На правах рукописи

Мозоляко Павел Александрович

Усиленная сходимость аппроксимативных единиц

01.01.01 - математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Санкт-Петербург
2009

Работа выполнена на кафедре математического анализа математико-механического факультета Санкт-Петербургского Государственного Университета

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Хавин Виктор Петрович

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, доцент
Дубцов Евгений Сергеевич
доктор физико-математических наук, профессор
Скопина Мария Александровна

Ведущая организация:
Санкт-Петербургский Электротехнический Университет

Защита диссертации состоится «___» _________ 2009 года в ___ часов на заседании диссертационного совета Д.002.202.01 в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В.А. Стеклова РАН по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д.27, к. 311

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ПОМИ РАН.

Автореферат разослан «___» _________ 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук А.Ю. Зайцев

1. Общая характеристика работы

Актуальность проблемы. Аппроксимативные единицы (а.е.), иначе говоря, семейства функций, в том или ином смысле сходящиеся к дельта-функции, образуют важный инструмент математического анализа и его приложений. Они широко употребляются в теории приближений, в математической физике, в гармоническом и комплексном анализе. И хотя принципиальные задачи теории а.е. (условия сходимости сверток с а.е. в различных пространствах, условия их поточечной сходимости и сходимости почти везде) давно решены, повседневная практика анализа выдвигает время от времени новые, порой неожиданные постановки задач, относящихся к а.е. Диссертация посвящена явлению усиленной сходимости аппроксимативных единиц, которое было открыто Бургейном в 1993 г. в [4], где дан неожиданный ответ на один вопрос У. Рудина, относящийся к граничному поведению аналитических функций, ограниченных в круге. С этим результатом в той или иной степени связаны, кроме работ [4], [1], работы [7], [9], [5], [8].

Цель работы. Центральное понятие, неявно содержащееся в работах [4], [1], есть понятие B-точки (точки Бургейна) заряда или функции на прямой $\mathbb{R}$. Целью диссертации является решение следующих задач:

(1) Ввести новое определение B-точки, по возможности более просто формулируемое и равносильное довольно громоздкому оригинальному определению.
(2) Испытать новое определение B-точки, получив на его основе доказательство основных результатов Бургейна.
(3) Получить в конкретных ситуациях обозримые условия, достаточные для того, чтобы данная точка была B-точкой данной функции.
(4) Выяснить, для каких классов а.е. и функций имеет место (или не имеет места) явление усиленной сходимости.

Методы исследований. В работе применяются общие методы комплексного и гармонического анализа. Важную роль играет некоторое развитие вариантов метода Литтлвуда-Пэли, примененных в [4], [1].

Основные результаты. В диссертации получены следующие результаты:

(1) Введена величина, названная *суммой Бургейна*; дано определение *точек Бургейна* конечного заряда и ограниченной измеримой функции на $\mathbb{R}$.
(2) Выведены налагаемые на а.е. условия, необходимые для ее усиленной сходимости в точках Бургейна; получены новые, по сравнению с [1], достаточные условия для такой сходимости.
(3) Построены новые примеры ситуаций, когда усиленная сходимость а.е нарушается всюду или почти всюду.
(4) Дано полное описание в геометрических терминах точек множества канторовского типа на вещественной прямой, в которых наблюдается усиленная сходимость гармонической меры (относительно верхней полуплоскости) этого множества.
(5) Исследована связь между конечностью сумм Бургейна и регулярностью функции.
(6) Доказано совпадение точек Бургейна функции и ее преобразования Гильберта.
(7) Дано описание точек Бургейна в терминах теории всплесков.
(8) Даны некоторые многомерные обобщения теорем об усиленной сходимости а.е.
(9) На примере ядер Валле-Пуссена показано, что явление усиленной сходимости наблюдается и для некоторых "нестандартных" а.е.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Полученные в диссертации результаты могут быть применены в задачах граничного поведения аналитических и гармонических функций в областях пространств $\mathbb{C}^d$ и $\mathbb{R}^d$.

Апробация работы. Результаты диссертации были доложены на семинаре по теории операторов и теории функций ПОМИ РАН (в 2007 г.) и на конференции "Journèes Complexes du Sud" (CIRM, Marseilles, 2008 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано две работы [M1], [M2].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, шести глав, разбитых на параграфы и пункты, и списка литературы, включающего 22 названия. Общий объем диссертации — 145 страниц.

