На правах рукописи

Осипов Николай Николаевич

Теория Литлвуда–Пэли: некоторые новые результаты

Специальность 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2010

Работа выполнена в лаборатории математического анализа Учреждения Российской академии наук Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:
доктор физико-математических наук, чл.-корр. РАН
Кисляков Сергей Витальевич
ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:
доктор физико-математических наук, профессор
Хавин Виктор Петрович
доктор физико-математических наук, профессор
Коточигов Александр Михайлович
ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ:
Российский университет дружбы народов

Защита диссертации состоится 20 сентября 2010 года в 15 часов на заседании диссертационного совета Д.002.202.01 в Учреждении Российской академии наук Санк-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова РАН по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Учреждения Российской академии наук Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

Автореферат разослан “___” __________ 2010 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических
наук А. Ю. Зайцев

Общая характеристика работы

Объект исследования и научные положения, выносимые на защиту. Исследуются два объекта из области гармонического анализа: неравенство Литлвуда–Пэли и квадратичная функция G_λ^*. Что касается неравенства Литлвуда–Пэли, то удалось доказать его односторонний вариант для параллелепипедов в $\mathbb{R}^n$ в L^p-метрике при $0 < p \leq 2$. Это является первым результатом, который выносится на защиту. Вторым результатом является тот факт, что квадратичную функцию G_λ^* можно трактовать как норму в гильбертовом пространстве от значений некоторого оператора Кальдерона–Зигмунда (также на защиту выносятся следствия из этого факта).

Цели и задачи диссертации. Автор ставит перед собой цель продемонстрировать и математически строго доказать новые закономерности, позволяющие лучше понять внутреннюю структуру таких важных инструментов гармонического анализа, как неравенство Литлвуда–Пэли и квадратичная функция G_λ^*, а также связанных с ними понятий.

Методы исследования. Результаты, касающиеся неравенства Литлвуда–Пэли, получены методами теории сингулярных интегральных операторов типа Кальдерона–Зигмунда на многопараметрических классах Харди. Квадратичная функция G_λ^* исследовалась методами теории операторов Кальдерона–Зигмунда на функциях со значениями в банаховых пространствах. Также во многих местах использовалась теория интерполяции.

Достоверность научных положений. Все результаты, которые выносятся на защиту, являются математически достоверными фактами. Они были опубликованы в рецензируемых журналах, а их доказательства неоднократно проверялись специалистами в той области, к которой эти результаты относятся (имеется в виду гармонический анализ и теория Литлвуда–Пэли).

Научная новизна. Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми.

Актуальность, практическая ценность и область применения результатов. Гармонический анализ — важная и активно развивающаяся область математики, позволяющая отвечать на фундаментальные вопросы о связях между функцией и ее спектром (преобразованием Фурье). Новые сведения и закономерности, описанные в этой диссертации, могут быть использованы для получения новых результатов в этой области или в близких к ней, таких как теория сингулярных интегральных операторов, вопросы интерполяции и т.д.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на общегородском семинаре по линейному и комплексному анализу в Санкт-Петербурге.

Публикации. Результаты, выносимые на защиту, опубликованы в работах [16, 17, 18]. Все три статьи напечатаны в журналах из списка ВАК.

Структура и обьем работы. Диссертация состоит из введения и трех глав, разбитых в общей сложности на 14 параграфов и занимает 72 страницы. Библиография содержит 25 наименований.

Содержание работы

"Теория Литлвуда–Пэли" — несколько размытый термин. Под ним обычно понимают многочисленные и, на первый взгляд, разнородные неравенства в анализе Фурье, выражающие принадлежность функции лебеговым классам L^p или классам Харди H^p в терминах оценок на L^p-нормы различных "квадратичных" выражений. Приведем здесь два таких выражения и соответствующие неравенства для них.

