На правах рукописи

ДЕМЧЕНКО Максим Николаевич

ДИНАМИЧЕСКАЯ ТРЕХМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ МАКСВЕЛЛА

специальность 01.01.03 — математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2011

Работа выполнена в лаборатории математических проблем геофизики Учреждения Российской академии наук Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А. Стеклова РАН.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
БЕЛИШЕВ Михаил Игоревич

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, доцент
БЛАГОВЕЩЕНСКИЙ Александр Сергеевич,

доктор физико-математических наук, доцент
ПЕСТОВ Леонид Николаевич

Ведущая организация:
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Защита состоится "_____" ____________ 2011 года в ______ часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В.А. Стеклова РАН по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А. Стеклова РАН.

Автореферат разослан "_____" ____________ 2011 года.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук

А.Ю. Зайцев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Тема диссертации – трехмерная обратная задача электродинамики в оптимальной по времени постановке. Задача представляет интерес с теоретической точки зрения, а также имеет ряд важных приложений в геоэлектрике, зондировании атмосферы (см. [1]).

Цель работы. В работе рассматривается система Максвелла на компактном ориентированном гладком римановом 3-многообразии $\overline{\Omega}$ со связным краем (символом Ω обозначается внутренняя часть многообразия). Пусть ε, μ – гладкие положительные в $\overline{\Omega}$ функции, представляющие диэлектрическую и магнитную проницаемости среды. Начально-краевая задача

$$\begin{aligned}
&e_t = \varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\, h, \quad h_t = -\mu^{-1}\mathrm{rot}\, e, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T),\\
&e\mid_{t=0} = h\mid_{t=0} = 0,\\
&e_\theta \mid_{\partial\Omega\times[0,T]} = f
\end{aligned} \tag{1}$$

($T > 0$, $(\cdot)_\theta$ – касательная составляющая вектора на $\partial\Omega$) описывает электрическое и магнитное поля (соответственно, $e(x,t)$ и $h(x,t)$) в Ω, индуцированные *граничным управлением* f, которое представляет собой касательное поле на Γ, зависящее от времени $t \in (0,T)$. При достаточно гладком f задача имеет единственное классическое решение $\{e^f, h^f\}$.

Целью работы является решение обратной задачи для системы Максвелла в двух постановках. В первой постановке предполагается, что $\varepsilon = \mu = 1$, и требуется восстановить риманово многообразие $\overline{\Omega}$ с точностью до изометрии. Данными обратной задачи служит *оператор реакции*

$$R^T : f \mapsto -\nu \times h^f \mid_{\partial\Omega\times[0,T]}$$

(ν – единичная внутренняя нормаль к границе), описывающий отклик системы на различные управления. Поскольку электромагнитные волны распространяются с конечной скоростью, речь идет о восстановлении некоторого подмножества $\overline{\Omega}$, зависящего от времени граничных измерений (величина T в задаче (1)). Простые кинематические соображения приводят к тому, что оператор реакции R^{2T} определяется приграничным слоем толщины T. В силу этого естественная (оптимальная по времени) постановка обратной задачи состоит в восстановлении этого слоя по R^{2T}.

Во второй постановке обратной задачи Ω будет заданной областью в $\mathbb{R}^3$, а ε, μ – неизвестными функциями. Как и в первом случае, по граничным измерениям можно восстановить коэффициенты в приграничном слое оптической толщины T, при этом оптическая метрика определяется скоростью распространения электромагнитных волн:

$$c = (\varepsilon\mu)^{-1/2}. \tag{2}$$

Методика исследований. Для решения обратной задачи электродинамики в работе используется BC-метод (Boundary Control Method; М.И. Белишев, 1986 г.), основанный на связи обратных задач с теорией граничного управления. Используются результаты геометрии, асимптотических методов в теории распространения волн, теории управления.

В применении BC-метода первым шагом является построение модели исследуемой динамической системы по данным обратной задачи. Эта модель включает в себя гильбертово пространство, заменяющее пространство состояний системы, и действующий в этом пространстве оператор, который в нашем случае является унитарно эквивалентным оператору Максвелла.

В случае обратной задачи в области используется следующая схема:

1. По данным обратной задачи строится модель динамической системы Максвелла.

2. Строятся изображения волн, описывающие внутренние состояния системы.

3. По изображениям волн определяется скорость, а затем раздельно коэффициенты ε, μ.

В обратной задаче на многообразии с помощью модели строится метрическое пространство, изометричное (недоступному в обратной задаче) исходному риманову многообразию. Точками этого пространства служат пары (γ, τ), где $\tau \in \mathbb{R}_+$, γ – точка края многообразия. Построенное пространство снабжается структурой гладкого многообразия с помощью функции расстояния: локальными координатами точки служат расстояния до трех фиксированных точек.

