На правах рукописи

Филимоненкова Надежда Викторовна

Качественное исследование слабых решений m–гессиановских уравнений

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2010

Работа выполнена на кафедре математики
ГОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет.

Научный руководитель	доктор физико-математических наук, профессор **Ивочкина Нина Михайловна**
Официальные оппоненты	доктор физико-математических наук, профессор **Назаров Александр Ильич**
	доктор физико-математических наук, профессор **Шишков Андрей Евгеньевич**
Ведущая организация	Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет (ЛЭТИ)

Защита состоится «__» ________ 2010 года в ____ч. на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В.А.Стеклова РАН по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А.Стеклова РАН.

Автореферат разослан «__» ________ 2010 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета, доктор
физико-математических наук А. Ю. Зайцев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В 80-е годы прошлого века в работах Н.М.Ивочкиной[1], Л.Каффарелли, Л.Ниренберга, Д.Спрука[2], Н.В.Крылова[3], Л.Эванса[4] были заложены основы современной теории полностью нелинейных уравнений второго порядка в частных производных: $F(u_{xx}, u_x) = f$. В таких уравнениях присутствует нелинейная зависимость от первых и вторых производных решения, и, если при этом главная часть уравнения зависит только от вторых производных, они называются гессиановскими. В отличие от линейных эти уравнения не сохраняют тип (эллиптичность, параболичность, гиперболичность) на функциях из пространства C^2. Поэтому вопрос о разрешимости гессиановских уравнений ставят на более узком множестве допустимых C^2-гладких функций. Именно, в конусе положительной монотонности функции $F(S, p)$ относительно матрицы S. Основной чертой публикаций вышеназванных авторов является стремление охватить как можно более общий класс функций F в рассматриваемых уравнениях. Последнее приводит к большому набору дополнительных условий, которые отодвигают на второй план основную специфику этой теории и истинную новизну методов исследования. Имеет смысл конкретизировать исследование на одном из типичных представителей гессиановских уравнений для получения результатов, близких к предельным. Мы рассматриваем задачу Дирихле для m-гессиановского уравнения.

---

[1]Ивочкина, Н. М. Описание конусов устойчивости, порождаемых дифференциальными операторами типа Монжа – Ампера // Мат. сборник. – 1983. – Т. 122(164), № 2(10). – С. 265–275.

[2]Caffarelly, L., Nirenberg, L., Spruck, J. The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations III. Functions of the eigenvalues of the Hessian // Acta Math. – 1985. – Vol. 155. – P. 261–301.

[3]Крылов, Н. В. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. – М.: Наука, 1985. – 376 с.

[4]Evans, L. C. Classical solutions of fully nonlinear convex second order elliptic equations // Comm.Pure and Appl.Math. – 1982. – Vol. 35, № 3. – P. 333–363.

Положим $u \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subset R^n$, $1 \leqslant m \leqslant n$. Уравнение вида

$$tr_m u_{xx} = f^m,$$

где $tr_m u_{xx}$ – это сумма главных миноров порядка m матрицы u_{xx}, называется m-гессиановским. В частности, при $m = 1$ перед нами уравнение Пуассона, при $m = n$ – уравнение Монжа – Ампера. Интерес к m-гессиановским уравнениям родился из попыток распространить теорию уравнений Монжа – Ампера на родственные классы.

В настоящее время актуальным является изучение слабых решений задачи Дирихле для m-гессиановского уравнения. Мы понимаем под слабыми аппроксимативные решения, введенные Н.Трудингером[5] в 1997 году. Последние являются альтернативой вязкостным решениям[6,7,8,9]. Однако вязкостный подход гарантирует единственность решения только при условии непрерывности f. Представляется важным ослабить требования на правую часть уравнения. Теория аппроксимативных решений позволяет рассматривать f из лебеговых и соболевских пространств. Изучение таких решений берет начало в упомянутой работе Н.Трудингера, где было доказано существование аппроксимативного решения m-гессиановского уравнения из пространства $C^\alpha(\Omega')$, $\Omega' \Subset \Omega$, при условии $f \in L^n(\Omega)$. Вопрос

[5] Trudinger, N. S. Week solutions of Hessian equations // Comm. Partial Differential Equation. – 1997. – Vol. 22. – P. 1251–1261.