Пусть $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. Определим квадратичное выражение $L(f)$ по формуле

$$L(f)(x) = \Big(\sum_{\Delta \in \mathcal{D}} |M_\Delta f|^2 \Big)^{1/2},$$

где $\mathcal{D}$ — двоичное разложение прямой, то есть набор всех отрезков вида $[2^k, 2^{k+1}]$ и $[-2^{k+1}, -2^k]$, $k \in \mathbb{Z}$, а $M_\Delta f = (\widehat{f}\chi_\Delta)^\vee$ — соответствующие мультипликаторы Фурье. Классическая теорема Литлвуда–Пэли утверждает (см., например, [3, §IV.5]), что верна следующая двусторонняя оценка:

$$\|L(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} \asymp \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}. \qquad (1)$$

Второе квадратичное выражение, которое мы собираемся рассматривать, это оператор G_λ^*, определяемый по формуле:

$$G_\lambda^*(f)(x) \\ = \left(\int_0^\infty \int_{t\in\mathbb{R}^n} \left(\frac{y}{|t|+y} \right)^{\lambda n} |\nabla \tilde{f}(x-t,y)|^2 y^{1-n} dt dy \right)^{1/2}.$$

Основная оценка для этого оператора выглядит следующим образом:

$$\|G_\lambda^*(f)\|_p \le C_{p,\lambda} \|f\|_p, \quad \lambda > 1 \text{ и } p > \max(1,\, 2/\lambda), \qquad (2)$$

(см. [3, §IV.2] и [8]).

Из многочисленных приложений указанных неравенств мы упомянем лишь, что теорема Литлвуда–Пэли, то есть оценка (1), представляет собой основной ингредиент в доказательстве классической теоремы Марцинкевича о мультипликаторах. Второй из примеров — функция G_λ^* — тоже достаточно эффективно использовался для оценок мультипликаторов Фурье. Диссертация посвящена новым результатам, относящимся к этим двум инструментам.

Что касается соотношения (1), то в 1983 году Рубио де Франсиа в работе [14] доказал, что в одну сторону это неравенство выполняется для произвольного набора отрезков. А именно, он установил, что если $2 \le p < \infty$, то выполняется оценка

$$\Big\| \Big(\sum_m |M_{\Delta_m} f|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \qquad (3)$$

где Δ_m — произвольные попарно непересекающиеся интервалы на прямой $\mathbb{R}$, а константа C_p не зависит ни от функции f, ни от интервалов Δ_m. Вскоре после этого Журне (см. [12]) обобщил этот результат на $\mathbb{R}^n$, то есть доказал, что оценка, аналогичная неравенству (3), верна в случае, когда функция f задана на $\mathbb{R}^n$, а Δ_m — попарно непересекающиеся параллелепипеды в $\mathbb{R}^n$ со сторонами, параллельными осям координат. Заметим, что n-мерный вариант неравенства (3) нельзя доказать просто n-кратным применением одномерного. В [12] Журне для этой цели описывает, а затем использует теорию многопараметрических операторов Кальдерона–Зигмунда на прямых произведениях евклидовых пространств, причем оператор, к ограниченности которого сводится вопрос, не является в точном смысле многопараметрическим сингулярным интегральным оператором (см. определения в [9] и [12]) и оказывается ограниченным только благодаря некоторым особенностям своей структуры.

Далее, заметим, что, используя двойственность, оценку (3) можно переписать следующим образом:

$$\Big\| \sum_m f_m \Big\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_p \Big\| \{f_m\} \Big\|_{L^p(\mathbb{R}, l^2)}, \quad 1 < p \leq 2, \tag{4}$$

где $\{f_m\}$ — набор функций, таких, что $\operatorname{supp} \widehat{f_m} \subset \Delta_m$. В 1984 году Бургейн (см. [4]) доказал, что неравенство (2) остается верным и при $p = 1$, при этом его доказательство было значительно сложнее, чем у Рубио де Франсиа (были использованы мартингальные преобразования, сингулярные интегральные операторы и вариант леммы Котляра). В 2005 году Кисляков и Парилов (см. [2]), используя теорию операторов Кальдерона–Зигмунда на классах Харди, с помощью метода, сходного с методом Рубио де Франсиа, установили, что оценка (4) выполняется при всех $0 < p \leq 2$ (в [2] рассматривается случай окружности, а не прямой, но существенной роли это не играет). С другой стороны, в 1985 году Р. Фефферман (см. [9]) описал теорию, позволяющую проверять ограниченность некоторых линейных операторов на двухпараметрических классах

