На правах рукописи

ЧИРИКОВ АНТОН МИХАЙЛОВИЧ

НОВЫЕ ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ 2011

Работа выполнена на кафедре математического анализа математического факультета Российского Государственного Педагогического Университета им. Герцена

Научный руководитель

доктор физико-математических наук, профессор

Широков Николай Алексеевич

Официальные оппоненты

доктор физико-математических наук,

Дубцов Евгений Сергеевич

кандидат физико-математических наук, доцент

Васин Андрей Васильевич

Ведущая организация

Санкт-Петербургский Государственный Электротехнический Университет

Защита состоится «_» _____ 2011 года в ___ часов на заседании диссертационного совета Д.002.202.01 в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В.А. Стеклова РАН по адресу 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ПОМИ РАН

Авто реферат разослан «_» _____ 2011 г.

Учёный секретарь

диссертационного совета,

доктор физико-математических наук А.Ю. Зайцев

Общая характеристика работы.

Актуальность темы. Связь между поведением коэффициентов Тейлора аналитической в единичном круге D функции и её убыванием на радиусе является одним из существенных вопросов теории аналитических функций. Например, если речь идёт о возможной максимальной скорости убывания на [0,1] аналитической в D функции с редкими коэффициентами, то начало этих исследований было положено в работе Л. Шварца 1943 г. [1]. Дальнейшее развитие относится к работам И. Хиршмана и Дж. Дженкинса [2] и Дж.М. Андерсона 1976 года [3]. В работе Шварца и Хиршмана и Дженкинса рассматривались не степенные ряды, а ряды из экспонент с естественным обобщением убывания по радиусу, а в работе Андерсона изучались лакунарные по Адамару степенные ряды и выяснялась возможная скорость их убывания на радиусе $(0, 1)$.

Утверждение Шварца, Хиршмана–Дженкинса имеет вид теоремы единственности для рядов из экспонент: если количество показателей с ненулевыми коэффициентами на промежутке [0, A], растёт медленнее A, то сумма соответствующего ряда при $x \to +0$ не может иметь быстро убывающую мажоранту. Возможный порядок убывания (точнее, порядок убывания логарифма мажоранты) указывается в этой работе точно. Работа Андерсона посвящена ситуации, при которой количество ненулевых показателей растёт не быстрее $C \log A$, получающийся результат опять имеет вид теоремы единственности. Возможная минимальная мажоранта имеет в таком случае меньший порядок убывания, чем в теоремах Шварца и Хиршмана–Дженкинса, в которых логарифм мажоранты имеет степенной характер роста при $x \to +0$. Опыт применения различных теорем единственности в анализе показывает, что чем точнее теорема единственности, тем более сильные применения она может находить. В связи с упоминаемыми результатами Шварца, Хиршмана–Дженкинса было принципиально важно, возможно ли указать минимальную мажоранту ряда из редких экспонент (или степенного ряда с редкими показателями) более точно, чем только указание порядка роста логарифма этой мажоранты.

Первые такие результаты были получены в монографии Н.А. Широкова [4], гл. 3, и в работе Ф.Л. Назарова и Н.А. Широкова [11]. Ограничения на редкость коэффициентов при этом носит достаточно специальный характер. Существенно было выяснить, возможно ли рассматривать в упомянутом контексте и более общие ситуации.

В работе Н.А. Широкова [4], гл. 3, была приведена также теорема единственности для степенных рядов, в которой сопоставлялись возможные мажоранты для величины коэффициентов и для значений ряда на радиусе (0,1). Мажоранта для коэффициентов при этом фактически предполагалась лишь начиная с некоторого номера. Поскольку тождественный ноль является минимальной мажорантой, то нетривиальные теоремы единственности возникают лишь тогда, когда отсутствуют примеры степенных рядов, удовлетворяющих нужному ограничению и являющихся полиномами. Например, полиномы $(1-x)^N$при любом натуральном N не должны удовлетворять соответствующим ограничениям.

Следовательно, как это и было описано в [4], гл. 3, если рассматривать мажоранту для $f(x)$ вида

$$C_1 \exp\left(-C|\log(1-x)|\right), \qquad (*)$$

то функция $f(x)$ может быть полиномом $(1-x)^N$, все коэффициенты которого начиная с номера $N+1$ равны нулю.