2. Содержание работы

2.1. **Введение.** Во **введении** к диссертации дано краткое описание явления усиленной сходимости a.e., открытого Бургейном. В общей форме обсуждаются задачи, которым посвящена диссертация. Большая часть введения посвящена формулировке и обсуждению основных результатов по главам.

2.2. **Сравнимость сумм B^*_μ и B_μ.** В **первой главе** мы вводим основное для нас понятие точки Бургейна конечного заряда μ на $\mathbb{R}$ (= σ-аддитивная борелевская функция множества); неотрицательный заряд мы называем *мерой*. Чтобы сформулировать результаты первой главы, нам потребуются следующие определения.

Функцию $\Phi \in L^1(\mathbb{R})$ назовем *ядром*, если $\int_{\mathbb{R}} \Phi(t)\,dt = 1$; буквами P и F обозначаются ядра Пуассона и Фейера соответственно.

$$P(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)};$$
$$F(t) = \left(\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right)^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Для $y \neq 0$ и функции ϕ, заданной на $\mathbb{R}$, положим $\phi_{(y)}(t) = \frac{1}{y}\phi(\frac{t}{y}),\ t \in \mathbb{R}$. Для точки $x \in \mathbb{R}$ и конечного борелевского заряда μ на $\mathbb{R}$ определим следующие величины

$$B_\mu(x) = \left(|\mu * P| * P\right)(x) + \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\left|\mu * (P_{(2^{-k-1})} - P_{(2^{-k})})\right| * P_{(2^{-k})}\right)(x);$$
$$(\mathrm{Mvar}\,\mu)(x) = \left(|\mu * P| * P\right)(x) + 2\int_0^1 \left(\left|\frac{\partial}{\partial y}(\mu * P_{(y)})\right| * P_{(y)}\right)(x)\,dy.$$

Если $B_\mu(x) < +\infty$, то точку x мы называем *B-точкой (точкой Бургейна)* заряда μ (или функции f, если $d\mu = f\,dx$).

Результаты работ [4], [1] основывались на ином (на первый взгляд) понятии "хорошей" точки x (для данного заряда μ). Мы назовем здесь эти точки B^*-точками заряда μ. Они характеризуются конечностью суммы

$$B^*_\mu(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} (|\mu * X_j|) * P_{|j|}(x), \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned}
&X_j = h_j^\infty * E_{j-1}K_{j-1}, \quad j \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\};\\
&X_0 = h_0^\infty;\\
&E_j(x) = e^{2\pi ijx}, \quad x \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{Z}_+;\\
&K = P * F,\ P_j(t) = 2^j P(2^j t),\ K_j(t) = 2^j K(2^j t), \quad j \in \mathbb{Z}_+, t \in \mathbb{R};\\
&h_j^k = (K_j * K_j) * (K_{j+1} * K_{j+1}) * \cdots * (K_k * K_k); \quad k, j \in \mathbb{Z}_+, k \geq j;\\
&h_j^\infty(x) = \lim_{k\to+\infty} h_j^k(x), \quad x \in \mathbb{R};
\end{aligned}$$

при $j < 0$ полагаем $X_j = \bar{X}_{-j}$. Основной результат главы **1** есть

Теорема 1 (теорема **1.3.1**). *Для произвольного конечного борелевского заряда μ на $\mathbb{R}$*

$$(\mathrm{Mvar}\,\mu)(x) \asymp B_\mu(x) \asymp B^*_\mu(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Мы пишем $f(x) \asymp g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, если для некоторой постоянной $C > 1$ верно $\frac{1}{C} f(x) \leq g(x) \leq C f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Эти оценки позволяют во всех теоремах работ [4], [1] (в их формулировках и доказательствах) заменить труднообозримую сумму $B^*_\mu(x)$ на гораздо более простую сумму $B_\mu(x)$ (или ее интегральный аналог $(\mathrm{Mvar}\,\mu)(x)$). Эта замена будет произведена в главе **2**.

Теорема 1 показывает, что множество B^*-точек заряда μ *совпадает* с его множеством B-точек (в нашем смысле). Таким образом, заменяя B^*-точки на B-точки в теоремах об усиленной сходимости a.e., мы выигрываем в простоте и обозримости формулировок, ничего не теряя в общности результатов.