Харди $H_2^p(\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2})$ (здесь нижний индекс обозначает число параметров). Его методы в некотором смысле двойственны упомянутой теории Журне, который работал, в основном, в терминах пространства BMO. В 2009 году автор (см. [16]), совместив технику Кислякова и Парилова с методами Р. Феффермана, доказал, что аналог неравенства (4) выполняется, если Δ_m — попарно-непересекающиеся прямоугольники в $\mathbb{R}^2$ и $0 < p \le 2$.

Однако теория Р. Феффермана применима только к произведению двух евклидовых пространств. Тем не менее, в работе Кэрбэри и Сигера [6] описывается теория, являющаяся развитием идей Журне и Р. Феффермана, которая позволяет рассматривать произвольное число евклидовых сомножителей. В 2010 году автору (см. [17]) с помощью этой теории удалось распространить оценку (4) на случай произвольной размерности, то есть доказать следующую теорему (первый основной результат диссертации).

Теорема 1. *Пусть задана последовательность функций $\{f_m\}$ такая, что $f_m \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{supp} \widehat{f_m} \subset \Delta_m$, где Δ_m — непересекающиеся параллелепипеды в $\mathbb{R}^n$ со сторонами, параллельными осям координат. Тогда при $0 < p \le 2$ выполняется оценка*

$$\Big\| \sum_m f_m \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C_{p,n} \Big\| \{f_m\} \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n, l^2)},$$

причем константа $C_{p,n}$ не зависит ни от функций, ни от прямоугольников.

Теперь обсудим квадратичную функцию G_λ^*. L^p-ограниченность других квадратичных выражений, таких как g-функции Литлвуда–Пэли или интеграл площадей Лузина, может быть проверена с помощью теории операторов Кальдерона–Зигмунда для функций со значениями в гильбертовом пространстве. Однако для доказательства оценки (2) использовался иной подход (см, например, [3, §IV.2] или [8]) и считалось, что теория сингулярных интегральных операторов в этом контексте неприменима. Тем не менее, в 2004 году Анисимов и Кисляков заметили (см. [1]), что в квадратичной функции G — аналоге функции G_2^* на окружности, все же спрятан некоторый сингулярный интегральный оператор T. Он действовал в пространство функций со значениями во вспомогательном гильбертовом пространстве, а функция G выражалась через норму в этом пространстве. Строго говоря, рассматривался не сам оператор T, а оператор T^*, сопряженный к нему. Было проверено, что T^* — оператор Кальдерона–Зигмунда, то есть, что его ядро удовлетворяет определенному условию гладкости. Из этого сразу следовало, что квадратичная функция G L^p-ограничена при $2 < p < \infty$. Также были сформулированы некоторые следствия, имеющие отношение к теории интерполяции. А именно, рассмотрим функцию $f \in L^p(\mathbb{T})$, $2 < p < \infty$. Грубым разрезанием функции $|f|$ по уровню $\alpha > 0$ получим функцию $g \in L^\infty(\mathbb{T})$, такую что $\|g\|_\infty \leq C\alpha$ и $\|f - g\|_2^2 \leq C\alpha^{2-p}\|f\|_p^p$. Тот факт, что оператор G выражается через оператор Кальдерона–Зигмунда, позволяет, применив общие соображения, впервые описанные Бургейном в [5], изменить функцию g так, чтобы в дополнение к этим оценкам (в них изменятся лишь оценочные постоянные) выполнялось неравенство $\|G(g)\|_\infty \leq C\alpha$. Заметим, что такое утверждение о "разрезании" функции было доказано еще раньше Джонсом и Мюллером с помощью броуновского движения (см. [11]), а результат Кислякова и Анисимова заключался в том, что этот факт может быть проверен иначе, если воспользоваться представлением функции G в виде нормы от значений оператора Кальдерона–Зигмунда. Автор в работе [18] показал, что аналогичные методы применимы не только для круга, но и для пространства $\mathbb{R}^n$ и что параметр $\lambda = 2$ не исключение. Таким образом, функция G_λ^*, как и функция G, выражается через норму от значений некоторого оператора T, сопряженный к которому оказывается оператором Кальдерона–Зигмунда. Дополнительно было доказано, что при некотором ограничении на показатель λ прямой оператор T также является сингулярным интегральным оператором. Приведем точные формулировки этих результатов. Для оператора G_λ^* выполняется представление $G_\lambda^*(f)(x) = \|T(f)(x)\|_{\mathscr{H}}$, где $\mathscr{H}$ — вспомогательное гильбертово пространство функций, действующих из верхнего полупространства $\mathbb{R}_+^{n+1}$ в пространство $\mathbb{C}^{n+1}$, таких, что