Научная новизна. Представленные в работе результаты получены в 2008–2011 годах; все они являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в дальнейшем для численного решения динамической обратной задачи для системы Максвелла.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на семинаре по теории дифракции (руководитель В.М. Бабич) в Санкт-Петербургском отделении Математического Института РАН им. В.А. Стеклова, на городском семинаре по математической физике (руководитель Н.Н. Уральцева), а также на конференциях: Дни дифракции (ПОМИ РАН, 2009), Международная конференция по спектральной теории (ММИ им. Эйлера, 2010), Дифференциальные уравнения и смежные вопросы (МГУ, 2011).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в статьях [6]–[8].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, разбитых на разделы, приложения и списка литературы. Объем диссертации – 82 страницы. Список литературы содержит 26 наименований.

Основное содержание диссертации

Введение содержит формулировку главного результата, обзор литературы по теме диссертации, а также общее описание BC-метода, используемого в работе для решения обратной задачи.

Глава 1. Геометрия и функциональные пространства. В главе 1 даны вводные сведения. Символом $\overline{\Omega}$ обозначается компактное ориентированном гладкое риманово 3-многообразие с краем, Ω – внутренняя часть многообразия. Край $\Gamma := \partial\Omega$ предполагается связным. В разделе 1.1 определены векторные (поточечные и дифференциальные) операции на многообразии. В разделе 1.2 введен оптический метрический тензор h, связанный с исходным метрическим тензором g на римановом многообразии следующим образом

$$h_{mn} = \frac{1}{c^2}\, g_{mn}, \quad h^{mn} = c^2\, g^{mn}.$$

Расстояние между двумя точками в этой метрике – это время, за которое электромагнитная волна от источника в одной точке дойдет до другой.

Также определен эйконал в $\overline{\Omega}$

$$\tau(x) := \mathrm{dist}_c(x, \Gamma).$$

Имеет место включение $\tau \in \mathrm{Lip}(\overline{\Omega})$, так как τ является функцией расстояния до множества. Эйконал удовлетворяет известному уравнению

$$|\nabla\tau| = \frac{1}{c}. \tag{3}$$

Почти всюду в $\overline{\Omega}$ определено векторное поле

$$\nu := c\nabla\tau, \tag{4}$$

удовлетворяющее равенству $|\nu| = 1$ п.в. в $\overline{\Omega}$ в силу (3).

Введем семейство подмножеств Ω

$$\Omega^s := \{x \in \Omega \,|\, \tau(x) < s\}$$

и эквидистант границы

$$\Gamma^s := \{x \in \Omega \,|\, \tau(x) = s\},$$

где $s > 0$. Положим

$$T_* := \max_{\Omega} \tau.$$

Ясно, что при $s > T_*$ множество Ω^s пусто.

Сформулируем предположение, при котором доказывается разрешимость обратной задачи в евклидовой области Ω.

Условие 1. *Ограниченная область* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *имеет гладкую границу, состоящую из одной компоненты связности. Положительное число* T *удовлетворяет неравенству* $T < T_*$. *При п.в.* $s \in (0, T)$ *выполнено* $\partial\Omega^s \in \mathrm{Lip}$. *Кроме того, это условие выполнено для* $s = T$.

Введем полугеодезические координаты в Ω с базой на границе. Пусть l_γ – геодезическая (относительно оптической метрики), выпущенная из $\gamma \in \Gamma$ ортогонально границе, а $l_\gamma[0,\tau]$ – ее сегмент оптической длины $\tau > 0$ (не превосходящей длины l_γ), один из концов которого совпадает с γ. Другой конец $l_\gamma[0,\tau]$ мы обозначим $x(\gamma,\tau)$. Здесь величина τ

совпадает со значением эйконала в точке $x(\gamma, \tau)$. Если на Γ определены локальные координаты (γ^1, γ^2), то набор $(\gamma^1(\gamma), \gamma^2(\gamma), \tau)$ называется полугеодезическими координатами точки x.

Однако, не для каждой точки пара (γ, τ) определена однозначно (неоднозначным может быть выбор γ). Чтобы описать такие точки определим множество раздела ω многообразия $\overline{\Omega}$ относительно Γ следующим образом. Для каждого $\gamma \in \Gamma$ определена критическая величина $\tau_*(\gamma)$, такая что для любого $\tau < \tau_*(\gamma)$ точка γ является единственной ближайшей к $x(\gamma, \tau)$ точкой границы, а при $\tau > \tau_*(\gamma)$ это не выполняется (функция τ_* непрерывна на Γ). Положим по определению

$$\omega := \bigcup_{\gamma \in \Gamma} x(\gamma, \tau_*(\gamma)) \subset \Omega.$$

Множество ω замкнуто и имеет нулевую меру, а отображение

$$x \mapsto (\gamma(x), \tau(x))$$

является гладким диффеоморфизмом, переводящим $\Omega \setminus \omega$ в множество

$$\Theta := \big\{(\gamma, \tau) \,|\, \gamma \in \Gamma, 0 < \tau < \tau_*(\gamma)\big\} \subset \Gamma \times \mathbb{R}_+, \qquad (5)$$

которое называется *выкройкой многообразия* $\overline{\Omega}$.