[6] Crandall, M. G. Quadratic forms, semidifferentials and viscosity solutions of fully nonlinear elliptic equations // Ann. I. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. – 1989. – Vol. 6 – P. 419–435.

[7] Crandall, M. G., Ishii, M. G., Lions, P.-L. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations // Bul. Amer. Math. Soc. – 1992. – Vol. 27 – P. 1–67.

[8] Jensen, R. The maximum principle for viscosity solutions of fully nonlinear second order partial differential equations // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1988. – Vol. 101. – P. 1–27.

[9] Ishii, H. On uniqueness and existence of viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic PDE's // Comm. Pure Appl. Math. – 1989. – Vol. 42. – P. 14–45.

о поведении аппроксимативного решения в замкнутой области $\bar{\Omega}$ до сих пор оставался открытым – настоящая диссертация в значительной мере посвящена его исследованию.

Цель работы.

1. Представить полное доказательство существования классического решения задачи Дирихле для невырождающихся m-гессиановских уравнений методом непрерывности при минимальных требованиях на правую часть уравнения.

2. Построить теорию аппроксимативных решений задачи Дирихле для m-гессиановских уравнений, выделить зависимость качества аппроксимативного решения от регулярности правой части уравнения.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Доказана разрешимость в пространстве $C^{l+\alpha}(\bar{\Omega})$ задачи Дирихле для невырождающегося $(f > 0)$ m-гессиановского уравнения с правой частью из $C^{l-2+\alpha}(\bar{\Omega})$, $l \geqslant 4$.

2. Проведен анализ глобального поведения аппроксимативного решения задачи Дирихле для m-гессиановского уравнения. Показано, что аппроксимативное решение v принадлежит пространству $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$, $Lip(\bar{\Omega})$ или $v_x \in Lip(\bar{\Omega})$, если правая часть уравнения принадлежит соответствующим лебеговым или соболевским пространствам и допускает вырождение $(f \geqslant 0)$.

Методы исследования. Математический аппарат состоит, во-первых, в адаптации известных подходов из области линейных уравнений к рассматриваемой задаче. Во-вторых, представлены новые методические наблюдения в теории полностью нелинейных уравнений, не имеющие аналогов ни в теории линейных, ни в теории квазилинейных эллиптических уравнений. Отличительной особенностью диссертации является систематическое использование принципа максимума Александрова.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы в различных вопросах теории дифференциальных уравнений в частных производных и ее приложениях в геометрии и математической физике. В частности, для изучения уравнений кривизны или для построения теории слабых решений эволюционных уравнений.

Апробация диссертации. Результаты диссертации обсуждались на заседаниях научного семинара им. В.И.Смирнова по математической физике в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В.А.Стеклова РАН (2009 – 2010), в рамках работы Российской Школы-конференции с международным участием "Математика, информатика, их приложения и роль в образовании" (2009, Москва, РУДН), на международной конференции "Современные проблемы математики, механики и их приложений", посвященной 70-летию академика В.А.Садовничего (2009, Москва, МГУ), и на международной конференции "Nonlinear partial differential equations – 2010" в г. Днепропетровске. Работа поддержана РФФИ-грантом №09-01-00729.

Публикации. Основные результаты диссертации представлены в 7 работах автора (две из них в соавторстве). Работа [5] опубликована в журнале из перечня ВАК. Работы [1] – [4] опубликованы в журнале, удовлетворяющем достаточному условию включения в перечень ВАК (переводная версия этого журнала "Journal of Mathematical Sciences" входит в системы цитирования Springer и Scopus).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, включающих 13 параграфов, указателя обозначений и списка литературы из 26 наименований. Общий объем диссертации составляет 80 страниц.

Краткое содержание диссертации

Введение.

Во **введении** представлено описание рассматриваемой задачи, краткий обзор имеющихся на сегодняшний день результатов и обсуждение новых результатов, полученных в диссертации.

