На правах рукописи

СИЛЬВАНОВИЧ ОЛЬГА ВАСИЛЬЕВНА

АППРОКСИМАЦИЯ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ НА ПОДМНОЖЕСТВАХ ПОЛУОСИ

01.01.01 — математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико–математических наук

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2009

Работа выполнена на кафедре математического анализа государственного образовательного учреждения "Российский Государственный Педагогический Университет им. А. И. Герцена"

Научный руководитель	—	доктор физико-математических наук, профессор Широков Н.А.
Официальные оппоненты	—	доктор физико-математических наук, профессор Коточигов А.М.
	—	кандидат физико-математических наук, доцент Васин А.В.
Ведущая организация	—	Брянский Государственный Университет имени академика И. Г. Петровского

Защита состоится "____"________ 2009 года в ____ час. на заседании Диссертационного Совета Д 002.202.01 в Санкт-Петербургском отделении Математического Института им.В. А. Стеклова Российской Академии наук по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб.р.Фонтанки, д. 27, ауд. 311

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ПОМИ РАН

Автореферат разослан "____"________ 2009 года.

Учёный секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических
наук Зайцев А.Ю.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Несмотря на то, что аппроксимация целыми функциями составляет сейчас большую ветвь комплексного анализа, некоторые вполне естественные вопросы остаются пока без ответов. Применительно к поставленной проблеме приближения эти вопросы формулируются следующим образом:

- Каким условиям должна удовлетворять комплекснозначная функция для того, чтобы некоторая сколь угодно хорошая весовая аппроксимация на некотором подмножестве $\mathbb{R}^+$ целыми фукнциями из определённого класса была возможна.
- Каким должен быть класс приближающих функций.
- Каким образом строить функции, осуществляющие указанное весовое приближение рассматриваемых функций на заданном подмножестве $\mathbb{R}^+$.
- Возможно ли получить конструктивную характеристику функций из рассматриваемого класса непрерывных функций.

Ранее ответы на аналогичные вопросы для случая всей полуоси были получены в работе Т.С.Давыдовой и Н.А. Широкова (Т.С. Давыдова, Н.А. Широков, *Приближение функций из класса Гёльдера на полуоси,* Записки научных семинаров ПОМИ 262 (1999), 127-137). А именно, там была решена задача о весовом приближении функций класса Гёльдера на всей полуоси целыми функциями порядка $\frac{1}{2}$ из специально подобранного класса. При этом удалось доказать прямую и соответствующую обратную теоремы приближения, что позволило говорить о конструктивном описании рассматриваемого класса непрерывных функций. Изменение области приближения привело к постановке сформулированных выше вопросов, появилась новая проблема конструктивного описания некоторого класса непрерывных функций, а также оценки скорости их весовых приближений. Таким образом, тема диссертации актуальна.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования в диссертации являются функции из обощённых классов Гёльдера на подмножествах положительной полуоси и целые функции порядка $\frac{1}{2}$ из специального класса.

Цель работы состоит в формулировании и доказательстве соответствующих прямой и обратной теорем приближения целыми функциями, что даёт возможность говорить о получении конструктивного описания класса гладкости функции из классов типа Гёльдера при помощи скорости весового приближения.

Методы исследования. При построении масштаба приближения используются оценки функции Грина в различных вариантах; используются методы построения приближающих функций, развивающие ранее применённые при исследовании приближений на полуоси, а также используемые при исследовании аппроксимации на несвязных множествах; при доказательстве обратной теоремы применяется новая форма неравенства типа неравенства С. Н. Бернштейна для производных целых функций.

Научная новизна заключается в возможности получения конструктивной характеристики класса непрерывных гладких функций на новых типах подмножеств полуоси. Все полученные результаты являются новыми.

Теоретическая значимость. В диссертации конструктивно описаны классы функций в ситуациях, требующих соединения соображений, относящихся к приближениям полиномами на областях комплексной плоскости и соображений, относящихся к приближениям целыми функциями.

Практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Её методы могут быть использованы в аналогичных задачах теории приближений.

Достоверность результатов. Все основные результаты диссертации являются достоверными научными фактами, получившими в диссертации строгие доказательства.

Личный вклад соискателя. Диссертация является самостоятельным научным исследованием. Доказательства всех основных положений получены соискателем. В совместной работе научному руководителю принадлежит постановка задач и намеченная методика их решения.

Научные положения, выносимые на защиту.