Отметим, что эйконал τ и поле ν являются гладкими вне ω. Поверхность $\Gamma^s \setminus \omega$ также является гладкой, будучи поверхностью уровня функции τ. При этом $\nu(x)$, $x \in \Omega \setminus \omega$, есть единичная нормаль к $\Gamma^{\tau(x)}$ (в метрике g) в точке x, внешняя по отношению к $\Omega^{\tau(x)}$.

В разделе 1.3 введены пространства векторных полей, необходимые для описания электромагнитного поля и изображений. В работе (за исключением раздела 6.1) рассматриваются вещественные пространства.

Определим семейство подпространств соленоидальных полей $J^s_\eta \subset \vec{L}_{2,\eta}(\Omega^T)$ для $s \in (0, T]$ следующим образом:

$$J^s_\eta := \operatorname{clos}_{\vec{L}_{2,\eta}}\{y \in \vec{C}^\infty(\overline{\Omega}) \mid \operatorname{div}(\eta y) = 0, \operatorname{supp} y \subset \Omega^s \cup \Gamma\}.$$

Вводится еще одно семейство подпространств $\vec{L}_{2,\eta}(\Omega^T)$:

$$\mathcal{U}^s_\eta := \operatorname{clos}_{\vec{L}_{2,\eta}}\{\eta^{-1}\operatorname{rot} z \,|\, z \in \vec{C}^\infty(\overline{\Omega}), \operatorname{supp} z \subset \Omega^s \cup \Gamma\}. \qquad (6)$$

Пространство $\mathcal{U}^s_\eta$, вообще говоря, ýже пространства J^s_η, что связано с возможными топологическими особенностями Ω^s.

Ортогональные проекторы на J^s_η, $\mathcal{U}^s_\eta$ и $J^s_\eta \ominus \mathcal{U}^s_\eta$, действующие в J^T_η, обозначаются соответственно P^s_η, E^s_η и B^s_η. Проекторы P^s_η и E^s_η образуют спектральные семейства, сильно непрерывные слева.

Глава 2. Модель динамической системы Максвелла. В главе 2 обсуждаются свойства системы Максвелла, необходимые нам для решения обратной задачи. В разделе 2.1 сформулированы две теоремы, составляющие главный результат работы.

Теорема 1. *Пусть $\overline{\Omega}$ – связное компактное ориентированное гладкое риманово 3-многообразие со связным краем, $\varepsilon = \mu = 1$. Для любого $T \in (0, T_*)$ оператор R^{2T} определяет подобласть $\Omega^T \subset \Omega$ с точностью до изометрии.*

Теорема 2. *Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, скорость c и величина $T > 0$ удовлетворяют Условию 1. Тогда данные*

$$\{R^{2T}, c\,|_\Gamma, \frac{\partial c}{\partial \nu}\,|_\Gamma\} \tag{7}$$

однозначно определяют функции ε и μ в Ω^T.

Дано описание системы Максвелла с точки зрения теории управления. Через $\vec{\mathcal{L}}_2(\Gamma)$ обозначим пространство квадратично суммируемых касательных полей на Γ. Введем пространство управлений

$$\mathcal{F}^T := L_2([0,T]; \vec{\mathcal{L}}_2(\Gamma))$$

и класс $\mathcal{F}^T_0$ гладких управлений, равных нулю вблизи $\Gamma \times \{t = 0\}$.

Также определяется класс управлений

$$\mathcal{F}^T_+ := L_2([0,T]; \vec{H}^1(\Gamma)),$$

где $\vec{H}^1(\Gamma) \subset \vec{\mathcal{L}}_2(\Gamma)$ – векторное пространство Соболева, и *оператор управления*, связанный с системой (1),

$$W^T : f \mapsto e(\cdot, T),$$

действующий из пространства управлений $\mathcal{F}^T$ в пространство $\mathcal{U}^T_\varepsilon$. Этот оператор корректно определен в классе $\mathcal{F}^T_+$ и допускает замыкание. Аналогично определяется магнитный оператор управления

$$W^T_m : f \mapsto h(\cdot, T).$$

Для запаздывающих управлений

$$\mathcal{F}_0^{T,s} := \{ f \in \mathcal{F}_0^T \,|\, \operatorname{supp} f \subset \Gamma \times (T-s, T] \}.$$

сформулировано свойство *приближенной управляемости*

$$\operatorname{clos}_{J_\varepsilon^T} W^T \mathcal{F}_0^{T,s} = \mathcal{U}_\varepsilon^s. \tag{8}$$

С помощью *связывающей формы* на управлениях

$$c^T[f, f'] := (W^T f, W^T f')_{J_\varepsilon^T}$$

и равенства

$$c^T[f, f'] = \frac{1}{2} \left((S^T)^* R^{2T} S^T f, f' \right)_{\mathcal{F}^T}$$

(S^T – оператор нечетного продолжения по времени управлений с интервала $[0, T]$ на интервал $[0, 2T]$) показано, что оператор

$$|W^T| = ((W^T)^* W^T)^{1/2}$$

определяется оператором R^{2T}.