Исследование m-гессиановских уравнений необходимо предварить описанием m-гессиановских функций и операторов. Рассмотрим пространство $Sym(n)$ симметричных матриц размера $n \times n$. Выберем и зафиксируем целое число m с условием $1 \leqslant m \leqslant n$. Следом порядка m матрицы S, обозначаем $tr_m S$, называют сумму всех главных миноров порядка m матрицы S. В частности, $tr_1 S = trS$, $tr_n S = detS$. След порядка m инвариантен относительно ортогонального преобразования в том смысле, что

$$tr_m(S) = tr_m(BSB^T), \quad BB^T = I.$$

Поэтому можно рассматривать операцию $tr_m S$ на диагонализации матрицы S, и тогда след порядка m – это значение элементарной симметрической функции на множестве собственных чисел матрицы S.

В работе Л.Гординга[10], посвященной a-гиперболическим многочленам, введены конусы положительной монотонности этих многочленов. Примером такого многочлена является функция $tr_m S$, для которой конус Л.Гординга имеет вид

$$K_m = \{S \in Sym(n) : tr_m(S + \xi \times \xi) > tr_m S,\ \xi \in R^n,\ |\xi| \neq 0\}.$$

В конусе K_m рассмотрим 1-однородную функцию:

$$F_m(S) = (tr_m(S))^{\frac{1}{m}}.$$

Л.Гординг доказал выпуклость конуса K_m и вогнутость функций

[10] Gårding L. An inequality for hyperbolic polynomials // J. Math.Mech. – 1959. – Vol. 8. – P. 957–965.

F_m в конусе K_m. В заметке Н.М.Ивочкиной[11] представлено конструктивное описание конусов K_m:

$$K_m = \{S \in Sym(n) : tr_i S > 0,\ i = 1, ..., m\}.$$

Из этого представления ясно, что K_n – это конус положительно определенных матриц.

Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset R^n$.

Определение 1. *Функция $u \in C^2(\Omega)$ называется m-допустимой в области Ω, если $u_{xx}(x) \in K_m,\ x \in \Omega$.*

В частности, n-допустимая функция – это выпуклая функция в области Ω. Множество m-допустимых функций образует конус

$$\mathbb{K}_m(\Omega) = \{u \in C^2(\Omega) : u_{xx}(x) \in K_m,\ x \in \Omega\}.$$

Оператор, порожденный функцией F_m и действующий в конусе $\mathbb{K}_m$, назовем m-гессиановским оператором:

$$F_m[u] = (tr_m u_{xx})^{\frac{1}{m}}.$$

При $m = 1$ это оператор Лапласа, при $m = n$ – Монжа – Ампера. Поставим в области Ω задачу Дирихле для m-гессиановского уравнения:

$$F_m[u] = f \quad \text{в области} \quad \Omega, \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi.$$

Задача (1) является одним из основных примеров задачи Дирихле для полностью нелинейного уравнения второго порядка.

[11] Ивочкина, Н. М. Описание конусов устойчивости, порождаемых дифференциальными операторами типа Монжа – Ампера // Мат. сборник. – 1983. – Т. 122(164), № 2(10). – С. 265–275.

В **первой главе** собраны вспомогательные факты, составляющие инструментальную базу нашего исследования.

В **параграфе 1.2** перечислены алгебраические свойства оператора F_m. В частности, найдены достаточные условия, при которых форма $F_m^{ij}[u]\xi^i\xi^j$, $\xi \in R^n$, равномерно положительно определена. Воспользовавшись 1-однородностью функций F_m, запишем уравнение $F_m[u] = f$ в "линейном" виде

$$F_m^{ij}[u]u_{ij} = f, \quad F_m^{ij}[u] = \frac{\partial F_m[u]}{\partial u_{ij}}. \tag{2}$$

Тогда для любой функции $u \in \mathbb{K}_m(\Omega)$ выполняется двойное неравенство:

$$\frac{1}{c(n)}\left(\frac{F_m[u]}{F_1[u]}\right)|\xi|^2 \leqslant F_m^{ij}[u]\xi_i\xi_j \leqslant c(n)\left(\frac{F_1[u]}{F_m[u]}\right)^{m-1}|\xi|^2. \tag{3}$$

При наличии априорной оценки $\|u\|_{C^2(\Omega)}$ и при условии $f \geqslant \nu > 0$ в $\bar{\Omega}$ соотношение (3) гарантирует равномерную эллиптичность уравнения (2) в области $\bar{\Omega}$. Поэтому, говоря о вырождении уравнения (2), будем иметь в виду случаи, когда f обращается в ноль.

