3) Результаты о компактности возмущения оператора Якоби при комбинированном возмущении его спектральной меры для некоторого класса непериодических операторов.

**Апробация работы.** Результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинаре в Universite des Sciences et Technologies de Lille, (1998 г., Лилль, Франция), на Международной научной конференции "Геометрическая теория функций и краевые задачи"(2002 г., Казань), на V Международном симпозиуме "Ряды Фурье и их приложения"(2008 г., Новороссийск), на Санкт-Петербургском семинаре по теории операторов и теории функций (Санкт-Петербург, 2008 г.), на XVII конференции по математическому анализу (Санкт-Петербург, 2008 г.), на семинаре по ортогональным многочленам в Московском государственном университете (Москва, 2008 г.), на научном семинаре кафедры “Прикладная математика” Нижегородского государственного технического университета (Нижний Новгород, 2009 г.).

**Публикации.** Материалы диссертации отражены в 4 работах (одна статья в журнале из списка ВАК), список публикаций приводится в конце автореферата.

**Структура диссертации.** Диссертация состоит из введения и трех глав.

Во **введении** представлен обзор литературы, изложена актуальность темы диссертации, сформулированы цели работы и методы решения поставленных задач.

В **главе 1** приводятся предварительные сведения, необходимые для дальнейшего изложения.

В **главе 2** рассматривается вопрос об асимптотике многочленов. Глава разбита на два параграфа. Первый параграф посвящен сильной асимптотике многочленов, ортогональных относительно меры, абсолютно непрерывной на объединении конечного числа комплексных дуг и кривых с добавлением конечного числа дискретных масс при условии, что весовая функция удовлетворяет условию Сегё. Найдены формулы сильной асимптотики для этого случая. Во втором параграфе изучается асимптотика многочленов, ортогональных по мере на подмножестве действительной оси. Получены формулы асимптотики отношения для многочленов, полученных возмущением меры ортогональности добавлением конечного набора дискретных масс при условии, что исходной мере ортогональности соответствовала предельно-периодическая матрица Якоби.

В **главе 3** исследуется вопрос о компактности возмущения оператора Якоби при возмущении его спектральной меры. Глава разбита на два параграфа. В первом параграфе исследуется вопрос о компактности возмущения предельно-периодического оператора Якоби при добавлении к спектральной мере оператора конечного набора дискретных масс. С помощью формул сильной асимптотики и асимптотики отношения, полученных во второй главе, найдено необходимое и достаточное условие такого возмущения. Во втором параграфе исследуется вопрос о компактности возмущения ограниченного конечнозонного оператора Якоби. При этом предполагается, что спектральная мера оператора (исходного и возмущенного) имеет абсолютно-непрерывную составляющую, сосредоточенную на существенном спектре оператора, с весом, удовлетворяющим условию Сегё, не более чем конечный набор дискретных масс, расположенных на действительой оси вне носителя абсолютно-непрерывной составляющей спектральной меры, возможно также присутствие сингулярной составляющей.

Диссертация изложена на 82 страницах. Список литературы включает 38 названий.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Глава 1. Предварительные сведения.** Пусть $E := \bigcup_{k=1}^{p} E_k$ — набор комплексных дуг и кривых, которые попарно не пересекаются и являются границей связной области $\Omega$ комплексной плоскости, содержащей бесконечно удаленную точку. Пусть каждая дуга $E_k$ принадлежит классу

$C^{2+}$. Зададим $\rho(\zeta) \geq 0$ — весовую функцию на $E$ такую, что

$$\int_E \rho(\zeta)|d\zeta| < +\infty. \tag{1}$$

Пусть $g(z, z_0)$ — действительная функция Грина для $\Omega$ с особенностью в точке $z_0$. Функция $G(z, z_0) = g(z, z_0) + i\tilde{g}(z, z_0)$ называется комплексной функцией Грина, $g(z)$ и $G(z)$ обозначают действительную и комплексную функции Грина с полюсом в бесконечности ($z_0 = \infty$). Важную роль в нашем исследовании играет функция $\Phi(z) = \exp[G(z)]$