В разделе 2.2 описана модель динамической системы Максвелла,

$$\{ \mathcal{U}_{\varepsilon\#}^T, \mathcal{U}_{\mu\#}^T, |W^T|, |W_m^T| \}, \tag{9}$$

которая может быть построена по данным обратной задачи. Здесь

$$\mathcal{U}_{\varepsilon\#}^T := \mathcal{U}_{\mu\#}^T := \mathcal{F}^T,$$

а $|W^T|$, $|W_m^T|$ – модули операторов W^T и W_m^T, которые могут быть получены по R^{2T}. Мы считаем, что $|W^T|$ и $|W_m^T|$ действуют из $\mathcal{F}^T$ в $\mathcal{U}_{\varepsilon\#}^T$ и в $\mathcal{U}_{\mu\#}^T$ соответственно.

Введен оператор $\mathcal{R}_e^T$, действующий из $\mathcal{U}_\varepsilon^T$ в $\mathcal{U}_\mu^T$ как $\mu^{-1}\mathrm{rot}$, и антисамосопряженный оператор Максвелла в пространстве $\mathcal{U}_\varepsilon^T \oplus \mathcal{U}_\mu^T$

$$\mathcal{M}^T := \begin{pmatrix} 0 & (\mathcal{R}_e^T)^* \\ -\mathcal{R}_e^T & 0 \end{pmatrix}.$$

Показано, как с помощью модели (9) построить оператор в пространстве $\mathcal{U}_{\varepsilon\#}^T \oplus \mathcal{U}_{\mu\#}^T$, унитарно эквивалентный $\mathcal{M}^T$:

$$\mathcal{M}_\#^T = \begin{pmatrix} 0 & (\mathcal{R}_{e\#}^T)^* \\ -\mathcal{R}_{e\#}^T & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_{e\#}^T = (\Phi_m^T)^* \mathcal{R}_e^T \Phi^T.$$

Здесь Φ^T и Φ^T_m – унитарные операторы в следующих полярных разложениях:

$$W^T = \Phi^T |W^T|, \quad W^T_m = \Phi^T_m |W^T_m|.$$

Глава 3. Восстановление риманова многообразия по граничным данным. Глава 3 посвящена решению обратной задачи на римановом многообразии. Для этого используется метод, ранее применявшийся для решения обратной задачи для скалярного волнового уравнения. Этот метод использует приближенную управляемость задачи (1) (соотношение (8)) и геометрию областей влияния для управлений, сосредоточенных на разных частях границы и запаздывающих на разное время.

Управления из класса $\mathcal{F}_0^{T,s}$ порождают поля, сосредоточенные в $\Omega^s \cup \Gamma$. При этом множество таких полей достаточно широкое: натянутое на них подпространство в $\mathcal{U}_\varepsilon^T$ совпадает с $\mathcal{U}_\varepsilon^s$ (если речь идет об электрических полях). Это и есть содержание свойства приближенной управляемости. Аналогичный факт верен для полей, порожденных управлениями класса

$$\mathcal{F}_0^{T,s}[\sigma] := \{ f \in \mathcal{F}_0^{T,s} \,|\, \operatorname{supp} f \subset \sigma \times (T-s, T] \},$$

действующимим на некоторой (открытой) части границы $\sigma \subset \Gamma$. Такие поля сосредоточены в

$$\Omega^s[\sigma] := \{ x \in \Omega \,|\, \operatorname{dist}_c(x, \sigma) < s \},$$

и, более того, в [5] доказано, что подпространство

$$\operatorname{clos}_{\mathcal{U}_\varepsilon^T} W^T \mathcal{F}_0^{T,s}[\sigma] \tag{10}$$

содержит все поля из $\mathcal{U}_\varepsilon^T$, сосредоточенные в $\Omega^s[\sigma]$. В ситуации обратной задачи мы не можем получить непосредственно множества Ω^s, $\Omega^s[\sigma]$, однако, в рамках модели (9) могут быть получены модельные копии пространств $\mathcal{U}_\varepsilon^s$ и (10):

$$\begin{aligned}
&\operatorname{clos}_{\mathcal{U}_{\varepsilon\#}^T} |W^T|\, \mathcal{F}_0^{T,s} = (\Phi^T)^* \mathcal{U}_\varepsilon^s, \\
&\operatorname{clos}_{\mathcal{U}_{\varepsilon\#}^T} |W^T|\, \mathcal{F}_0^{T,s}[\sigma] = (\Phi^T)^* \operatorname{clos}_{\mathcal{U}_\varepsilon^T} W^T\, \mathcal{F}_0^{T,s}[\sigma].
\end{aligned}$$