Далее в **параграфе 1.3** первой главы доказан принцип максимума Александрова[12] в нетрадиционной форме – для произвольных областей, в том числе типа параллелепипеда:

Предложение 2. *Пусть u – m-допустимая функция в области Ω, $z \in C^2(\Omega)$. Если $\Omega \subset \{x \in R^n : |x^i| < r_i,\ i = 1, 2, ..., n\}$, то*

$$z \geqslant \inf_{\partial\Omega} z - c(n)(r_1 r_2 ... r_n)^{\frac{1}{n}} \|F_m^{ij}[u]z_{ij}\|_{L^n(\Omega^+)},$$

где $\Omega^+ = \{x \in \Omega : z_{xx}(x) \geqslant \mathbf{0}\}$.

---

[12]Александров, А. Д. Задача Дирихле для уравнения $Det\|z_{ij}\| = \varphi$ // Вестник ЛГУ. Сер. математика, механика, астрономия. – 1958. – Вып. 1. – С. 5–24.

Кроме того, в **параграфе 1.4** первой главы описаны вспомогательные геометрические построения, необходимые для вывода приграничных оценок, и объяснены геометрические характеристики поверхности $\partial\Omega$. В этой связи важную роль играет матрица кривизны[13]. Для ее определения рассмотрим какую-либо параметризацию $\partial\Omega = \{X = (X^1, X^2, ..., X^n)(\theta),\ \theta \in R^{n-1}\}$. Тогда матрица метрического тензора поверхности $\partial\Omega$ имеет вид

$$g = (g_{ij}), \quad g_{ij} = (X_i, X_j), \quad X_i = \frac{\partial X}{\partial \theta^i}, \quad i, j = 1, ..., n-1.$$

Представим матрицу g^{-1} в форме $g^{-1} = \tau\tau^T$ и обозначим

$$X_{(i)} = X_k \tau_i^k, \quad X_{ij} = \frac{\partial^2 X}{\partial \theta^i \partial \theta^j}, \quad X_{(ij)} = X_{kl} \tau_i^k \tau_j^l, \quad X_{(\theta\theta)} = (X_{(ij)}).$$

Пусть $x \in \partial\Omega$ и $\mathcal{N} = \mathcal{N}(x)$ – внутренняя нормаль к поверхности $\partial\Omega$ в точке x. Матрицей кривизны для поверхности $\partial\Omega$ в точке x назовем симметричную матрицу

$$\mathcal{K}[\partial\Omega](x) = (X_{(\theta\theta)}, \mathcal{N})(x).$$

Она является геометрическим инвариантом поверхности $\partial\Omega$, ее собственные значения – главные кривизны $\partial\Omega$ в точке x.

Определение 3. *Поверхность $\partial\Omega \in C^2$ называется строго p-выпуклой, если $\mathcal{K}[\partial\Omega](x) \in K_p$ для всех точек $x \in \partial\Omega$, т.е. выполнены неравенства $tr_i\mathcal{K}[\partial\Omega](x) > 0$, $i = 1, ..., p$. Число $tr_p\mathcal{K}[\partial\Omega](x)$ называется p-кривизной поверхности $\partial\Omega$ в точке x (или кривизной порядка p).*

Если поверхность $\partial\Omega$ строго p-выпукла в точке x, то в этой точке у нее имеется по крайней мере p положительных главных кривизн. Понятие строго $(n-1)$-выпуклой поверхности совпадает с общепринятым понятием строго выпуклой поверхности.