Говорят, что функция $\rho(\zeta)$ удовлетворяет условию Сегё на $E$, если

$$\oint_E \log \rho(\zeta)|\Phi'(\zeta)||d\zeta| = \oint_E \log \rho(\zeta)\frac{\partial g(\zeta)}{\partial n_\zeta}|d\zeta| > -\infty. \tag{2}$$

При выполнении условия Сегё существует действительная функция $h(z)$, гармоническая в области $\Omega$ и удовлетворяющая на $E$ следующему граничному условию: $h(\zeta)|_{\zeta\in\partial\Omega} = \log(\rho(\zeta))$. Функцию $D(z) = \sqrt{R(z)}$, где $R(z) = (1/2)(h + i\tilde{h})$ называют функцией Сегё, ассоциированной с весом $\rho(\zeta)$.

Гармоническая мера $\omega_k(z)$, $k = 1, \dots, p$ — это функция, гармоническая в области $\Omega$ включая $\infty$, имеющая граничное значение 1 на $E_k$ и граничное значение 0 на $E_j$, $j \neq k$. Обозначим $\Omega_k(z) := (1/2)[\omega_k(z) + i\tilde{\omega}_k(z)]$.

Для многозначной функции $F(z)$, имеющей однозначный модуль, определим $\gamma_k(F) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{E_k}\arg F \pmod 1$, $k = 1, \dots, p$. (Символ $\Delta_{E_j}$ обозначает приращение функции при обходе вокруг отрезка $E_j$.)

Обозначим $\Gamma(F) = (\gamma_1, ..., \gamma_p)$, $0 \leq \gamma_k < 1$. Мы будем говорить, что две функции $F_1$ и $F_2$ принадлежат одному классу многозначности тогда и только тогда, когда $\Gamma(F_1) = \Gamma(F_2)$, $k = 1, ..., p$. Введем обозначение $\Gamma_n = \Gamma(\Phi^{-n}(z))$.

Для данного вектора $\Gamma$ пространство Харди $H_2(\Omega, \rho, \Gamma)$ — это пространство функций $F(z)$, локально аналитичных в области $\Omega$, имеющих однозначный модуль и многозначный аргумент, принадлежащих классу многозначности $\Gamma$ и таких, что функция $|F(z)^2 R(z)|$ имеет гармоническую мажоранту в $\Omega$.

Г. Видом изучил следующую экстремальную задачу

(I) Найти $\hat{m}(\Omega, \rho, \Gamma) = \inf \oint_E |F(\zeta)|^2 \rho(\zeta)|d\zeta|$ в классе функций $F(z) \in H_2(\Omega, \rho, \Gamma)$, удовлетворяющих равенству $|F(\infty)| = 1$.

Обозначим через $\psi_n(z)$ экстремальную функцию из задачи (I), соответствующую классу многозначности $\Gamma(\Phi^{-n})$ и $\psi_\Gamma(z)$ для класса $\Gamma$.

Пусть $Q_{n,\rho}(z)$ — многочлены со старшим коэффициентом единица, ортогональные относительно меры $\mu$ ($d\mu(\zeta) = \rho(\zeta)|d\zeta|$ на множестве $E$). Обозначим

$$m_n(\mu) := (Q_n(\zeta,\mu), Q_n(\zeta,\mu))_\mu = ||Q_n(\zeta,\mu)||^2_\mu.$$

Определим

$$\Psi_n(\zeta) = \begin{cases} \Phi^n(\zeta)\psi_n(\zeta), & \zeta \in E^{(1)}, \\ \Phi^n_+(\zeta)\psi_{n+}(\zeta) + \Phi^n_-(\zeta)\psi_{n-}(\zeta), & \zeta \in E^{(2)}, \end{cases}$$

где $E^{(1)}$ и $E^{(2)}$ — объединение замкнутых и незамкнутых кривых из $E$ соответственно. Тогда верна следующая формула сильной асимптотики.