Используя пространства $\mathcal{U}_\varepsilon^s$ и (10), мы можем построить пространство полей, сосредоточенных в сколь угодно малой окрестности заданной точки (затем мы перейдем к их модельным копиям). Точку x мы параметризуем ее полугеодезическими координатами. Для заданной пары $(\gamma, s) \in \Gamma \times (0, T)$ и $\delta > 0$ вводится пространство

$$\mathcal{U}_\varepsilon(\gamma, s, \delta) := (\mathcal{U}_\varepsilon^s \ominus \mathcal{U}_\varepsilon^{s-\delta}) \bigcap \operatorname{clos}_{J_\varepsilon^T} W^T \mathcal{F}_0^{T,s}[\sigma_\delta(\gamma)],$$

где $\sigma_\delta(\gamma)$ – δ-окрестность точки γ на Γ. В [5] доказывается, что поля из $\mathcal{U}_\varepsilon(\gamma, s, \delta)$ сосредоточены в замыкании множества

$$a_\gamma^{s,\delta} := \Omega^s[\sigma_\delta(\gamma)] \setminus \overline{\Omega^{s-\delta}}.$$

Искомое многообразие строится из точек выкройки Θ^T (а точнее, из некоторого пополнения Θ^T). Для этого сначала нужно по данным обратной задачи определить форму выкройки, то есть график функции τ_* на Γ (определение (5)). С этой целью устанавливается, что неравенство $s \le \tau_*(\gamma)$ имеет место, если и только если для всех (сколь угодно малых) δ множество $a_\gamma^{s,\delta}$ непусто или

$$\mathcal{U}_\varepsilon(\gamma, s, \delta) \neq \{0\}. \tag{11}$$

Действуя в рамках модели (9), вместо условия (11) следует проверять равносильное ему

$$\mathcal{U}_{\varepsilon\#}(\gamma, s, \delta) := (\Phi^T)^* \mathcal{U}_\varepsilon(\gamma, s, \delta) \neq \{0\},$$

в котором пространства $\mathcal{U}_{\varepsilon\#}(\gamma, s, \delta)$ могут быть получены по формуле

$$\mathcal{U}_{\varepsilon\#}(\gamma, s, \delta) = (\mathcal{U}_{\varepsilon\#}^s \ominus \mathcal{U}_{\varepsilon\#}^{s-\delta}) \bigcap \operatorname{clos}_{\mathcal{U}_{\varepsilon\#}^T} |W^T|\, \mathcal{F}_0^{T,s}[\sigma_\delta(\gamma)].$$

Далее пространства $\mathcal{U}_\varepsilon(\gamma, s, \delta)$ и $\mathcal{U}_{\varepsilon\#}(\gamma, s, \delta)$ используются для определения функции расстояния. Пусть $(\gamma, s) \in \Theta^T$. Рассмотрим следующую задачу на функции $E(t)$, $H(t)$ на интервале $[0, T]$ со значениями соответственно в $\mathcal{U}_\varepsilon^T$, $\mathcal{U}_\mu^T$:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} E_t \\ H_t \end{pmatrix} - \mathcal{M}^T \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix}, \\ &E\,|_{t=0} = H\,|_{t=0} = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

где $K \in L_2([0, T]; \mathcal{U}_\varepsilon(\gamma, s, \delta))$. Введем оператор управления для системы (12)

$$W_{\text{vol}}^T : K \mapsto E(T)$$

и применим его к “запаздывающей” на время $T-r$ функции K. Мы получим пространство

$$\mathcal{U}_\varepsilon^r(\gamma,s,\delta) := \operatorname{clos}_{\mathcal{U}_\varepsilon^T}\{\, W_{\mathrm{vol}}^T K \mid K \in L_2([0,T];\mathcal{U}_\varepsilon(\gamma,s,\delta)),\\ \operatorname{supp} K(\cdot) \subset [T-r,T]\,\},$$

элементы которого сосредоточены в r-окрестности множества $a_\gamma^{s,\delta}$, если r достаточно мало (но не зависит от δ); это следует из конечности скорости распространения волн, описываемых системой (12). С помощью пространств $\mathcal{U}_\varepsilon^r(\gamma,s,\delta)$ можно для заданных $(\gamma,s),(\gamma',s') \in \Theta^T$ определить оптическое расстояние между точками $x=x(\gamma,s)$ и $x'=x(\gamma',s')$, при условии, что они достаточно близки. Для этого достаточно проверять условие: для всех (малых) δ выполнено

$$\mathcal{U}_\varepsilon(\gamma',s',\delta)\bigcap \mathcal{U}_\varepsilon^r(\gamma,s,\delta) \neq \{0\}. \tag{13}$$