2.3. **Существование B-точек и оценки вертикальных вариаций через суммы Бургейна. Вторая глава** посвящена, в основном, новому доказательству основных результатов Бургейна об усиленной сходимости a.e. с использованием наших сумм B_μ вместо B^*_μ. Чтобы сформулировать результаты главы **2**, дадим следующее

Определение 1. *Для ядра Φ и конечного заряда μ на $\mathbb{R}$ положим*

$$(\mathrm{Vvar}_\Phi\,\mu)(x) = \mathrm{var}_{y\in(0,1)}\, u^\Phi_\mu(x,y), \quad x\in\mathbb{R},$$

где

$$u^\Phi_\mu(x,y) = (\mu * \Phi_{(y)})(x), \quad x\in\mathbb{R}, y>0;$$

если $d\mu = f\,dx$, то вместо u^Φ_μ мы пишем u^Φ_f.

Величину $(\mathrm{Vvar}_\Phi\,\mu)(x)$ мы называем вертикальной Φ-вариацией заряда μ в точке x.

Семейство ядер $(\Phi_{(y)})_{y>0}$ образует стандартную а.е., порожденную ядром Φ. Ее стремление к δ-функции (в точке x) проявляется в том, что $\lim_{y\downarrow 0} u^\Phi_f(x,y) = f(x)$ (если, например, функция f непрерывна в точке x). *Усиленная* сходимость а.е. $(\Phi_{(y)})_{y>0}$ означает следующее: существование и конечность предела $\lim_{y\downarrow 0} u^\Phi_f(x,y)$ сопровождается конечностью вариации функции двух переменных u^Φ_f вдоль "вертикального" отрезка $\{x\}\times(0,1]$. Как мы увидим, такая усиленная сходимость имеет место гораздо чаще, чем можно предположить; она, как правило имеет место в B-точках функции f.

В параграфе **2.1** главы **2** вводятся обозначения и обсуждается история вопроса.

Пусть символ $\dim A$ обозначает хаусдорфову размерность множества A. Параграф **2.2** посвящен доказательству следующей теоремы:

Теорема 2 (теорема **2.2.1**). *Множество E_μ точек Бургейна меры μ (т.е. неотрицательного заряда) непусто, и, более того,* $\dim(E_\mu \bigcap I) = 1$ *для любого невырожденного промежутка I.*

Схема доказательства теоремы 2 заимствована из работы [1]. Основные изменения связаны с заменой B^*_μ на B_μ.

Полезность сумм B_μ (или интегралов $\mathrm{Mvar}\,\mu$) состоит в том, что они позволяют оценивать вертикальные Φ-вариации зарядов μ сразу для целого класса ядер Φ, т.е. получать неравенства вида

$$(\mathrm{Vvar}_\Phi\,\mu)(x) \le C(\Phi) B_\mu(x), \quad x\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

где $C(\Phi)$ зависит лишь от ядра Φ, но не от μ. Однако, общность таких оценок не беспредельна: они справедливы для ядер Φ, подчиненных некоторым условиям (и могут нарушаться для некоторых Φ, – например, для ядра Стеклова $\Phi = \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$). В параграфе **2.3** главы **2** доказаны две теоремы, описывающие некоторые классы ядер Φ, обладающих свойством (1):

Теорема 3 (теорема **2.3.1**). *Пусть ядро* $\Phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *удовлетворяет следующим условиям:* $\widehat{\Phi} \in C^3(\mathbb{R})$ *и*

$$\int_{\mathbb{R}} \tau^2 |\widehat{\Phi}'|^2(\tau)\, d\tau < \infty;$$
$$\int_{\mathbb{R}} \Big(|\tau\widehat{\Phi}''|(\tau) + \tau^2|\widehat{\Phi}'''|(\tau)\Big)\, d\tau < \infty.$$

Тогда для любого конечного заряда μ *на* $\mathbb{R}$ *верно следующее неравенство*

$$(\mathrm{Vvar}_\Phi\, \mu)(x) \le C B_\mu(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

где $C = C(\Phi) > 0$ *зависит только от* Φ.