Если же степенной ряд $f(x)$ убывает быстрее, чем в $(*)$, например, если справедлива оценка $|f(x)| \leq C_1 \exp\left(-C|\log(1-x)|^\lambda\right)$ с некоторыми C, $C_1 > 0$, $\lambda > 1$, то в [4], гл. 3, показано, что у коэффициентов этого степенного ряда $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ не может быть слишком малой мажоранты для коэффициентов. Именно, если $|c_n| \leq C_2 \exp(-C^{'}\sqrt{n})$ с некоторыми постоянными C_2, $C^{'} > 0$, то $f \equiv 0$. Выражение $C^{'}\sqrt{N}$ оказалось в определённом смысле неулучшаемым: для всякого p, $0 < p < \frac{1}{2}$, можно подобрать такой степенной ряд $f_p(x)$, $f_p(x) \not\equiv 0$, с радиусом сходимости 1, $f_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,p} x^n$, что

$$|f_p(x)| \le C_{1p} \exp\left(-C_p |\log(1-x)|^{\lambda}\right) \qquad (**)$$

с некоторыми $C_{1p}, C_p > 0, \lambda > 1$, но при этом

$$|C_{n,p}| \le C_{2p} \exp\left(-C_p^{'} n^p\right) \qquad (***)$$

Таким образом, оставался открытым вопрос, обычный для многих разделов анализа, является ли мажоранта

$$C_2 \exp\left(-C^{'} \sqrt{N}\right) \qquad (****)$$

действительно наименьшей мажорантой для справедливости теорем единственности приведённого выше типа, или же для них существуют принципиально меньшие мажоранты для коэффициентов.

Определённым аргументом в пользу возможного утверждения о том, что семейство мажорант $C \exp\left(-C^{'} \sqrt{N}\right)$ содержит все минимальные мажоранты для обсуждаемых теорем единственности, является факт, в силу которого при выполнении оценки $(***)$ вместо оценки $(**)$ оказывается справедлива лучшая оценка $|f(x)| \le C^{''} \exp\left(-C_0 (1-x)^{q(p)}\right)$, причём $q(p) \to \infty$ при $p \to \frac{1}{2}$.

Вопрос о возможном “зазоре” между допустимыми неравенствами $|c_n| \le C^{'} \exp\left(-C n^p\right)$, $p < \frac{1}{2}$, и неравенствами $|c_n| \le C^{'} \exp\left(-C n^{1/2}\right)$, влекущими теорему единственности, оставался открытым.

Цель работы. Цель работы состоит в исследовании вопроса о возможной скорости убывания аналитической в единичном круге функции $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{n_k}$, $f \not\equiv 0$, на луче $(0,1)$ при $x \to 1-0$, если ее ненулевые коэффициенты a_k достаточно редки, а именно : $n_k \ge A_0 (k+2)^p \log^b (k+2)$, а также вопроса о возможной скорости убывания $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{n_k}$, $f \not\equiv 0$, на луче $(0,1)$ при $x \to 1-0$, при ограничении на рост коэффициентов a_k, а именно: $|a_k| \le C_2 e^{-C_3 \frac{\sqrt{k}}{\log(k+2)}}$.

Методы исследований. В работе применяются общие методы комплексного и гармонического анализа. Важную роль играет метод Лапласа для получения асимптотических оценок.

Основные результаты. В диссертации получены следующие результаты:

(1) Найдено ограничение на возможную скорость убывания аналитичной в единичном круге функции, при определённых условиях на редкость её ненулевых тэйлоровских коэффициентов.

(2) Найдено ограничение на возможную скорость убывания аналитичной в единичном круге функции, при определенных условиях на скорость убывания её тэйлоровских коэффициентов

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Её методы могут использоваться в других задачах, связанных с возможной скоростью убывания функций при определённых условиях, наложенных на её тейлоровские коэффициенты (на редкость ненулевых коэффициентов или на скорость их убывания)

Апробация работы. Результаты работы докладывались на семинаре по теории операторов и комплексному анализу в ПОМИ РАН в 2010 году.

Публикации. По теме диссертации опубликованы 3 работы, 2 из которых в журналах входящих в список ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения и двух глав, разбитых на 6 параграфов, изложена на 67 страницах. Список литературы включает 11 названий.

Содержание работы

В главе I рассматривается случай, когда функция $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{n_k}$, $f \not\equiv 0$, аналитична в единичном круге D , а последовательность $\{n_k\}$ достаточно редка, и исследуется зависимость между редкостью последовательности $\{n_k\}$ и максимально возможной скоростью убывания $f(z)$ при $x \to 1-0$.