**Теорема (Г. Видом).** *Если $E \in C^{2+}$ и $\rho(\zeta)$ удовлетворяет условиям* (1) *и* (2) *на $E$, то при $n \to \infty$*

1. $m_n(\mu) \sim C(E)^{2n}\hat{m}(\Omega, \rho, \Gamma_n)$;
2. $\displaystyle\int_E |C(E)^{-n}Q_n(\zeta;\rho) - \Psi_n(\zeta)|^2\rho(\zeta)|d\zeta| \to 0$ ;
3. $Q_n(z;\rho) = C(E)^n\Phi^n(z)(\psi_n(z) + \alpha_n)$, $\alpha_n \to 0, n \to \infty$ *равномерно на компактных подмножествах* $\Omega$.

Пусть теперь мера ортогональности многочленов $\mu$ имеет своим носителем замкнутое ограниченное подмножество действительной прямой. Хорошо известно, что в этом случае ортогональные многочлены удовлетворяют трехчленному рекуррентному соотношению

$$Q_{n+1}(z) = (z - b_n)Q_n(z) - a^2_{n-1}Q_{n-1}(z),$$

где $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим бесконечную трехдиагональную матрицу $A$, элементами которой являются коэффициенты рекуррентного соотношения для ортогональных многочленов. Эта матрица называется матрица Якоби. Будем предполагать, что: $\sup_n\{a_n\} + \sup_n\{|b_n|\} < \infty$.

Матрица $A$ порождает ограниченный самосопряженный оператор (оператор Якоби) в гильбертовом пространстве $l^2(\mathbb{Z}_+)$ с каноническим ортонормированным базисом $\{e_n\}_0^\infty$. Спектральная мера этого оператора является мерой ортогональности многочленов $Q_n(z)$.

Множество изолированных точечных масс спектральной меры оператора Якоби составляет дискретный спектр оператора. Обозначим через $\sigma(A)$ спектр $A$ и через $\sigma_d(A)$ дискретный спектр, тогда множество $\sigma_{ess} := \sigma(A) \setminus \sigma_d(A)$ — существенный спектр $A$.

Обозначим через $\mathcal{K}$ идеал компактных операторов в $l^2(\mathbb{Z}_+)$. Говорят, что оператор $A$ является *компактным возмущением* оператора $A^0$, если $(A - A^0) \in \mathcal{K}$. Хорошо известно, что $(A - A^0) \in \mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} |a_n^0 - a_n| = 0, \quad \lim_{n\to\infty} |b_n^0 - b_n| = 0. \tag{3}$$

По теореме Вейля существенный спектр оператора Якоби не изменяется при компактном возмущении, т.е. если $(A - A^0) \in \mathcal{K}$, то $\sigma_{ess}(A^0) = \sigma_{ess}A$, а дискретные спектры могут отличаться.

Оператор Якоби $A^0$ будем называть *периодическим*, а оператор $A$ *предельно-периодическим* с периодом $p$, если $(A - A^0) \in \mathcal{K}$ и $a_{np+k}^0 = a_k^0$, $b_{np+k}^0 = b_k^0$, $k = 0, \dots, p-1$

При возмущении дискретной составляющей спектральной меры мы получаем новый оператор Якоби. Одна из основных проблем, исследуемых в настоящей работе, состоит в определении условий, при которых полученный оператор будет являться компактным возмущением исходного. Для однозонных операторов Якоби (существенный спектр которых состоит из единственного отрезка) решение этой задачи известно для широкого класса мер (класс Рахманова). Из асимптотической формулы, полученной А. А. Гончаром, следует, что добавление конечного числа точечных масс к мере класса Рахманова всегда продуцирует компактное возмущение соответствующего оператора Якоби. Это не верно для двух- и более зонных операторов. Как показывают результаты нашего исследования, ответ на этот вопрос зависит от геометрии существенного спектра оператора и от расположения дополнительных точечных масс.

**Глава 2.** Во второй главе изучаются асимптотические свойства многочленов, ортогональных по мере, имеющей дискретную часть. В первом параграфе второй главы диссертации найдена формула сильной асимптотики для многочленов, ортогональных относительно меры, абсолютно непрерывной на объединении конечного числа комплексных дуг и кривых с добавлением конечного числа дискретных масс, при условии, что весовая функция удовлетворяет условию Сегё.