Теорема 4 (теорема **2.3.2**). *Пусть ядро* $\Phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *принадлежит классу* $C^2(\mathbb{R})$ *и удовлетворяет следующим условиям*

$$\int_{\mathbb{R}} t^2 \Phi^2(t)\, dt < \infty;$$
$$\int_{\mathbb{R}} \big((1+|t|)|\Phi'(t)| + (1+t^2)|\Phi''(t)|\big)\, dt < \infty.$$

Тогда для любого конечного заряда μ *на* $\mathbb{R}$ *верно следующее неравенство*

$$(\mathrm{Vvar}_\Phi\, \mu)(x) \le C B_\mu(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

где $C = C(\Phi) > 0$ *зависит только от* Φ.

Условия гладкости, налагаемые в теоремах 3 и 4 на Φ (соответственно на $\widehat{\Phi}$) можно ослабить, понимая производную Φ'' (соответственно $\widehat{\Phi}'''$) в обобщенном смысле — ср. с леммой **6.1.2**.

Достаточные условия "допустимости" ядра Φ (т.е. выполнение оценки (1)) в теоремах 3 и 4 носят различный характер: в теореме 4 условия убывания на бесконечности и условия гладкости налагаются непосредственно на ядро Φ, тогда как в теореме 3 достаточные условия формулируются в спектральных терминах (т.е. в терминах относящихся к $\widehat{\Phi}$). Теорема 4 принадлежит Бургейну [1], и новый элемент состоит лишь в замене B^*-сумм на B-суммы (и в доказательстве, и в неравенстве (1)). Следует отметить, что ядро $G(t) = \frac{4}{3}(\frac{\sin \pi t}{\pi t})^3$ (функция $\frac{3}{4}\widehat{G}$ тоже является ядром) удовлетворяет условиям теоремы 3, но не теоремы 4, а $\frac{3}{4}\widehat{G}$, в свою очередь, удовлетворяет условиям теоремы 4, но не 3 (условия теорем предполагаются ослабленными в вышеуказанном смысле). Заметим, что переход к $\widehat{\Phi}$ (вместо Φ) в связи со свойством (1) в каком-то смысле естественен и удобен: в главе **4** будет описан класс "плохих" ядер Φ, для которых (1) (и даже конечность $\mathrm{Vvar}_\Phi\, \mu$) может нарушаться *всюду* на $\mathbb{R}$, причем эти "плохие" ядра удобно и просто характеризуются именно в *спектральных* терминах.

2.4. **Оценки B-сумм и описание B-точек в некоторых конкретных случаях. В третьей главе** мы обращаемся к задачам идентификации B-точек функции f в некоторых конкретных ситуациях (в терминах регулярности функции f вблизи x). Кроме того, будет рассмотрена связь B-точек функции f с B-точками ее преобразования Гильберта $\tilde{f}$; B-точки характеристических функций множеств канторовского типа; явление вида усиленной сходимости для некоторой "нестандартной" а.е.; наконец, полная характеризация B-точек в терминах теории всплесков. Этим результатам главы **3** мы предпосылаем в п. **3.2** техническую подготовку. Ее цель — найти сравнимые с суммами B_f суммы, в которых сверточные множители $P_{(2^{-j})} - P_{(2^{-j-1})}$ заменены на другие функции ϕ_j, более удобные для предстоящих оценок. Приведем для примера одну из сумм такого рода (мы обозначаем ее через $B_{\mu,\phi}$, имея в виду последовательность $\phi = \{\phi_j\}$ упомянутых сверточных множителей).

Теорема 5 (следствие **3.2.3**). *Пусть задана последовательность положительных чисел $\varepsilon_j, j \in \mathbb{Z}_+$, таких что*

$$\varepsilon_j \in [A \cdot 2^{-j}, 2^{-j}], \quad 0 < A < 1;$$

Пусть функция ϕ, заданная на $\mathbb{R}$, удовлетворяет следующим условиям

$$
\begin{aligned}
&|\phi(t)| \le CP(t), \quad t \in \mathbb{R};\\
&\widehat{\phi} \in C^2(\mathbb{R});\\
&\widehat{\phi}(0) = 0;\\
&\int_{\mathbb{R}} \left(|\widehat{\phi}(\tau)| + |\tau\widehat{\phi}'(\tau)| + |\tau^2\widehat{\phi}''(\tau)|\right) d\tau \le +\infty;\\
&|\widehat{\phi}|(\tau) \ge C, \quad |\tau| \in \left[\frac{A}{4}, \frac{3}{4}\right].
\end{aligned}
$$