Поскольку доказательство теорем в данной работе содержит много технических деталей, опишем предварительно общие идеи, на которые опирается доказательство. Если функция f убывает на радиусе слишком быстро, то используя стандартные методы вычисления асимптотик интегралов, можно получить утверждение о достаточно быстром убывании преобразования Лапласа на полуоси. При этом метод Лапласа для асимптотических оценок даёт точные постоянные в окончательных формулах.

С другой стороны, преодолев некоторые технические сложности, можно обнаружить, что преобразование Лапласа в нашей ситуации является мероморфной функцией с полюсами, соответствующими степеням z в исходной задаче. Эта мероморфная функция быстро убывает на оси, откуда следует густое расположением её полюсов на плоскости. В нашей ситуации соответствующие оценки могут быть получены из оценок специального бесконечного произведения, при построении которого существенно учитываются требования, предъявляемые к встречающимся в исходной задаче степеням z. Проведя оценки, связанные с распределением полюсов мероморфной функции, и сравнив их с полученной заранее скоростью убывания, получим, что недостаточное количество полюсов не может обеспечить слишком высокую скорость убывания на луче, что и приводит к непосредственному вычислению констант, указанных в теореме 1.

Перейдем к формальному изложению результатов первой главы.

В параграфе 1 ставится задача в полной формулировке, доказывается лемма 1, вводятся вспомогательные функции $F(\sigma) = f(e^{-\sigma})$, $\varphi(z) =$

$\int_0^\infty F(\sigma)e^{\sigma z}d\sigma$, **Re** $\quad z<0$, $\varphi_\delta(z)=\int_0^\infty F(\sigma+\delta)e^{\sigma z}d\sigma$, $\delta>0$, и доказывается, что порядок функции $\varphi_\delta(z)<\dfrac{1}{2}$. Вводятся функции $\psi(z)=\prod_{k=2}^{\infty}(1-\dfrac{z}{n_k})$, $\omega(z)=\varphi_\delta(z)\psi(z)$.

В параграфе 2 вводится функция

$$\psi_0(z)=\prod_{k=2}^{\infty}\left(1-\frac{z}{A_0k^p\,(\log k)^b}\right)$$

и доказывается

Лемма 2. *Пусть* $n_k^0=Ak^p(\log k)^b, \quad k\geq 2,$

$$\psi_0(z)=\prod_{k=2}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n_k^0}\right)$$

Тогда

$$\log|\psi_0(-x)|=(1+o(1))\left(\tfrac{p^b}{A}\right)^{\frac{1}{p}}x^{\frac{1}{p}}(\log x)^{-\frac{b}{p}}\tfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}},$$

$$x>0, x\to+\infty$$

В параграфе 3 формулируется и доказывается

Теорема 1. *Пусть функция* $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{n_k}, f\not\equiv 0$ *и последовательность* $\{n_k\}$ *удовлетворяют соотношениям*

$$n_k\geq A_0(k+2)^p\log(k+2)^b,$$

$$|f(x)|\leq C'e^{-C_0(1-x)^{-s}(\log\frac{1}{1-x})^{\tilde{b}}}, \quad \frac{1}{e}<x<1$$

Тогда

(a) $\dfrac{s}{s+1}\leq\dfrac{1}{p}$;

если

(b) $s = s_0, \dfrac{s_0}{s_0+1} = \dfrac{1}{p}$, *то* $\dfrac{\widetilde{b}}{s_0+1} \geq -\dfrac{b}{p}$;

если

(c) $\widetilde{b} = \widetilde{b_0}, \dfrac{\widetilde{b_0}}{s_0+1} = -\dfrac{b}{p}$, *то*

$$C_0^{\frac{1}{s_0+1}} (s_0+1)^{\frac{s_0+1-\widetilde{b_0}}{s_0+1}} s_0^{-\frac{s_0}{s_0+1}} \leq \left(\frac{p^b}{A}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}.$$

В главе II рассматривается случай, когда функция $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n, f \not\equiv 0$, аналитична в единичном круге D, $|a_n| \leq C_2 \exp\left(-C_3 \dfrac{\sqrt{n}}{\log(n+2)}\right)$, $n \geq 0$ (ограничение на рост коэффициентов Тейлора функции $f(z)$) и исследуется зависимость между ограничением на рост коэффициентов Тейлора $f(z)$ и ее максимально возможной скоростью убывания на луче (0,1) при $x \to 1-0$.