Для этого решается следующая экстремальная задача:

(II) Для всех $F(z) \in H_2^0(\Omega, \rho, \Gamma_n)$, удовлетворяющих $|F(\infty)| = 1$, найти

$$\hat{m}^0(\Omega, \rho, \Gamma_n) = \inf_F \oint_E |F(\zeta)|^2 \rho(\zeta)|d\zeta|.$$

Введем функцию

$$B(z) = \prod_{k=1}^{N} \frac{\Phi(\infty, z_k)}{\Phi(z, z_k)}.$$

Эта функция аналитична в области $\Omega$ и обладает следующими свойствами:

1. $B(z_k) = 0$;
2. $|B(\infty)| = 1$;
3. $|B(\zeta)\ |_{\zeta\in\partial\Omega}\ | = \prod_{k=1}^{l} |\Phi(z_k)|$;
4. $\gamma_j(B) = \sum_{k=1}^{l} \omega_j(z_k)$, $j = 1, 2, ..., p$.

Функция $B(z)$ является многозначным аналогом произведения Бляшке.

Следующий результат описывает связь решения экстремальной задачи (II) с экстремальной задачей (I) для измененного класса многозначности.

**Лемма.** *Выполнены следующие соотношения*

1. $\psi_{\tilde{\Gamma}}(z)B(z) = \psi_{\Gamma}^0(z)$;
2. $\hat{m}^0(\Omega, \rho, \Gamma) = \hat{m}(\Omega, \rho, \tilde{\Gamma}) \prod_{k=1}^{l} |\Phi(z_k)|^2$.

Решение экстремальной задачи (II) позволяет построить сильную асимптотику многочленов $Q_n(z, \mu^0)$, ортогональных относительно меры $\mu^0$ с дискретной составляющей.

Основным результатом первого параграфа второй главы является

**Теорема.** *Пусть* $E \in C^{2+}$ *и* $\rho(\zeta)$ *удовлетворяет условиям* (1) *и* (2), *тогда*

1) $m_n(\mu^0) \sim C(E)^{2n} \hat{m}^0(\Omega, \rho, \Gamma_n), \quad n \to \infty$;

2) $\displaystyle\int_E |C(E)^{-n} Q_n(\zeta) - \Psi_n^0(\zeta)|^2 \rho(\zeta)|d\zeta| \to 0$;

3) $Q_n(z) = C(E)^n \Phi^n(z)[\psi_n^0(z) + \epsilon_n(z)]$, *где* $\epsilon_n \to 0$ *при* $n \to \infty$

*равномерно на компактных подмножествах* $\Omega \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_l\}$ *и*

$$\Psi_n^0(\zeta) = \begin{cases} \Phi^n(\zeta)\psi_n^0(\zeta), & \zeta \in E^{(1)}, \\ \Phi_+^n(\zeta)\psi_{n+}^0(\zeta) + \Phi_-^n(\zeta)\psi_{n-}^0(\zeta), & \zeta \in E^{(2)}, \end{cases}$$

*где* $E^{(1)}$ *обозначает множество замкнутых контуров, а* $E^{(2)}$ — *множество дуг.*

Для экстремальных функций $\psi_n^0$ верно следующее представление:

$$\psi_n^0 = \chi(z)\frac{D(\infty)}{D(z)}\frac{\Theta_{n,\rho}^0(z)}{\Theta_{n,\rho}^0(\infty)}\prod_{k=1}^{l}\frac{\Phi(\infty, z_k)}{\Phi(z, z_k)}, \tag{4}$$

где функция $\chi(z)$ зависит только от $\Omega$ и не зависит от класса $\Gamma$ и весовой функции $\rho$, $D(z)$ — функция Сегё, ассоциированная с весом $\rho$.

$$\Theta_{n,\rho}^0(z) = \theta\left(\left[\int_{z_0}^{z} d\Omega_j(\zeta)\right] - b_j^0\right),\ j = 1, 2, \ldots, p-1,$$

где $\theta$ — тэта-функция Римана с матрицей параметров $C = iB_{k,j}$ и

$$b_\nu^0 = \Delta_\nu - n\omega_\nu(\infty) + \sum_{k=1}^{l}\omega_\nu(z_k) + \sum_{j=1}^{p-1}\int_{z_0}^{z_j^*} d\Omega_\nu(\zeta) + k_\nu, \quad \nu = 1, 2, ..., p-1,$$