Определим функции $\phi_j, j \in \mathbb{Z}$, следующим образом

$$\phi_j(t) = \frac{1}{\varepsilon_{|j|}}\phi\left(\frac{t}{\varepsilon_{|j|}}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Положим

$$B_{\mu,\phi} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\mu * \phi_j| * P_{|j|}.$$

Тогда для любого конечного заряда μ на $\mathbb{R}$ верна оценка

$$\frac{1}{C}\left(B_{\mu,\phi} + |\mu * P| * P\right) \le B_\mu \le C\left(B_{\mu,\phi} + |\mu * P| * P\right),$$

где $C = C(A, \Phi) > 1$ — некоторая константа.

Подобные утверждения используются в доказательствах главы **3** — в параграфе **3.3**; в параграфе **3.4** при изучении B-точек множеств канторовского типа; в параграфе **3.5**.

Условие $B_\mu(x) < +\infty$ носит локальный характер (если заряд μ исчезает вблизи точки x, то оно выполнено). Естественно возникает вопрос об условиях регулярности функции f вблизи точки x, обеспечивающих конечность суммы $B_f(x)$. Некоторый ответ на этот вопрос дает

Теорема 6 (теорема **3.3.1**). *Пусть функция $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ удовлетворяет одному из следующих условий*

(a) *f удовлетворяет условию Дини в точке $x \in \mathbb{R}$, т.е.*

$$\int_0^1 \frac{\omega_f(x,\delta)\,d\delta}{\delta} < +\infty,$$

где

$$\omega_f(x,\delta) = \operatorname{ess\,sup}_{|t-x|\le\delta, |x-u|\le\delta} |f(u) - f(t)|;$$

(b) *f совпадает с функцией g класса Винера в окрестности $\Omega(x)$ точки $x \in \mathbb{R}$, т.е.*

$$f|_{\Omega(x)} = g|_{\Omega(x)},\ \hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$$

Тогда

$$B_f(x) < +\infty.$$

Опираясь на описанную выше техническую подготовку, мы в п. **3.3** главы **3** обращаемся к B-точкам преобразования Гильберта $\tilde{f}$ функции $f \in L^2(\mathbb{R}) \bigcap L^\infty(\mathbb{R})$ и устанавливаем следующий факт

Теорема 7 (предложение **3.3.1**). *Пусть $f \in L^2(\mathbb{R}) \bigcap L^\infty(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$B_{\tilde{f}}(x) \le C B_f(x),$$

где

$$\tilde{f}(x) = p.v. \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)\,dt}{x-t}, \quad x \in \mathbb{R},$$

есть преобразование Гильберта функции f, а $C > 0$ — абсолютная постоянная.

Из этого факта следует уже упоминавшаяся теорема Бургейна о функциях класса $H^\infty(\mathbb{R})$ (т.е. о граничных значениях функций класса $H^\infty(\mathbb{C}_+)$, аналитических и ограниченных в $\mathbb{C}_+$). А именно, из теоремы 7 следует

Теорема 8 (теорема **3.3.2**). *Множество E_f точек Бургейна функции $f \in H^\infty(\mathbb{R})$ непусто, и, более того, $\dim(E_f \bigcap I) = 1$ для любого невырожденного промежутка I.*

Заметим, что для $f \in H^\infty(\mathbb{R})$ и $x \in E_f$ функция $y \mapsto \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)\,dt}{t-(x+iy)}$ имеет конечную вариацию на промежутке $(0,1]$.

Следующий результат главы **3** показывает, что феномен усиленной сходимости в B-точках ограниченных функций наблюдается и для некоторых "нестандартных" а.е. Для примера мы выбрали а.е. Валле-Пуссена

$$V_n(x) = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\pi}\cos^{2n}(x/2)\chi_{[-\pi,\pi]}(x), \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

(роль параметра y переходит теперь к $n = 1, 2, \dots$).

Теорема 9 (теорема **3.3.3**). *Для произвольного конечного заряда μ верно*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mu * (V_{2^j} - V_{2^{j-1}})|(x) \le C(B_\mu + \|\mu\|_1)(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

где C — абсолютная положительная постоянная.