[13]Ивочкина, Н. М. Задача Дирихле для уравнения кривизны порядка m // Алгебра и анализ. – 1990. – Т. 2, Вып. 3. – С. 192–217.

Глава 2.

Темой **второй главы** является построение априорных оценок для решения задачи (1) в пространстве $C^2(\bar{\Omega})$ и связанный с этим вопрос о разрешимости задачи (1) на множестве m-допустимых функций. Этот вопрос рассматривается в работе Н.М.Ивочкиной[14] для частной ситуации: выпуклой области и нулевого граничного условия – и в работе Л.Каффарелли, Л.Ниренберга и Д.Спрука[15] с правой частью уравнения из C^∞. Для второй работы характерна большая общность класса рассматриваемых уравнений, которая достигается в условиях заведомо избыточной гладкости функций, образующих задачу Дирихле. Насущная проблема сводится, таким образом, к анализу минимальных условий разрешимости задачи (1) и выявлению четкой связи между качеством правой части уравнения и гладкостью его решения.

Одной из целей диссертации является доказательство разрешимости задачи (1) в пространстве гладких функций, начиная с $C^{4+\alpha}(\bar{\Omega})$. В **параграфе 2.1** второй главы приведена следующая теоремы:

Теорема 4. *Пусть* $\partial\Omega$ *– строго* $(m-1)$*-выпуклая поверхность класса* $C^{l+\alpha}$, $\varphi \in C^{l+\alpha}(\partial\Omega)$, $f \in C^{l-2+\alpha}(\bar{\Omega})$, $f(x) \geqslant \nu > 0$ *в* $\bar{\Omega}$, $l \geqslant 4$, $0 < \alpha < 1$. *Тогда существует* m*-допустимое решение* $u \in C^{l+\alpha}(\bar{\Omega})$ *задачи (1).*

При доказательстве теоремы 4 используем метод непрерывности (продолжения по параметру) с опорой на априорные оценки решения в пространстве $C^{l+\alpha}(\bar{\Omega})$. Вывод априорных оценок состоит из трех ступеней:

I) Необходимо получить априорную оценку нормы $\|u\|_{C^2(\Omega)}$.

[14]Ивочкина, Н. М. Решение задачи Дирихле для некоторых уравнений типа Монжа – Ампера // Мат. сборник. – 1985. – Т. 128(170), № 3(11). – С. 403–415.

[15]Caffarelly, L., Nirenberg, L., Spruck, J. The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations III. Functions of the eigenvalues of the Hessian // Acta Math. – 1985. – Vol. 155. – P. 261–301.

II) Согласно методике, разработанной Н.В.Крыловым[16] и Л.Эвансом[17] для нелинейных равномерно эллиптических уравнений, из ограниченности $\|u\|_{C^2(\Omega)}$ следует оценка $\|u\|_{C^{2+\alpha'}(\Omega)}$ с небольшим $\alpha' > 0$. Полное доказательство этого перехода в конкретном случае m-гессиановских уравнений составляет содержание статьи Н.М.Ивочкиной[18].

III) Продифференцировав уравнение (1), получим новое уравнение $F_m^{ij}[u]u_{kij} = f_k$ относительно u_k, которое является равномерно эллиптическим (см. неравенство (3)) при условии $f(x) \geqslant \nu > 0$ в $\bar{\Omega}$ и наличии априорной оценки $\|u\|_{C^2(\Omega)}$. Это позволяет применить к нему линейную теорию Шаудера, чтобы подтянуть оценку $\|u\|_{C^{2+\alpha'}(\Omega)}$ до $\|u\|_{C^{l+\alpha}(\Omega)}$, $\alpha > \alpha'$.