$$\|h\|_{\mathscr{H}}^2 = \int_0^\infty \int_{t\in\mathbb{R}^n} \left(\frac{y}{|t|+y}\right)^{\lambda n} |h(t,y)|^2 y^{1-n} dtdy < \infty,$$

а оператор T действует в пространство $\mathscr{H}$-значных функций и определяется формулой

$$T(f)(x)(t,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla P_y(x-t-v) f(v) dv.$$

Здесь P_y — ядро Пуассона, а градиент берется по всем переменным, в том числе и по y. Вторым основным результататом диссертации является следующая теорема.

Теорема 2. *1. T^* является оператором типа Кальдерона–Зигмунда при $\lambda > 1$.*

2. T — оператор Кальдерона–Зигмунда при $\lambda > 2 + 2/n$.

Первый пункт теоремы позволяет получить для оператора G_λ^* интерполяционное утверждение, аналогичное тому, которое мы описали выше для оператора G.

Следствие. *Пусть* $2 < p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\lambda > 1$ *и* $\alpha > 0$. *Тогда существует функция* $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *такая, что* $\|g\|_\infty \le C\alpha$, $\|f - g\|_2^2 \le C\alpha^{2-p}\|f\|_p^p$ *и при этом* $\|G_\lambda^*(g)\|_\infty \le C\alpha$.

Следует отметить, что в диссертации это следствие формулируется несколько по другому — в терминах K-замкнутости. Два пункта теоремы вместе позволяют сформулировать аналогичное утверждение сразу для всех $1 < p < \infty$, если только $\lambda > 2 + 2/n$.

Описание диссертации по главам и параграфам. В первой главе описаны общие понятия и методы, используемые в диссертации: сингулярные интегральные операторы типа Кальдерона–Зигмунда, классы Харди, в том числе многопараметрические, и некоторые факты из теории интерполяции.

В §1.1 обсуждаются сингулярные интегральные операторы типа Кальдерона–Зигмунда и приводится общее определение таких операторов, действующих на функциях со значениями в банаховых пространствах. Отмечается, что такие операторы действуют ограниченно в L^p-пространствах при $1 < p \le 2$, а сопряженные к ним — при $2 \le p < \infty$ (см. [3] или [15]). Затем мы приводим определение "действительных" классов Харди $H^p(\mathbb{R}^n)$ через некасательную максимальную функцию (теперь $0 < p < \infty$). При $1 < p < \infty$ классы H^p и пространства L^p в некотором смысле совпадают, а при $0 < p \le 1$ для функций из класса H^p существует атомное разложение (см. [15, §III.2]). Это означает, что если $f \in H^p$, $0 < p \le 1$, то существует разложение $f = \sum \lambda_k a_k$, где числа λ_k такие, что $\left(\sum |\lambda_k|^p\right)^{1/p} \asymp \|f\|_{H^p}$, а у функций a_k, называемых атомами, выполняются некоторые ограничения на "размер" и несколько первых моментов равны нулю. Как известно, с помощью атомного разложения можно доказать, что операторы Кальдерона–Зигмунда действуют ограниченно из H^p в L^p при $0 < p \leq 1$ (см. [15, §III.3]).