1. В диссертации для определённых подмножеств положительной полуоси построена функция, оценки которой оказываются удобным масштабом для изучения приближения целыми функциями.

2. Для функций из классов, аналогичных классам Гёльдера на подмножествах положительной полуоси доказана возможность их сколь угодно хорошей весовой аппроксимации, измеряемой определённым в диссертации образом, с помощью целых функций порядка $\frac{1}{2}$ из некоторого конкретного класса.

3. Доказана теорема о гладкости функции, приближаемой указанным в диссертации образом.

4. Согласованность прямого и обратного аппроксимационного утверждения дают конструктивное описание обобщённых классов

Гёльдера на подмножествах положительной полуоси.

Апробация работы. Основные результаты диссертации были доложены на IV-й Петрозаводской международной конференции по комплексному анализу (июль 2008 года), а также на Герценовских чтениях в докладе "Обратная теорема для приближения целыми функциями на подмножествах полуоси,"которые проходили 17 апреля 2008 года в РГПУ им. А. И. Герцена.

Публикации. По теме диссертации опубликованы 3 работы, указанные в конце автореферата.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав и списка литературы, изложена на 71 стр. Список литературы включает 21 название.

Содержание диссертации

Введение содержит краткий экскурс в историю расматриваемой в диссертации проблемы, описание основных результатов диссертации.

Первая глава "Вспомогательные функции,"состоящая из четырёх параграфов, содержит все необходимые для раскрытия темы диссертации материалы. **В первом параграфе** вводится множество приближения E - это подмножество положительной полуоси $\mathbb{R}^+ = [0;\infty)$, состоящее из конечного числа дизъюнктных отрезков $I_1 = [0, b_1], \ldots, I_k = [a_k, b_k]$ и луча $I_{k+1} = [a_{k+1}, \infty)$, где

$$0 = a_1 < b_1 < \ldots < b_k < a_{k+1}, \quad k \geqslant 1.$$

На основе множества E специальным образом строится семейство континуумов K:

$$K = K(s_1, ..., s_{2k}) = E \cup \cup_{\mu=1}^{2k}[s_\mu, t_\mu] \cup_{\mu=1}^{k} [t_{2\mu-1}, t_{2\mu}],$$

где I_{1j} - три равные части отрезка I_1; каждый отрезок $I_\nu,\ 2 \leqslant \nu \leqslant k,$ разделен на пять равных отрезков, которые перенумерованы так, что при $j_1 < j_2$ отрезок $I_{\nu j_1}$ лежит левее отрезка $I_{\nu j_2}$; отрезок $[a_{k+1}+1; a_{k+1}+2]$ обозначен через $I_{k+1,4}$; точки $s_1 \in I_{12},\ s_{2(\nu-1)} \in I_{\nu 2},\ s_{2(\nu-1)+1} \in I_{\nu 4},\ 2 \leqslant \nu \leqslant k, s_{2k} \in I_{k+1,4}$ выбраны произвольно; $t_\mu = s_\mu - i.$

Далее описываются функции, для которых будет осуществляться приближение - они принадлежат пространству комплекснозначных функций $H^r_\omega(E)$ и удовлетворяют следующим условиям:

$$|f^{(r)}(x) - f^{(r)}(y)| \leqslant c_f \omega(|x-y|), \quad x, y \in E,$$

$$\|f\|_{r,\omega} = |f(0)| + \sum_{\nu=1}^{r} |f^{(\nu)}(0)| + \sup_{x,y\in E \ x\neq y} \frac{|f^{(r)}(x) - f^{(r)}(y)|}{\omega(|x-y|)}.$$

В качестве приближающих на множестве E агрегатов вводится класс $C^{(r,\omega)}_\sigma$ целых функций порядка $\frac{1}{2}$ и переменного типа $\sigma > 0$, с нормой, задаваемой равенством:

$$\|F_\sigma\|_{C^{(r,\omega)}_\sigma} = \sup_{z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^+} \frac{|F_\sigma(z)| \cdot e^{-\sigma|Im\sqrt{z}|}}{1 + |z|^r\omega(|z|) + \sigma^{-2r}\omega(\sigma^{-2})}.$$

Второй параграф посвящён введению специальной функции $\rho_h(z)$, с помощью которой подучается необходимое для оценки получаемых приближений масштабирование. Для этого сначала доказывается следующая Лемма :