В параграфе **3.4** описываются точки Бургейна характеристической функции множества канторовского типа.

Пусть $Q \in (0,1)$, S — промежуток, а QS — концентрический промежуток длины $Q|S|$, $F_Q(S) = \operatorname{cl} S \setminus QS$. Оператор F_Q применим к любому дизъюнктному объединению сегментов (компактных промежутков) $S = \bigvee_{l=1}^{N} S_l$: $F_Q(S) = \bigvee_{l=1}^{N} F_Q(S_l)$. Пусть $q = \{q_j\}_{j=0}^{\infty}$ — такая последовательность чисел, что

$$0 < q_j < 1; \sum_{j=0}^{+\infty} q_j < +\infty,$$

(это условие равносильно положительности длины множества E). Положим $E_0 = [0,1]$, $E_{k+1} = F_{q_k}(E_k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Множество $E(= E(q)) = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ — совершенно, $|E| > 0$. Каждой точке x_0 множества $E = E(q)$ можно поставить во взаимно-однозначное соответствие бесконечную последовательность $\kappa(x_0) = \{\kappa_i\}_{i=1}^{\infty}$, состоящую из нулей и единиц, и определяемую следующим образом: $x_0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} J_i(x_0)$, где $J_i(x_0)$ — один из сегментов, составляющих множество E_i; при этом $J_i(x_0)$ — один из двух сегментов (правый или левый), получающихся после применения оператора $F_{q_{i-1}}$ к сегменту $J_{i-1}(x_0)$. Если $J_i(x_0)$ — правый сегмент, то полагаем $\kappa_i = 1$, если левый, то $\kappa_i = 0$. Положим также $\delta_k = 1 - \frac{2|J_{k+1}(x_0)|}{|J_k(x_0)|}$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Определим числа n_k как номера тех элементов последовательности $\kappa(x_0)$, на которых происходит обрыв идущих подряд одинаковых чисел κ_j (т.е. $\kappa_j =$

$\kappa_{j+1}, j = n_k + 1, \ldots, n_{k+1}$, и $\kappa_{n_k} \neq \kappa_{n_k+1}$, $k \in \mathbb{N}$; если $\kappa_j = \kappa_{j+1}$ для всех $j \geq n_k$, то мы полагаем $n_{k+1} = n_{k+2} = \cdots = +\infty$).

Теорема 10 (теорема **3.4.1**). *Точка $x_0 \in E(q)$ есть B-точка множества $E(q)$ (т.е. функции $\chi_{E(q)}$) в точности тогда, когда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{n_{k+1}} \delta_{n_k} < \infty.$$

При этом x_0 — точка плотности множества E тогда и только тогда, когда $2^{n_{k+1}} \delta_{n_k} \to 0$ при $k \to \infty$.

Отметим характерные случаи расположения точки x_0 в множестве E.

(1) Точка $x_0 \in E$ является правым (или левым) концом некоторого сегмента J_j — это означает, что последовательность $\{\kappa_i\}$, начиная с номера j, состоит только из единиц (или, соответственно, нулей). Тогда, очевидно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{n_{k+1}} \delta_{n_k} = \infty,$$

и точка x_0 не будет являться точкой Бургейна функции χ_E (она не будет являться и точкой плотности множества E).

(2) Последовательность $\{\kappa_i\}$, определяющая точку x_0, имеет следующий вид — $\kappa_{i+1} = 1 - \kappa_i$, $i \in \mathbb{N}$. Это означает, что точка x_0 "глубоко погружена" в множество E, при этом $n_{k+1} = n_k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, и мы имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{n_{k+1}} \delta_{n_k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{n_k+1} \delta_{n_k} \leq C \sum_{k=1}^{\infty} q_k < \infty.$$

Таким образом, можно утверждать, что точки Бургейна множества E находятся "глубоко внутри" E, в частности глубже точек плотности.

Параграф **3.5** посвящен описанию точек Бургейна на языке теории всплесков; мы придерживаемся терминологии, принятой в [2], [3].