Доказательство теоремы 2 формально состоит из комбинации технических приёмов, поэтому сначала мы приведём неформальное описание. Как и при доказательстве теоремы 1, скорость убывания функции на радиусе после применения преобразования Лапласа и использования метода Лапласа оценки асимптотического поведения интеграла даёт определённую скорость убывания этого преобразования на луче. Вновь преобразование Лапласа оказывается мероморфной функцией с простыми полюсами, которые на этот раз совпадают с целыми неотрицательными числами. Если предполагать быстрое убывание коэффициентов Тейлора в исходной задаче, то вне круга фиксированного радиуса мероморфную функцию – преобразование Лапласа – удаётся очень хорошо приблизить частичной суммой из простейших дробей.

При этом оказывается, что применение теоремы Адамара о трёх кругах улучшает первоначальные оценки для указанной частичной суммы. Теорему

Адамара о трёх кругах нельзя применять к преобразованию Лапласа, поэтому для дальнейших действий требуется выбирать приближающие частичные суммы специальным образом. Всякий раз применение теоремы Адамара о трёх кругах улучшает предыдущую оценку и после третьей итерации на границе полуоси, содержащей внутри целые неотрицательные точки, удаётся получить оценку сверху для преобразования Лапласа, которое противоречит варианту теоремы единственности для соответствующей области, что и заканчивает доказательство теоремы 2.

Перейдём теперь к формальному изложению результатов второй главы.

В параграфе 0 формулируется

Теорема 2. *Пусть функция* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *аналитична в круге* D. *Предположим, что существуют такие постоянные* $\lambda > 1, C_0, C_1, C_2, C_3 > 0$, *что выполняются условия*

$$|f(x)| \le C_0 \exp\left(-C_1 \left|\log(1-x)\right|^{\lambda}\right), \quad \frac{1}{2} < x < 1,$$

$$|a_n| \le C_2 \exp\left(-C_3 \frac{\sqrt{n}}{\log(n+2)}\right), \quad n \ge 0.$$

Тогда $f(x) \equiv 0$.

В параграфе 1 вводится функции $F(s) = f\left(e^{-s}\right)$, $\varphi(\zeta) = \int_0^{\infty} F(s) e^{s\zeta} ds$, $\mathbf{Re} \quad \zeta < 0$, множество $T = [-1-i, -1+i] \cup [-1-i, +\infty+i] \cup [-1+i, +\infty+i]$, $h_N(\zeta) = \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{n-\zeta}$ и производится первая итерация процесса доказательства: При $\mu = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda}$ доказывается оценка

$$|h_N(\zeta)| \le C_9 e^{-C_{19} \frac{N^{\mu}}{\log(N+2)}}, \qquad (*')$$

справедливая при $|\zeta| \ge 4N$.

В параграфе 2 неравенства, аналогичные $(*')$, усиливаются и рассматриваются для $h_{\rho_{N(1)}}$ и $h_{\rho_{N(2)}}$, выбираемых соответствующим образом, что завершает доказательство теоремы.

Список литературы

1. Schwartz L., Etudes des sommes d'exponentielles relles. Paris, 1943.

2. Hirschman I.I., Jenkis J. A., On lacunary Dirichlet series. Proc. Amer.Math.Soc., v.1, N4, 512–517, 1950.

3. Anderson J.M., Bounded analytic functions with Hadamard gaps. Mathematics, v.23, 2, 142–147, 1976.

4. Shirokov N.A., Analytic functions smooth up to the boundary. Lecture Notes in Math., v. 1213, 1988.

5. Назаров Ф.Л., Широков Н.А., Об убывании (P, A)-лакунарных рядов. Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 327, 135–149, 2005.

Публикации по теме диссертации

1. Чириков А.М., Широков Н. А., Слаболакунарные ряды. Вестник Санкт-Петербургского университета, 2009, сер. 1, вып. 4, 62–66.

2. Чириков А.М., Степенные ряды с быстроубывающими коэффициентами. Зап. научн. семин. ПОМИ, 2010, т. 376, 167–175.

3. Чириков А.М., Широков Н.А., Скорость убывания слабокунарных рядов. Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского. Казанское математическое общество. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Материалы Девятой международной Казанской летней научной школы-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы». Казань: Изд-во КГУ, 2009. – т. 38., 301.