Таким образом, в основе всего лежит оценка $\|u\|_{C^2(\Omega)}$, ее последовательный вывод составляет главное содержание второй главы. Остановимся на этом чуть подробнее. Определим в области Ω приграничную полосу $\Pi_d = \{x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) < d\}$ ширины $d > 0$. Положим

$$f_{xx}^-(x) = \sup_{\xi \in R^n, |\xi|=1} f_{\xi\xi}^-(x), \quad f_{\xi\xi} = f_{ij}\xi^i\xi^j.$$

Обозначим символом $\mathbf{k}_{m-1}$ минимальное значение кривизны порядка $(m-1)$ поверхности $\partial\Omega$:

$$\mathbf{k}_{m-1} = \inf_{x \in \partial\Omega} tr_{m-1}\mathcal{K}[\partial\Omega](x).$$

Справедлива следующая лемма:

Лемма 5. *Пусть $\partial\Omega$ – строго $(m-1)$-выпуклая поверхность, $f \geqslant 0$, u – m-допустимое решение задачи (1), $q > \frac{n+1}{2}$. Тогда*

$$\|u\|_{C^1(\Omega)} \leqslant c(\|f\|_{L^{nq}(\Pi_d)}, \|f\|_{W_1^n(\Omega)}, \|\varphi, \partial\Omega\|_{C^2}, \mathbf{k}_{m-1}, d).$$

---

[16]Крылов, Н. В. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. – М.: Наука, 1985. – 376 с.

[17]Evans, L. C. Classical solutions of fully nonlinear convex second order elliptic equations // Comm.Pure and Appl.Math. – 1982. – Vol. 35, № 3. – P. 333–363.

[18]Ивочкина, Н. М. Оценка постоянной Гельдера вторых производных решения m-гессиановского уравнения // Проблемы математического анализа. – 2010. – Вып. 50. – С. 65–77.

Если, кроме того, $u \in C^4(\bar\Omega)$ *и* $f \geqslant \nu > 0$ *в* Π_d, *то*

$$\|u\|_{C^2(\Omega)} \leqslant c(\|f\|_{W_1^{nq}(\Pi_d)}, \|f\|_{W_1^n(\Omega)}, \|f_{xx}^-\|_{L^n(\Omega)}, \|\varphi, \partial\Omega\|_{C^4}, \nu, \mathbf{k}_{m-1}, d).$$

Помимо перечисленных параметров константы c *зависят еще от величин* m, n *и диаметра области* Ω.

В частности, если функция f выпукла, то $\|f_{xx}^-\|_{L^n(\Omega)} = 0$ и для оценки $\|u\|_{C^2(\Omega)}$ достаточно ограниченности f и f_x на $\partial\Omega$.

Производство этих оценок состоит из двух фаз: принцип максимума Александрова вытесняет задачу оценивания на границу области Ω, получение оценок на границе – наиболее трудоемкая и продолжительная часть диссертационной работы. Для вывода приграничных оценок u_n и u_{kn}, где $k = 1, 2, ..., n-1$, мы используем модификацию метода О.А.Ладыженской и Н.Н.Уральцевой[19] и вспомогательные области с барьерными функциями из работы Н.М.Ивочкиной[20]. Конструктивные особенности метода барьеров описаны в **параграфе 2.2**. Имея оценки величин u_n и u_{kn}, представляется естественным извлечь оценку u_{nn} прямо из уравнения (1). Это проделано с помощью более сложного барьера и синтетической техники, опирающейся на богатые алгебраические свойства оператора F_m и геометрические особенности приграничной вспомогательной области.

Работа с барьерными функциями проводится в специальной вспомогательной области Ω_r, построенной в окрестности точки $x_0 \in \partial\Omega$. Область Ω_r представляет из себя приграничную "линзу" с радиусом r и толщиной порядка r^2. Общую часть границы Ω_r и Ω обозначаем символом Γ_r. Иначе говоря, $\Gamma_r = \partial\Omega \cap B_r(x_0)$. Доказательство приграничных оценок $u_n(x_0)$, $u_{kn}(x_0)$, $u_{nn}(x_0)$ реализовано в **параграфах 2.3, 2.4, 2.5** настоящей диссертации.

[19]Ладыженская, О. А., Уральцева, Н. Н. Оценки на границе области норм Гельдера производных решений квазилинейных эллиптических и параболических уравнений общего вида // Препринты ЛОМИ P-I-85. – Л., 1985.

[20]Ивочкина, Н. М. Задача Дирихле для уравнения кривизны порядка m // Алгебра и анализ. – 1990. – Т. 2, Вып. 3. – С. 192–217.