Лемма 1. *Существует единственная гармоническая в $\mathbb{C} \setminus E$ функция, удовлетворяющая условиям:*

$$\varphi_E(z) > 0,\ \varphi_E(z) \to 0, \quad \text{если} \quad z \to z_0 \in E,$$

$$\varphi_E(z) \leqslant c_1 \left(1 + |z|^{\frac{1}{2}}\right) \text{ и } \varphi_E(x)|x|^{-\frac{1}{2}} \to 1 \text{ при } x \to -\infty.$$

После чего вводится масштабирующая функция :

$$\rho_h(z) = dist(z, L_h), \quad z \in \mathbb{C},$$

где

$$L_h = \{z \in \mathbb{C} \setminus E : \varphi_E(z) = h\}, \quad h > 0.$$

Так как при доказательстве прямой теоремы приближения, содержащейся во второй главе, сначала все оценки производятся на континууме K, а затем переносятся на множество E, во втором параграфе также доказывается Лемма 2, аналогичная Лемме 1.

Лемма 2. *Существует единственная гармоническая в* $\mathbb{C} \setminus K$ *функция* $\varphi_K(z)$ *со следующими свойствами:*

$$\varphi_K(z) > 0, \ \varphi_K(z) \to 0 \ \text{ при } \quad z \to z_0, z_0 \in K,$$

$$\frac{\varphi_K(-x)}{x^{\frac{1}{2}}} \to 1 \ \text{ при } \quad x \to +\infty,$$

где K - любой из семейства построенных ранее континуумов, содержащих множество E.

В третьем параграфе формулируется и доказывается ряд технических Лемм, необходимых для проведения оценок построенного приближения при доказательстве обратной теоремы приближения, содержащейся в Главе 3:

Лемма 3. *Пусть*

$$E' = \bigcup_{\nu=1}^{k+1} \{a_\nu\} \bigcup \bigcup_{\nu=1}^{k} \{b_\nu\},$$

$$L_h = \{z \in \mathbb{C} \setminus E : \varphi_E(z) = h\}, h > 0,$$
$$\Delta(z) = dist(z, E'),$$
$$\rho_h(z) = dist(z, L_h),$$

тогда при всех $z \in E$

$$\rho_h(z) \asymp h\sqrt{\Delta(z) + h^2}.$$

Лемма 4. *Пусть $V(z)$ -фукнция, гармоническая в $\mathbb{C}\setminus E$ и удовлетворяющая условиям*

$$V(z)\to\log\left(\left(h\sqrt{\Delta(x)+h^2}\right)^r\omega\left(h\sqrt{\Delta(x)+h^2}\right)\right),$$

при $z\to x\in E,\ h>0;$

$$V(z)=O(\log(|z|+1)),\ \textit{при}\ z\to\infty$$

Тогда существуют постоянные $c_1^*>0$ и $c_2^*>0$, не зависящие от z и h такие, что при $z\in\mathbb{C}\setminus E$ справедливо соотношение

$$\log\left(\left(h\sqrt{\Delta(z)+h^2}\right)^r\omega\left(h\sqrt{\Delta(z)+h^2}\right)\right)-c_1^*\leqslant V(z)\leqslant$$

$$\leqslant\log\left(\left(h\sqrt{\Delta(z)+h^2}\right)^r\omega\left(h\sqrt{\Delta(z)+h^2}\right)\right)+c_2^*$$

Четвёртый параграф является последним в первой главе и содержит только одну Лемму, которая является основной при построении приближающей фукнции в прямой теореме приближения (см. Главу 2). А именно, в ней рассматривается возможность осуществления так называемого псевдоаналитического продолжения функции по Е.М. Дынькину.

Лемма 7. *Пусть $f\in H^r_\omega(E)$ и точки $s_1,...,s_{2k}$ выбраны из соотвествующих промежутков. Тогда существует продолжение $f_0(z,s_1,...,s_{2k})$ функции f на всю плоскость $\mathbb{C}$ (так называемое псевдоаналитическое продолжение по Е.М.Дынькину) такое, что выполнены соотношения*

$$f_0\in C(\mathbb{C})\cap C^1(\mathbb{C}\setminus K(s_1,...,s_{2k})),$$

$$f_0\equiv 0\ \ \textit{вне}\ Q,\quad f_0|_E=f,$$

$$\|f_0|_{K(s_1,...,s_{2k})}\|_{H^r_\omega(K)}\leqslant c_3\|f\|_{H^r_\omega(E)},$$

$$\left|\frac{\partial f_0(z,s_1,...s_{2k})}{\partial\bar z}\right|\leqslant c_4\delta^{r-1}(z)\omega(\delta(z)),\ z\in\mathbb{C}\setminus K(s_1,...,s_{2k}),$$