где $z_0 \in E_p$, $\{z_j^*\}_{j=1}^{p-1}$ — нули функции $G'(z)$, $k_\nu$ — римановы константы поверхности $\Re$ и

$$\Delta_\nu = \frac{1}{4\pi}\oint_{E_\nu} \ln\rho_g(\zeta)\frac{\partial\omega_\nu}{\partial n_\zeta}|d\zeta|, \quad \rho_g(\zeta) = \rho(\zeta)/(\partial g/\partial n_\zeta).$$

Во втором параграфе второй главы изучается асимптотика отношения многочленов при добавлении к мере ортогональности конечного набора масс. Рассматриваются многочлены, ортогональные относительно меры, сосредоточенной на наборе попарно непересекающихся отрезков действительной оси: $E = \cup_{k=1}^{p} E_k$, $E_k = [\alpha_k; \beta_k]$, $k = 1, ..., p$. При этом на меру ортогональности не наложено условие Сегё. Класс рассматриваемых мер удобно описать на языке соответствующих операторов Якоби. Он соответствует предельно-периодическим операторам. Известно, что в этом случае гармонические меры отрезков $E_k$ в бесконечности являются рациональными числами. Как и раньше, обозначим через $\Omega$ многосвязное дополнение множества $E$, $\Omega = \mathbb{C} \setminus E$.

Пусть $A$ — некоторый предельно-периодический оператор Якоби, $Q_n(z)$ — ассоциированные с ним ортогональные многочлены. Добавим к спектральной мере этого оператора конечный набор дискретных масс (массы можно добавлять по одной, итеративно). Пусть $\mu^*(\zeta) = \mu(\zeta) + \alpha^*$, где $\alpha^*$ — мера с единственной дискретной массой, расположенной на действительной оси вне выпуклой оболочки $\sigma(A)$ в точке $z_1$. Обозначим через $Q_n^*$ многочлены, ортогональные по мере $\mu^*$.

Основным результатом второго параграфа второй главы является

**Теорема.** *Равномерно внутри области* $\Omega$ *верны следующие соотношения:*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{Q^*_{mp+j+1}}{Q_{mp+j-1}}(z)(z - z_1^*) = H_j(z),$$

*где*

$$H_j(z) = (C(E)\Phi(z))^2 F_{j-1,2}(z) + \lambda_{j,1}(C(E)\Phi(z))F_{j-1,1}(z) + \lambda_{j,2},$$

*а параметры* $\lambda_{j,1}, \lambda_{j,2}$ *определяются из условий*

$$H_j(z_1^*) = 0; \qquad H_j'(z_1^*) = 0 \qquad \forall k.$$

**Глава 3.** В *третьей главе* исследуется вопрос о компактности возмущения оператора Якоби, возникающего при комбинированном возмущении его спектральной меры.

В первом параграфе формулы сильной и слабой асимптотики, найденные в предыдущий главе, применяются для исследования компактности возмущения предельно-периодического оператора Якоби при добавлении к мере конечного набора дискретных масс.

**Теорема.** *Добавление дискретных масс в точках* $z_k^*$ *вне выпуклой оболочки носителя спектральной меры предельно-периодического оператора Якоби* $A$ *с периодом* $p \geq 1$ *дает компактное возмущение оператора тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k=1}^{l} \omega_j(z_k^*) \equiv 0 \pmod 1, \quad j = 1, 2, \ldots, r, \tag{5}$$

*где* $r$ *— число компонент связности множества* $\sigma_{ess}(A)$.

Доказательство теоремы основано на асимптотических формулах для ортогональных многочленов, а также на свойствах тэта-функций Римана.

Теорема доказывается сначала для чисто периодических операторов Якоби, затем для предельно-периодических при условии, что соответствующая весовая функция удовлетворяет условию Сегё. Доказательство основано на формуле сильной асимптотики, полученной в первом параграфе второй главы, и на свойствах тэта-функций Римана. Затем с применением формулы асимптотики отношения из второго параграфа второй главы показано, что условие Сегё можно опустить.