Лемма 6. *Пусть* Γ_r *– строго* $(m-1)$*-выпуклая поверхность,* $f \geqslant 0$, $q > \frac{n+1}{2}$.
Если u *–* m*-допустимое решение задачи (1), то*

$$|u_n(x_0)| \leqslant c(\|f\|_{L^{nq}(\Omega_r)}, \|\varphi\|_{C^2(\Gamma_r)}, \|\Gamma_r\|_{C^2}, \|u-\varphi\|_{C(\Omega_r)}, \mathbf{k}_{m-1}, r).$$

Если $u \in C^3(\bar{\Omega})$ *–* m*-допустимое решение задачи (1), то*

$$|u_{kn}(x_0)| \leqslant c(\|f\|_{W_1^{nq}(\Omega_r)}, \|\varphi\|_{C^3(\Gamma_r)}, \|\Gamma_r\|_{C^3}, \|u-\varphi\|_{C^1(\Omega_r)}, \mathbf{k}_{m-1}, r).$$

Если u *–* m*-допустимое решение задачи (1) и* $f \geqslant \nu > 0$ *в* Ω_r*, то*

$$|u_{nn}(x_0)| \leqslant c(\|f\|_{W_1^{nq}(\Omega_r)}, \|\varphi\|_{C^4(\Gamma_r)}, \|\Gamma_r\|_{C^4}, \|u-\varphi\|_{C^1(\Omega_r)}, \nu, \mathbf{k}_{m-1}, r).$$

Символ $\mathbf{k}_{m-1}$ *обозначает в данном случае минимальное значение кривизны порядка* $(m-1)$ *поверхности* Γ_r.

Априорные оценки, полученные в главе 2, не только способствуют классической разрешимости задачи (1), но и дают важные результаты для анализа ее аппроксимативного решения.

Глава 3.

Третья глава посвящена качественному исследованию слабой разрешимости задачи (1). В работе Н.Трудингера[21] введено понятие слабого решения в аппроксимативном смысле, частным случаем которого является следующее определение:

Определение 7. *Пусть* Ω *– липшицева область. Функция* v *называется* m*-аппроксимативным решением задачи (1) с* $f \in L^p(\Omega)$, $p > 1$, $\varphi \in C(\partial\Omega)$, *если существует последовательность* m*-допустимых функций* $\{u^k\}_{k=1}^{\infty}$ *такая, что* $u^k(x) \to v(x), \quad x \in \Omega$ *и*

$$\|F_m[u^k] - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0, \quad \|u^k - \varphi\|_{C(\partial\Omega)} \to 0.$$

[21] Trudinger, N. S. Week solutions of Hessian equations // Comm. Partial Differential Equation. – 1997. – Vol. 22. – P. 1251–1261.

В настоящей диссертации найдены условия, гарантирующие существование, единственность и регулярность m-аппроксимативного решения. Совокупный результат **главы 3** изложен в следующей теореме:

Теорема 8. *Пусть $\partial\Omega \in C^{4+\sigma}$, $\sigma > 0$, – строго $(m-1)$-выпуклая поверхность, $\varphi \in C^4(\partial\Omega)$, $f \geqslant 0$.*

(i) Если $f \in L^n(\Omega)$, то существует единственное m-аппроксимативное решение v задачи (1), причем $v \in C(\bar{\Omega}) \cap C^\alpha(\Omega)$ с любым $0 < \alpha < 1$.

(ii) Если $f \in L^{nq}(\Pi_d) \cap L^n(\Omega)$, $1 \leqslant q \leqslant \frac{n+1}{2}$, то $v \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ с любым $0 < \alpha < \frac{n+1}{2n}\left(2 - \frac{1}{q}\right)$.

(iii) Если $f \in L^{nq}(\Pi_d) \cap W_1^n(\Omega)$, $q > \frac{n+1}{2}$, то $v \in Lip(\bar{\Omega})$.