Это условие выполняется, если $\operatorname{dist}_c(x,x')<r$, и не выполняется, если $\operatorname{dist}_c(x,x')>r$. Причем (13), как и (11), можно заменить на эквивалентное условие для модельных пространств

$$\mathcal{U}_{\varepsilon\#}(\gamma',s',\delta)\bigcap \mathcal{U}_{\varepsilon\#}^r(\gamma,s,\delta) \neq \{0\},$$

где пространство $\mathcal{U}_{\varepsilon\#}^r(\gamma,s,\delta) := (\Phi^T)^*\mathcal{U}_\varepsilon^r(\gamma,s,\delta)$ в модели может быть представлено как

$$\mathcal{U}_{\varepsilon\#}^r(\gamma,s,\delta) = \operatorname{clos}_{\mathcal{U}_{\varepsilon\#}^T}\{\, W_{\mathrm{vol}\#}^T K \mid K \in L_2([0,T];\mathcal{U}_{\varepsilon\#}(\gamma,s,\delta)),\\ \operatorname{supp} K(\cdot) \subset [T-r,T]\,\},$$

а оператор $W_{\mathrm{vol}\#}^T$ может быть построен как оператор управления для задачи, аналогичной (12), с заменой $\mathcal{M}^T$ на $\mathcal{M}_\#^T$.

Таким образом, выкройка Θ^T превращается в метрическое пространство, изометричное $\Omega^T \setminus \omega$. Затем, пополнение по метрике приводит к изометрической копии многообразия Ω^T, что заершает доказательство Теоремы 1.

Глава 4. Преобразование M^T. В главе 4 описан оператор M^T, необходимый для решения обратной задачи в евклидовой области. В этой главе предполагается, что Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с гладкой связной границей, причем выполнено Условие 1. Буквой η обозначен гладкий положительный вес в $\overline{\Omega}$.

В разделе 4.1 определен ограниченный самосопряженный оператор $K^s_\eta : \vec{L}_{2,\eta}(\Omega^T) \to \vec{L}_{2,\eta}(\Omega^T)$, $s \in (0,T]$ через его билинейную форму:

$$(\eta K^s_\eta z, w) = \int_0^s d\xi \,(\eta\,(X^\xi - E^\xi_\eta) z, w), \quad z, w \in \vec{L}_{2,\eta}(\Omega^T). \tag{14}$$

Здесь X^ξ – операция умножения на характеристическую функцию множества Ω^ξ. Показано, что можно расширить по непрерывности оператор $K^T_\eta \eta^{-1}\mathrm{rot}$ с гладких полей $\vec{C}^\infty(\overline{\Omega^T})$ на все $\vec{L}_{2,\eta}(\Omega^T)$. Из этого (переходя к сопряженному оператору) извлекается

Следствие 3. *Для любого поля* $z \in \vec{L}_{2,\eta}(\Omega^T)$ *выполнено* $\mathrm{rot}\, K^T_\eta z \in \vec{L}_{2,\eta}(\Omega^T)$, *причем*

$$\|\mathrm{rot}\, K^T_\eta z\|_{\vec{L}_{2,\eta}(\Omega^T)} \le C\, \|z\|_{\vec{L}_{2,\eta}(\Omega^T)}. \tag{15}$$

В разделе 4.2 введен оператор M^T_η в $\vec{L}_{2,\eta}(\Omega^T)$:

$$M^T_\eta := \Pi - cN \mathrm{rot}\, K^T_\eta. \tag{16}$$

Здесь Π, N – поточечные операторы

$$Nz := \nu \times z, \quad \Pi := -N^2.$$

Последний действует на вектор как ортогональный проектор на плоскость, касательную к $\Gamma^{\tau(x)}$ в точке x. В силу (15) оператор M^T_η ограничен.

Выделим в $\vec{L}_{2,\eta}(\Omega^T)$ подпространство поперечных полей $\vec{\mathcal{L}}_{2,\eta}(\Omega^T)$, состоящее из полей v, для которых выполнено $\langle v(x), \nu(x)\rangle = 0$ при п.в. $x \in \Omega^T$. Для оператора M^T_η установлены включения:

$$\mathrm{Ran}\, M^T_\eta \subset \vec{\mathcal{L}}_{2,\eta}(\Omega^T), \quad \mathrm{Ran}\,(M^T_\eta)^* \subset \mathcal{U}^T_\eta,$$

которые дают повод перейти к сужению оператора M^T на подпространство $\mathcal{U}^T_\eta$:

$$M^T_\eta : \mathcal{U}^T_\eta \to \vec{\mathcal{L}}_{2,\eta}(\Omega^T).$$

Это сужение обозначается тем же символом. Далее получен следующий результат.

Теорема 3. *Оператор* M^T_η *частично изометрический, причем*

$$\mathrm{Ran}\, M^T_\eta = \vec{\mathcal{L}}_{2,\eta}(\Omega^T).$$

Установлено также сплетающее свойство оператора M_η^T.