Во втором параграфе третьей главы рассматривается задача о компактности возмущения оператора Якоби при комбинированном возмущении спектральной меры. Пусть $\mu$ — спектральная мера некоторого оператора Якоби $A_\mu$, $\mu^*$ — спектральная мера оператора Якоби $A_{\mu^*}$. Предположим, что существенные спектры операторов $A_\mu$ и $A_{\mu^*}$ совпадают. По теореме Вейля—фон Неймана оператор $A_{\mu^*}$ унитарно эквивалентен некоторому компактному возмущению оператора $A_\mu$, но сам оператор $A_{\mu^*}$ может не является компактным возмущением $A_\mu$ (даже в том случае, когда мера $\mu^*$ получена из меры $\mu$ добавлением одной массы). Нас будут интересовать условия на меры $\mu$ и $\mu^*$, необходимые и достаточные для того, чтобы оператор $A_{\mu^*} - A_\mu$ был компактным.

Таким образом, в этой главе возмущение оператора предусматривает не только добавление к мере дискретных масс, но также и изменение меры на существенном носителе.

Пусть $E$ — конечный набор попарно непересекающихся отрезков действительной оси: $E = \cup_{k=1}^{p} E_k$, $E_k = [\alpha_k; \beta_k]$, $k = 1, ..., p$. Рассмотрим операторы Якоби, существенный спектр которых совпадает с множеством $E$, абсолютно непрерывная составляющая спектральной меры имеет вес, удовлетворяющий условию Сегё на $E$, а дискретный спектр состоит из конечного набора дискретных масс, расположенных на действительной оси вне $E$. Обозначим этот класс операторов через $\mathcal{S}(E)$, соответствующий класс мер обозначим $\mathcal{M}(E)$.

Каждой мере $\mu \in \mathcal{M}(E)$, абсолютно непрерывная составляющая которой имеет вес $\rho(x)$, а дискретные массы расположены в точках $z_j \in \mathbb{R} \setminus E$, сопоставим набор чисел

$$\mathcal{J}_\nu(\mu) = \frac{1}{4\pi} \Delta_{E_\nu} \arg R(z) + \sum_{j=1}^{l} \omega_\nu(z_j), \quad \nu = 1, ..., p. \tag{6}$$

Основной результат второго параграфа третьей главы заключается в следующем.

**Теорема.** *Пусть множество $E$ является объединением не более чем трех отрезков действительной оси. Пусть $A_\mu$ и $A_{\mu^*}$ — операторы Якоби из класса $\mathcal{S}(E)$ со спектральными мерами $\mu$ и $\mu^*$ соответственно. Оператор $A_\mu - A_{\mu^*}$ является компактным тогда и только тогда, когда*

$$\mathcal{J}_\nu(\mu) \equiv \mathcal{J}_\nu(\mu^*)(mod\ 1), \quad i = 1, 2, \ldots, p;$$

*где* $\mathcal{J}_\nu(\mu) = \frac{1}{4\pi}\Delta_{E_\nu} \arg R(z) + \sum_{j=1}^{l} \omega_\nu(z_j), \ \ \nu = 1, ..., p.$

**Публикации по теме диссертации**


1) Калягин В. А., Кононова А. А. Об асимптотике многочленов, ортогональных на системе дуг, по мере, имеющей дискретную часть//Алгебра и Анализ. 2009. Т.21, № 2. С.71 – 91. (журнал из списка, рекомендованного ВАК РФ).

2) Кононова А. А. Об одном обращении теоремы Вейля для некоторого класса конечнозонных операторов Якоби// препринт ПОМИ — 1/2009. Режим доступа: http://www.pdmi.ras.ru/preprint/2009/rus-2009.html. С.1 – 17.

3) Кононова А. А. О компактных возмущениях матрицы Якоби// Труды математического центра имени Н.И.Лобачевского. Казань, 2002. Т.13. С.86 – 89.

4) Кононова А. А. Асимптотика ортогональных многочленов и компактные возмущения операторов Якоби// V Международный симпозиум "Ряды Фурье и их приложения". Ростов-на Дону, 2008. С.26.