Теорема 11 (теорема **3.5.2**). *Пусть задана функция* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *и точка* $x \in \mathbb{R}$*, пусть также* ψ *— некоторая вещественная всплеск-функция, удовлетворяющая следующим условиям*

$$\psi \in L^2(\mathbb{R});$$

$$\hat{\psi} \in C^3(\mathbb{R}),\ \left|\int_{2^{-j-1}|\tau|}^{2^{-j}|\tau|} \frac{\hat{\psi}(u)\,du}{u}\right| > C > 0, \quad |\tau| \in \left[\frac{1}{4}2^j, \frac{3}{4}2^j\right],\ j \in \mathbb{Z}_+;$$

$$\int_{\mathbb{R}} \left(|\tau||\hat{\psi}|(\tau) + |\tau|^2|\hat{\psi}'|(\tau) + |\tau|^3|\hat{\psi}''|(\tau)\right) d\tau < \infty.$$

Тогда x *является точкой Бургейна функции* f *в том и только том случае, когда*

$$\int_{-1}^{1}\int_{\mathbb{R}} |(Tf)(a,b)|\, P_{(|a|)}(b-x)\, db \frac{da}{|a|^{\frac{3}{2}}} < \infty.$$

где

$$Tf(a,b) = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(t)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt; \quad a \neq 0, b \in \mathbb{R}.$$

есть всплеск-преобразование функции f.

Теорема 12 (теорема **3.5.3**). *Пусть* ψ *— функция, порождающая ортонормированный базис всплесков и удовлетворяющая следующим условиям*

$$\psi \in L^2(\mathbb{R});$$

$$\widehat{\psi} \in C^3(\mathbb{R}),\ \widehat{\psi}'(0) = 0;\ |\widehat{\psi}|(\tau) \geq C > 0, \quad |\tau| \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right];$$

$$\int_{\mathbb{R}} \left(|\tau^2\widehat{\psi}(\tau)| + |\tau^2\widehat{\psi}'(\tau)| + |\tau^3\widehat{\psi}''(\tau)|\right) d\tau < \infty.$$

Тогда для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ *точка* $x \in \mathbb{R}$ *является точкой Бургейна функции* f *в том и только том случае, когда*

$$\sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{\frac{j}{2}}\, |\langle f, \psi_{j,k}\rangle| \cdot \lambda_{j,k}(x) < \infty,$$

где $\lambda_{j,k} = 2^{-|j|}P_j(x - k\cdot 2^{-|j|})$, $j,k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$, *а* $\langle f, \psi_{j,k}\rangle$ *— коэффициенты всплеск-разложения функции* f.

Эти теоремы вполне согласуются с известными результатами о поведении всплеск-преобразования (коэффициентов всплеск-разложения) в точке регулярности функции f, см. [2], [6]; в частности отсюда легко выводится (еще раз) пункт **1** теоремы 6.

2.5. **Некоторые результаты отрицательного характера.** В **четвертой главе** по заданному ядру Φ строится непрерывная функция, вертикальная Φ-вариация которой бесконечна п.в. на $\mathbb{R}$. Тем самым доказывается обобщение теоремы Рудина (см. [10]).

В параграфе **4.1** вводятся обозначения, используемые в главе **4** и дается краткая характеристика полученных результатов. Множество всех непрерывных 1-периодических функций f мы обозначаем символом $C_1(\mathbb{R})$; буквой U мы будем обозначать класс всех вещественных функций из $C_1(\mathbb{R})$, ряд Фурье которых сходится равномерно на $\mathbb{R}$.
Параграфы **4.2-4.4** посвящены доказательству следующей теоремы:

Теорема 13 (теорема **4.1.1**). *Пусть Φ - непрерывно дифференцируемое ядро. Предположим также, что Φ удовлетворяет следующему условию*

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-2,2]} |\tau\Phi'(\tau)| \log|\tau| d\tau < \infty.$$

Тогда найдется такая функция $f \in U$, что

$$(\operatorname{Vvar}_\Phi f)(x) = \infty$$

для почти всех $x \in \mathbb{R}$.

Отметим, что для функций f класса Винера $\operatorname{Vvar}_\Phi f$ конечна в каждой точке $x \in \mathbb{R}$.

В параграфе **4.5** главы **4** выводятся условия, налагаемые на ядро Φ, необходимые для существования такой функции f, что $(\operatorname{Vvar}_\Phi f)(x) < \infty$ хотя бы для одной точки $x \in \mathbb{R}$.