В §1.2 речь идет о многопараметрических классах Харди, на которых ограниченно действуют многопараметрические операторы Кальдерона–Зигмунда. Вначале дается определение многопараметрических *аналитических* классов Харди $\mathcal{H}^p_n(\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}) = \mathcal{H}^p_n(\mathbb{R}^n)$ (здесь нижний индекс n обозначает число параметров). Ввиду важности данного понятия приведем его определение также и здесь: функция u, заданная на прямом произведении n верхних комплексных полуплоскостей и аналитическая по всем переменным, принадлежит классу $\mathcal{H}^p_n(\mathbb{R}^n)$, если

$$\|u\|_{\mathcal{H}^p_n} = \sup_{y_1, \dots y_n > 0} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)|^p dx < \infty.$$

В этом определении функция u может быть как скалярнозначной, так и l^2-значной (то есть под пространством $\mathcal{H}^p_n(\mathbb{R}^n)$ мы часто понимаем пространство $\mathcal{H}^p_n(\mathbb{R}^n, l^2)$, не оговаривая этого явно). Затем формулируется лемма, которая используется во второй главе диссертации, для того чтобы заменять в оценках L^p-нормы $\mathcal{H}^p_n$-нормами. По сути эта лемма утверждает, что если у функции $g \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, $0 < p \leq 2$, носитель преобразования Фурье лежит в параллелепипеде с положительными координатами, то эта функция принадлежит многопараметрическому классу Харди $\mathcal{H}^p_n(\mathbb{R}^n)$, причем ее $\mathcal{H}^p_n$-норма оценивается L^p-нормой. Эта лемма элементарна, но в литературе, по видимому, отсутствует, поэтому там же мы приводим набросок ее доказательства. Также мы описываем более общие "действительные" классы Харди $H^p_n(\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}) = H^p_n(\mathbb{R}^n)$, которые определяются через многопараметрическую некасательную максимальную функцию. Известно, что $\mathcal{H}_n^p \subset H_n^p$, причем нормы этих пространств эквивалентны на $\mathcal{H}_n^p$ (см. [10]). Для многопараметрических классов Харди $H_n^p(\mathbb{R}^n)$ существует аналог атомного разложения (см. [7] или [9]) и ключевым фактом, позволяющим получить такое разложение, является ограниченность на классах $H_n^p(\mathbb{R}^n)$ n-параметрической квадратичной функции S_ψ^n (это - n-параметрический аналог интеграла площадей Лузина, построенный по быстро убывающему гладкому свертывателю ψ). То, что оператор S_ψ^n действует ограниченно из H_n^p в L^p, считается хорошо известным, но похоже, что нигде в литературе это в явном виде не проверяется, поэтому в конце §1.2 диссертации приводится набросок доказательства этого факта.