Теорема 4. *Для любого $s \in (0,T]$ выполнены (эквивалентные) равенства*

$$M_\eta^T E_\eta^s = X^s M_\eta^T, \quad E_\eta^s (M_\eta^T)^* = (M_\eta^T)^* X^s.$$

Получен следующий результат о ядре оператора M_η^T.

Теорема 5. *Пусть $E_{\eta,\,\mathrm{sing}}^s$ – сингулярная составляющая спектрального семейства E_η^s. Верно следующее включение*

$$E_{\eta,\,\mathrm{sing}}^T \mathcal{U}_\eta^T \subset \operatorname{Ker} M_\eta^T.$$

Используя этот факт, можно построить пример, когда оператор M_η^T имеет ядро бесконечной размерности.

В разделе 4.3 получена формула, показывающая согласованность введенного определения M_η^T с определением, данным в работах [2]-[4]. Эта формула необходима для использования оператора M_η^T в решении обратной задачи.

Теорема 6. *Пусть $y \in \vec{C}^\infty(\overline{\Omega^T}) \cap \mathcal{U}_\eta^T$. Тогда при почти всех $s \in (0,T]$ выполнено равенство*

$$M_\eta^T y \mid_{\Gamma^s} = E_\eta^s y \mid_{\Gamma^{s-0}} . \tag{17}$$

В работах [2]-[4] формула (17) была взята за определение оператора M_η^T, поскольку в обратной задаче он возникает именно в таком виде. Однако, корректность этого определения очевидна только в случае, если в Ω^T регулярны полугеодезические координаты (это т.н. регулярная зона), тогда как для произвольных T становится нетривиальным даже тот факт, что поле $M_\eta^T y$, определенное с помощью (17), квадратично суммируемо. Причиной тому является негладкость эквидистант Γ^s (а также их нерегулярная зависимость от s), от которых зависит поведение проекторов E_η^s. Именно поэтому в работах [2], [3] обратная задача решалась в регулярной зоне. Имея цель снять это ограничение, мы используем представление (16), которое позволяет корректно определить M_η^T как ограниченный линейный оператор для произвольного $T \in (0, T_*]$, а также установить его частичную изометричность и полноту образа. Заметим, что свойство унитарности M_η^T, доказанное в [3],

[4] для регулярной зоны, не переносится на общий случай, поскольку, как отмечалось выше, M_η^T может иметь нетривиальное ядро.

В разделе 4.4 описывается оператор

$$M_\mu^T \mu^{-1}\mathrm{rot}\,(M_\varepsilon^T)^* : \vec{\mathcal{L}}_{2,\,\varepsilon}(\Omega^T) \to \vec{\mathcal{L}}_{2,\,\mu}(\Omega^T).$$

Показана корректность определения этого оператора на гладких финитных в $\Omega^T \setminus \omega$ поперечных полях. Для формулировки главного результата раздела 4.4 введем семейство операторов $\{Q_\eta^s\}$, действующих по следующему правилу. Пусть ψ – ограниченная функция в $\overline{\Omega^T}$, гладкая вне любой окрестности множества ω, а для $s \in (0,T]$ выполнено $\partial\Omega^s \in \mathrm{Lip}$. Тогда существует единственное решение $p^s \in H^1(\Omega^s)$ краевой задачи в Ω^s:

$$\mathrm{div}\,(\eta\nabla p^s) = 0, \quad p^s\,|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial p^s}{\partial\nu}\,|_{\Gamma^s} = \psi\,|_{\Gamma^s}\,. \tag{18}$$

Оператор Q_η^s сопоставляет функции ψ функцию в Ω^s следующим образом

$$Q_\eta^s\psi := p^s.$$

В работе получено следующее соотношение

$$\begin{aligned}&M_\mu^T \mu^{-1}\mathrm{rot}\,(M_\varepsilon^T)^* u\,|_{\Gamma^s} = (\Pi\,\mu^{-1}\mathrm{rot}\,v)\,|_{\Gamma^s} + \\ &[-c^{-1}\mu^{-1}N\nabla Q_\varepsilon^s(c\varepsilon^{-1}\,\mathrm{div}\,(\varepsilon v)) + \Pi\nabla Q_\mu^s(c\mu^{-1}\mathrm{div}\,(c^{-1}Nv))]\,|_{\Gamma^{s-0}} - \\ &[c^{-1}\mu^{-1}NB_\varepsilon^s\varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\,(\varepsilon cNv) + B_\mu^s\mu^{-1}\mathrm{rot}\,v]\,|_{\Gamma^{s-0}}\end{aligned} \tag{19}$$

(равенство выполняется при п.в. $s \in (0,T]$ п.в. на Γ^s). Отсюда видно, что рассмотренный оператор имеет следующую особенность: в отличие от $\mu^{-1}\mathrm{rot}$ он не является локальным, что видно из (19). Свойство локальности нарушается из-за присутствия Q^s и B^s. Формула (19) обобщает представление, полученное в работе [2] для регулярной зоны, на случай произвольного $T \in (0, T_*]$.