Теорема 14 (теорема **4.5.1**). *Пусть ядро Φ таково, что*

$$\operatorname{var}_{\mathbb{R}} \widehat{\Phi} = \infty.$$

Тогда существует функция f из $C_1(\mathbb{R})\bigcap H^\infty(\mathbb{R})$ (а также вещественная функция f из $C(\mathbb{R})$) , такая что

$$(\operatorname{Vvar}_\Phi f)(t)=\infty \text{ для всех } t\in\mathbb{R}.$$

2.6. **Некоторые многомерные обобщения. Пятая глава** посвящена распространению результатов главы **2** на $\mathbb{R}^n,\ n>1$, тем самым получено обобщение результатов [9]. Следующие теоремы являются многомерными аналогами теорем **2.2.1** и **2.3.1** главы **2**. Пусть функция ϕ, заданная на $\mathbb{R}$ такова, что радиальная функция $\Phi : x\mapsto\phi(|x|),\ x\in\mathbb{R}^n$ — ядро в $\mathbb{R}^n$ (т.е. $\int_{\mathbb{R}^n}\Phi=1$). Напомним, что Фурье-образ $\widehat{\Phi}$ радиальной функции Φ — снова радиальная функция; мы не будем отличать ее от функции $r\mapsto\widehat{\Phi}(r,0,\dots,0):=\widehat{\phi}(r),\ r\in[0,+\infty)$.

Теорема 15 (теорема **5.1.2**). *Пусть преобразование Фурье $\widehat{\phi}$ функции ϕ таково, что функция $r\mapsto\widehat{\phi}(|r|)$ лежит в классе $C^{2[\frac{n}{2}]+3}(\mathbb{R})$, и функции $r\mapsto r^k\widehat{\phi}^{(k+1)}(r),\ 0\le k\le 2[\frac{n}{2}]+2$, и $r^{[n/2]}\widehat{\phi}'(r)$ суммируемы в $\mathbb{R}_+$ Если x — B-точка заряда μ, то*

$$(\operatorname{Vvar}_\Phi\mu)(x)\le C(\Phi)B_\mu(x),\quad C(\Phi)>0.$$

Теорема 16 (теорема **5.1.3**). *Метрическая размерность множества E_μ B-точек заряда μ в любом невырожденном шаре равна n.*

2.7. **Вспомогательные утверждения технического характера.** В шестой главе содержатся вспомогательные утверждения технического характера, используемые в предыдущих главах.

Список литературы

[1] Бургейн Ж. Ограниченность вариации свёрток мер. Матем. заметки, 1993, т. 54, 4, с. 25-34.

[2] Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Москва-Ижевск: РХД, 2004.

[3] Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков. Москва: Физматлит, 2005.

[4] Bourgain J. On the radial variation of bounded analytic functions on the disc. Duke Math. J., 1993, v. 69, 3, pp. 671-682.

[5] Girela D., del Mar Rodriguez M. Sharp estimates of the radial growth of the derivative of bounded analytical functions. Complex Var. Theory and Appl., 1996, v. 28, 3, pp. 271-283.

[6] Holschneider M., Tchamitchian Ph. Pointwise analysis of Riemann's "nondifferentiable" function. Inventiones Mathematicae, 1991, v. 105, 1, pp. 159-175.

[7] Jones P. A complete bounded submanifold of $\mathbb{C}^3$. Proc. Amer. Math. Soc., 1979, v. 76, pp. 305-306.

[8] Jones P.W., Müller P.F.X. Radial variation of Bloch functions. Math. Res. Lett., 1997, 4, pp. 395-400.

[9] O'Neill M.D. Vertical variation of harmonic functions in upper half spaces. Colloq. Math., 2001, v. 87, pp. 1-12.

[10] Rudin W. The radial variation of analytic functions. Duke Math. J., 1955, v. 22, pp. 235-242.

Публикации автора по теме диссертации

[M1] Мозоляко П.А. Замечания к определению точек Бургейна. Зап. науч. семин. ПОМИ, 2008, т. 355, с. 219-236.

[M2] Мозоляко П.А. Усиленная сходимость аппроксимативных единиц и точки Бургейна ограниченных функций. Доклады РАН, 2008. т. 422, 6, с. 738-740.