В §1.3 обсуждаются уже упоминавшиеся теории Р. Феффермана (см. [9]) и Кэрбэри–Сигера (см. [6]), которые позволяют проверять ограниченность некоторых операторов на многопараметрических классах Харди $H_n^p(\mathbb{R}^n)$, $0 < p \leq 1$. Эти теории затем применяются во второй главе диссертации для изучения операторов, к ограниченности которых сводится вопрос о неравенстве Литлвуда–Пэли. В начале параграфа приводятся определения многопараметрических атома и предатома, а затем формулируется теорема об атомном разложении для многопараметрических классов Харди (см. [7] или [9]), которая утверждает примерно следующее: если $f \in H_n^p(\mathbb{R}^n)$, то $f = \sum \lambda_k a_k$, где числа λ_k такие, что $\sum |\lambda_k|^p \leq C\|f\|_{H_n^p}^p$, а каждая из функций a_k сосредоточена на открытом множестве конечной меры. Функции a_k называются атомами и каждая из них, в свою очередь, представима в виде линейной комбинации (возможно, бесконечной) предатомов — сосредоточенных на диадических параллелепипедах функций, у которых равно нулю определенное число моментов по каждой переменной. Затем формулируется теорема Р. Феффермана, позволяющая доказывать ограниченность некоторых операторов на двухпараметрических классах Харди $H_2^p(\mathbb{R}^2)$. Очень приблизительно идею этой теоремы можно описать следующим образом: несмотря на то, что функция из двухпараметрического класса Харди прямо не представляется в виде линейной комбинации предатомов (функций с носителями в прямоугольниках и нулевыми моментами по каждой переменной) с коэффициентами, контролируемыми ее H_n^p-нормой, для доказательства ограниченности некоторого оператора T достаточно проверить, что он в некотором смысле "хорошо ведет" себя на предатомах. Отмечается, что двухпараметрические операторы Кальдерона–Зигмунда удовлетворяют условиям теоремы Р. Феффермана. Затем описывается более общий подход Кэрбэри и Сигера, позволяющий проверять ограниченность операторов с ядром на классах $H_n^p(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$. Их метод заключается приблизительно в следующем: умножением на функции, являющиеся разбиением единицы, "разрезается" ядро рассматриваемого оператора, а затем изучается поведение операторов с полученными таким "разрезанием" ядрами на "частичных" предатомах — функциях, у которых свойства предатомов выполняются лишь по части переменных.

В §1.4 в терминах K-замкнутости (там же приводится определение этого понятия) формулируется довольно давно известная (см., например, обзор [13]) интерполяционная[1] теорема, из

[1]Имеется в виду вещественная интерполяция, которая при широком взгляде на вещи и есть наука о разрезании функции на две части с предписанными оценками.

которой следует, что если T и T^* — операторы Кальдерона–Зигмунда (где T^* — оператор, сопряженный к T), то любую функцию $f \in L^p$, $1 < p < \infty$, можно разбить на сумму двух функций $g \in L^\infty$ и $b \in L^1$ так, что не только $\|g\|_\infty \leq C\alpha$ и $\|b\|_1 \leq C\alpha^{1-p}\|f\|_p^p$, но и $\|T(g)\|_\infty \leq C\alpha$ для любого уровня $\alpha > 0$.

В §1.5 мы для полноты приводим подробное доказательство двух элементарных утверждений о многопараметрических классах Харди из §1.2 диссертации. Первое утверждение о том, что функция, преобразование Фурье которой сосредоточено в параллелепипеде с положительными координатами, принадлежит аналитическому многопараметрическому классу Харди с удобной оценкой нормы, и второе о том, что многопараметрическая квадратичная функция S_ψ^n действует ограниченно из $H_n^p(\mathbb{R}^n)$ в $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Вторая глава диссертации посвящена доказательству теоремы 1.

В §2.1 вкратце описывается история вопроса и приводится формулировка теоремы.

Принципиальный момент в доказательстве этой теоремы состоит в том, что по сути мы имеем дело с оценкой в классах Харди, а не в лебеговых пространствах. В §2.2 демонстрируется, как именно теорема сводится к вопросу об ограниченности двух вспомогательных операторов на многопараметрических классах Харди. Во избежание громоздких выкладок, мы рассматриваем ситуацию $n = 2$ (ввиду того, что используется общая теория Кэрбэри–Сигера, которая, в отличие от теории Р. Феффермана, применима к ситуации $n \geq 2$, наши рассуждения затем легко распространяются на случай произвольного n, см. §2.5 диссертации). Вначале рассматривается частный случай, когда все прямоугольники Δ_m — "почти" диадические (а именно, получены из диадических увеличением длин сторон в 8 раз с сохранением координат левой нижней вершины; требование о том, чтобы они попарно не пересекались, при этом сохраняется). Теорема в этом частном случае сводится к ограниченности некоторого оператора S на пространствах $H_2^p(\mathbb{R}^2, l^2)$, $0 < p \leq 2$ (в этом месте используется лемма из §1.2 диссертации о том, что функция, преобразование Фурье которой сосредоточено в прямоугольнике с положительными координатами, принадлежит классу Харди). Оператор S не сверточный и, что еще важнее, действие этого оператора не выражается через последовательное применение его одномерных аналогов отдельно по каждой переменной. Далее, отложив доказательство ограниченности оператора S, мы обсуждаем, как свести нашу теорему к рассмотренному частному случаю с помощью другого вспомогательного оператора R. Действие этого оператора заключается в том, что он некоторым образом "разрезает на части" носитель преобразования Фурье функции, к которой он применяется. В отличие от оператора S, оператор R сверточный и легко выражается через свои одномерные аналоги. Нам требуется его ограниченность на классах $H_2^p(\mathbb{R}^2, l^2)$, проверку которой мы также откладываем. Из этих утверждений с отложенными доказательствами основной результат главы получается мгновенно.