где

$$\delta(z) = \delta(z, s_1, ..., s_{2k}) = dist(z, K(s_1, ..., s_{2k})),$$

постоянные c_3, c_4 *не зависят от* $s_1, ..., s_{2k}$ *и* z,

$$Q = \{z = x + iy : x \geqslant -1, y \leqslant 2(x+1)\}.$$

Глава вторая "Прямая теорема приближения"содержит формулировку и доказательство прямой теоремы приближения - теоремы о возможной скорости аппроксимации на рассматриваемом множестве E гладких функций целыми функциями порядка 1/2 из класса $C_\sigma^{(r,\omega)}$, определённого ранее в Главе 1:

Теорема. *Пусть* $f \in H_\omega^r(E)$. *Тогда для любого* $\sigma > 0$ *найдется целая функция* $F_\sigma \in C_\sigma^{(r,\omega)}$ *такая, что*

$$\|F_\sigma\|_{C_\sigma^{(r,\omega)}} \leqslant c_1 \|f\|_{r,\omega}$$

и

$$|f(x) - F_\sigma(x)| \leqslant c_2 \|f\|_{r,\omega} \rho^r_{\frac{1}{\sigma}}(x) \omega\left(\rho_{\frac{1}{\sigma}}(x)\right), \quad x \in E,$$

где постоянные $c_1,\ c_2 > 0$ *зависят только от* $r,\ \omega$ *и* E.

Третья глава "Обратная теорема приближения"посвящена так называемой обратной теореме, которая согласуется с приведённой в Главе 2 прямой теоремой . Речь идёт о том, что если непрерывная на множестве функция может быть приближена в определённой шкале при помощи некоторого запаса приближающих функций с данной скоростью, то она имеет вполне определённую гладкость. Если известно и о возможности приближения функций обсуждаемой гладкости с требуемой скоростью, то получается конструктивное описание класса гладкости при помощи скорости приближения.

Теорема. *Пусть пространство целых функций* $C_\sigma^{(r,\omega)}$ *с* *нормой*

$$\|F_\sigma\|_{C_\sigma^{(r,\omega)}} = \sup_{z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^+} \frac{|F_\sigma(z)|\cdot e^{-\sigma|Im\sqrt{z}|}}{1+|z|^r\omega(|z|)+\sigma^{-2r}\omega(\sigma^{-2})},$$

где $\omega(x)$ *удовлетворяет условию*

$$\int\limits_0^y \frac{\omega(x)}{x}dx + y\int\limits_y^\infty \frac{\omega(x)}{x^2}dx \leqslant c_0\omega(y), \quad y>0,$$

шкала функций $\rho_h(z)$ *определена с помощью*

$$L_h = \{z\in\mathbb{C}\setminus E : \varphi_E(z)=h\}, \quad h>0,$$

$$\rho_h(z) = dist(z, L_h), \quad z\in\mathbb{C}.$$

Пусть $f \in C(E)$ *и предположим, что существуют постоянные* c_4 *и* c_5*, такие, что для всякого* $\sigma > 0$ *найдётся функция* $F_\sigma \in C_\sigma^{(r,\omega)}$*, такая, что*

$$\|F_\sigma\|_{C_\sigma^{(r,\omega)}} \leqslant c_4$$

и

$$|f(x)-F_\sigma(x)| \leqslant c_5\rho^r_{\frac{1}{\sigma}}(x)\omega\left(\rho_{\frac{1}{\sigma}}(x)\right), \quad x\in E,\ r\geqslant 0.$$

Тогда

$$f\in H^r_\omega(E) \text{ и } \|f\|_{r,\omega} \leqslant c_6, \quad c_6 = c_6(c_4, c_5, E, r).$$

Публикации по теме диссертации

1. О.В.Сильванович, Н.А.Широков, *Приближение целыми функциями на подмножествах полуоси,* Записки научных семинаров ПОМИ 337(2006),233-237.

2. О.В.Сильванович, Н.А.Широков, *Скорость приближения и гладкость функций,* Вестник Санкт-Петербургского университета, Серия 1. Математика, механика, астрономия, 2008,Вып.4, 39-45.

3. О.В.Сильванович, Н.А.Широков, *Гладкость функции и скорость приближения,* Тезисы докладов IV Петрозаводской международной конференции по комплексному анализу, Петрозаводск, 29 июня-5 июля 2008, 36-37.