(iv) Если $f \in W_1^{nq}(\Pi_d) \cap W_1^n(\Omega)$, $q > \frac{n+1}{2}$, $f_{xx}^- \in L^n(\Omega)$ и $f \geqslant \nu > 0$ в приграничной полосе Π_d, то $v_x \in Lip(\bar{\Omega})$.

Доказательство пунктов (i) и (ii) теоремы 8 является целью **третьей главы**. Существование сходящейся в $C(\bar{\Omega})$ аппроксимационной последовательности гарантируется принципом максимума Александрова и теоремой 4 о разрешимости в классическом смысле, примененной к регуляризованным задачам. Единственность обеспечена принципом максимума Александрова. В упомянутой статье Н.Трудингера намечен вывод локальной оценки постоянной Гельдера с зависимостью от расстояния до границы. Технология Н.Трудингера для извлечения локальных оценок представлена в **параграфах 3.2, 3.3** в значительно преобразованном виде. Существенно новым результатом настоящей диссертации является глобальный анализ поведения m-аппроксимативного решения – пункты (ii)–(iv) теоремы 8. В частности, **параграф 3.4** воспроизводит доказательство гельдеровости

m-аппроксимативного решения в замкнутой области. Метод построения оценки гельдеровской полунормы в замкнутой области – по сути синтез внутренней оценки постоянной Гельдера и оценки для скорости роста решения вблизи границы. Дальнейшее улучшение свойств слабого решения, описанное в пунктах (iii) и (iv), автоматически следует из равномерных оценок в $C^1(\bar{\Omega})$ и $C^2(\bar{\Omega})$ для аппроксимационной последовательности, которые получены во второй главе и приведены выше в лемме 5. Причем пункты (iii) и (iv) верны для полностью или частично вырождающегося уравнения (1) (т.е. допустимо $f = 0$). Аппроксимативное решение из пространства Липшица существует даже при полном вырождении. Если же m-гессиановское уравнение вырождается только внутри области Ω, то существует m-аппроксимативное решение v такое, что $v_x \in Lip(\bar{\Omega})$.

Работы автора по теме диссертации

[1] Ивочкина, Н. М., Филимоненкова, Н. В. Лемма о возрастании для аппроксимативных решений задачи Дирихле для m-гессиановских уравнений // Проблемы математического анализа. – 2008. – Вып. 38. – С. 37–45.

В работе [1] Ивочкиной Н.М. принадлежит формулировка основной теоремы и идея доказательства, Филимоненковой Н.В. принадлежит детальное проведение доказательства и сопровождение техническими утверждениями.

[2] Ивочкина, Н. М., Филимоненкова, Н. В. Оценка постоянной Гельдера для m-гессиановских уравнений // Проблемы математического анализа. – 2009. – Вып. 40. – С. 69–76.

В работе [2] Ивочкиной Н.М. принадлежит общая постановка задач, Филимоненковой Н.В. принадлежит идея вывода основной оценки и реализация доказательства.

[3] Филимоненкова, Н. В. Теорема типа Фрагмена-Линделефа для m-гессиановских уравнений // Проблемы математического анализа. – 2009. – Вып. 39. – С. 147–155.

[4] Филимоненкова, Н. В. Анализ поведения слабого решения m-гессиановского уравнения в замкнутой области // Проблемы математического анализа. – 2010. – Вып. 45. – С. 103–119.

[5] Филимоненкова, Н. В. Оценка постоянной Гельдера для слабых решений m-гессиановских уравнений в замкнутой области // Вестник СПбГУ. Серия 1. Математика, механика, астрономия. – 2010. – № 3. – С. 70–79.

[6] Филимоненкова, Н. В. Качественное исследование слабых решений m-гессиановских уравнений. Тезисы Российской Школы-конференции с международным участием “Математика, информатика, их приложения и роль в образовании”, 14-17 декабря, 2009, Москва, Российский университет дружбы народов. С. 73.

[7] Filimonenkova N. V. The analysis of the smoothness of approximate solution of m-Hessian equation. Abstracts of the International Conference “Nonlinear partial differential equations”, 6-11 september, 2010, Dnipropetrovsk, Ukraine. P. 23–24.