В §2.3 мы доказываем ограниченность операторов S и R. Их L^2-ограниченность сразу следует из теоремы Планшереля. Если доказать ограниченность этих операторов на классах $H_2^p(\mathbb{R}^2)$ при $0 < p \leq 1$, то для остальных p она последует из интерполяционных соображений. Вначале рассматривается оператор S. Он не является в точном смысле многопараметрическим оператором Кальдерона–Зигмунда (например, он не укладывается в определения из статей [9, 12]), однако мы формулируем лемму, которая служит заменой условию гладкости для его ядра. Затем вкратце объясняется как, используя эту лемму, проверять для оператора S условие теоремы Р. Феффермана об ограниченности операторов на двухпараметрических классах Харди. После чего, уже со всеми подробностями, проводится доказательство ограниченности оператора S методами теории Кэрбэри–Сигера. Когда это проделано, остается разобраться с оператором R. Мы предварительно формулируем оценку, которая является условием гладкости для ядра одномерного аналога оператора R. Затем, используя эту оценку, методами теории Кэрбэри–Сигера мы проверяем ограниченность оператора R на многопараметрических классах Харди, причем выкладки оказываются значительно проще, чем для оператора S (ввиду того, что оператор R более стандартен и действие этого оператора на функцию выражается через последовательное применение его одномерных аналогов отдельно по каждой переменной).

В §2.4 проверяются условия гладкости для ядер операторов S и R, упомчнутые выше. Подобные условия проверялись и раньше многими авторами, но ввиду некоторых технических отличий мы не можем сослаться ни на одну из их работ.

В §2.5 мы рассматриваем ситуацию произвольного n (напомним, что до этого момента мы рассматривали случай $n = 2$). Мы демонстрируем, что все наши рассуждения легко переносятся на случай $n \geq 2$.

В третьей главе идет речь о квадратичной функции G^*_λ. Доказывается теорема 2 и различные следствия из нее.

В §3.1 приводится определение оператора G^*_λ, после чего формулируется основная теорема (теорема 2).

В §3.2 обсуждаются следствия из основной теоремы. В начале параграфа мы приводим определение квадратичной функции G — аналога опреатора G_2^* в единичном круге. Затем формулируется интерполяционная лемма, впервые доказанная Джонсом и Мюллером (см. [11]) с помощью броуновского движения, которая утверждает, что при $2 < p < \infty$ функцию $f \in \mathcal{H}^p(\mathbb{T})$ (здесь $\mathcal{H}^p(\mathbb{T})$ — аналитические классы Харди на окружности) можно разбить на сумму двух функций $g \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{T})$ и $b \in \mathcal{H}^2(\mathbb{T})$ так, что не только $\|g\|_\infty \leq C\lambda$ и $\|b\|_2^2 \leq C\lambda^{2-p}\|f\|_p^p$, но и $\|G(g)\|_\infty \leq C\lambda$ для любого уровня $\lambda > 0$. Однако Анисимов и Кисляков в работе [1] показали, что функцию G можно трактовать как норму от значений сингулярного интегрального оператора, что позволяет доказать это утверждение о "разрезании" функции общими методами, не апеллирующими к броуновскому движению. Но мы уже знаем, что функция G_λ^* также выражается через оператор Кальдерона–Зигмунда. Используя этот факт (если говорить точно, то мы пользуемся тем, что T^* — оператор Кальдерона–Зигмунда), мы доказываем аналог утверждения Джонса и Мюллера для оператора G_λ^*. Теперь заметим, что наша основная теорема дополнительно утверждает, что при $\lambda > 2 + 2/n$ прямой оператор T также является оператором типа Кальдерона–Зигмунда. Это, во-первых, позволяет нам формулировать аналог утверждения о разбиении функции сразу для всех $1 < p < \infty$, а во-вторых, отсюда следует, что G_λ^* — оператор слабого типа $(1, 1)$ (причем эта оценка оказывается точной: проверяется, что оператор G_λ^* не действует из L^1 в L^1).

В §3.3 мы проверяем условие гладкости для ядра оператора T^* и тем самым доказываем первую часть теоремы.

В §3.4 мы доказываем вторую часть теоремы, проверяя другой вариант условия гладкости для ядра прямого оператора T.

Список литературы

[1] Анисимов Д. С., Кисляков С. В., *Двойные сингулярные интегралы: интерполяция и исправление*, Алгебра и анализ, Том 16, №5 (2004), 1–33

[2] Кисляков С. В., Парилов Д. В., *О теореме Литлвуда–Пэли для произвольных интервалов*, Записки научных семинаров ПОМИ им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Том 327 (2005), 98–114

[3] Стейн И., *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Издательство "Мир" Москва, 1973

[4] Bourgain J., *On square functions on the trigonometric system*, Bull. Soc. Math. Belg., Vol. 37, No. 1 (1985), 20–26

[5] Bourgain J., *Some consequences of Pisier's approach to interpolation*, Isr. J. Math., Vol. 77 (1992), 165–185

[6] Carbery Anthony and Seeger Andreas, *H^p- and L^p-variants of multiparameter Calderón–Zygmund theory*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 334, No. 2 (1992), 719–747

[7] Chang Sun-Yung A. and Fefferman Robert, *A continuous version of duality of H^1 with BMO on the bidisc*, Ann. of Math., Vol. 112, No. 1 (1980), 179–201

[8] Fefferman C., *Inequalities for strongly singular convolution operators*, Acta Math., Vol. 124 (1970), 9–36

[9] Fefferman Robert, *Calderón–Zygmund theory for product domains: H^p spaces*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, Vol. 83 (1986), 840–843

[10] Gundy R. F. and Stein E. M., *H^p theory for the poly-disc*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, Vol. 76 (1979), 1026–1029

[11] Jones P. W. and Müller P. F. X., *Conditioned Brownian motion and multipliers into SL^∞*, Geom. Funct. Anal., Vol. 14 (2004), 319–379

[12] Journé Jean-Lin, *Calderón–Zygmund operators on product spaces*, Rev. Mat. Iberoamer., Vol. 1 , No. 3 (1985), 55–91

[13] Kislyakov S. V., *Interpolation of H^p-spaces: some recent developments*, Israel Math. Conf. Proc., Vol. 13 (1999), 102–140

[14] Rubio de Francia J. L., *A Littlewood–Paley inequality for arbitrary intervals*, Rev. Mat. Iberoamer., Vol. 1, No. 2 (1985), 1–14

[15] Stein Elias M., *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton, New Jersey (1993)

Публикации автора по теме диссертации

[16] Осипов Н. Н., *Неравенство Литлвуда–Пэли для произвольных прямоугольников в $\mathbb{R}^2$ при $0 < p \leq 2$*, Алгебра и анализ, Том 22, №2 (2010), 164–184

[17] Осипов Н. Н., *Одностороннее неравенство Литлвуда–Пэли в $\mathbb{R}^n$ для $0 < p \leq 2$*, Записки научных семинаров ПОМИ им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Том 376 (2010), 88–115

[18] Осипов Н. Н., *Функция G_λ^* как норма оператора Кальдерона–Зигмунда*, Математические заметки, Том 86, №3 (2009), 421–428