Глава 5. Обратная задача в области. В главе 5, как и в главе 4, предполагается, что Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с гладкой связной границей.

В разделе 5.1 вводятся изображения волн. Изображениями служат элементы подпространства $\vec{\mathcal{L}}_2(\Theta^T) \subset \mathcal{F}^T$, состоящего из полей, сосредоточенных на выкройке:

$$\vec{\mathcal{L}}_2(\Theta^T) := \{f \in \mathcal{F}^T\,|\,\mathrm{supp}\,f \subset \overline{\Theta^T}\,\}.$$

Определена операция π^s как преобразование касательных полей на $\Gamma^s \setminus \omega$ в касательные поля на Γ, действующее поточечно: $(\pi^s u)(\gamma)$ есть результат параллельного переноса в оптической метрике вектора $u(x(\gamma, s))$ из точки $x(\gamma, s)$ в точку γ вдоль соединяющей их геодезической. Также определена операция π, действующая на поперечные векторные поля в Ω^T по правилу:

$$(\pi u)(\gamma, s) := (\pi^s(u\,|_{\Gamma^s}))\,(\gamma), \quad (\gamma, s) \in \Theta^T.$$

Для $u \in \vec{\mathcal{L}}_2(\Omega^T)$ образ πu принадлежит $\vec{\mathcal{L}}_2(\Theta^T)$.

Введен оператор изображения I^T_η, действующий из $\mathcal{U}^T_\eta$ в $\vec{\mathcal{L}}_2(\Theta^T)$:

$$I^T_\eta := \pi \varkappa_\eta M^T_\eta,$$

где $\varkappa_\eta$ – некоторая гладкая положительная функция в $\Omega \setminus \omega$.

Из Теоремы 3 вытекает, что I^T_η – частично изометрический оператор, причем

$$\operatorname{Ran} I^T_\eta = \vec{\mathcal{L}}_2(\Theta^T).$$

Далее в этом же разделе описано, как можно в условиях обратной задачи получить модельные операторы изображения $I^T_{\varepsilon\#}$, $I^T_{\mu\#}$:

$$I^T_{\varepsilon\#} := I^T_\varepsilon \Phi^T : \mathcal{U}^T_{\varepsilon\#} \to \mathcal{F}^T, \quad I^T_{\mu\#} := I^T_\mu \Phi^T_m : \mathcal{U}^T_{\mu\#} \to \mathcal{F}^T.$$

В разделе 5.2 рассматривается следующий оператор в $\vec{\mathcal{L}}_2(\Theta^T)$

$$\widetilde{\mathcal{R}}^T_e := I^T_\mu \mathcal{R}^T_e (I^T_\varepsilon)^*.$$

Показано, что $\widetilde{\mathcal{R}}^T_e$ корректно определен на гладких финитных полях на выкройке. Установлено равенство

$$\widetilde{\mathcal{R}}^T_e = I^T_{\mu\#}\, \mathcal{R}^T_{e\#} (I^T_{\varepsilon\#})^*,$$

позволяющее получить $\widetilde{\mathcal{R}}^T_e$ по данным обратной задачи. Далее выясняется структура этого оператора. В Лемме 12 для п.в. $s \in (0, T)$ установлено равенство

$$(\widetilde{\mathcal{R}}^T_e v)(\cdot, s) = N \frac{\partial v}{\partial s}(\cdot, s) + A(s)\, v(\cdot, s),$$

в котором $A(s)$ – семейство псевдодифференциальных операторов на касательных полях на Γ (а точнее, на подмножествах границы $\{\tau_* > s\}$). Лемма 13 устанавливает связь между главным символом

$$a^\alpha_\beta(s; \gamma^1, \gamma^2, k), \quad \alpha, \beta = 1, 2,\ k \in \mathbb{R}^2$$

оператора $A(s)$ и компонентами оптического метрического тензора h:

$$\det a(s;\gamma^1,\gamma^2,k) = -\sum_{\alpha,\beta} h^{\alpha\beta}(\gamma^1,\gamma^2,s)\, k_\alpha k_\beta \cdot (1+o(1)), \quad k\to\infty.$$

Значений $h^{\alpha\beta}$ достаточно для того, чтобы определить пересаженный на выкройку тензор h, поскольку для произвольных локальных координат (γ^1,γ^2) на Γ запись тензора h в соответствующих полугеодезических координатах (γ^1,γ^2,τ) имеет вид

$$h^{mn} = \begin{pmatrix} h^{\alpha\beta} & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha,\beta = 1,2. \tag{20}$$

После восстановления h устанавливается соответствие между точками выкройки и точками области $\Omega^T\setminus\omega$ и определяется скорость c в Ω^T.

В разделе 5.3 исследуется поведение ортогональных проекторов на подпространство ε-соленоидальных полей, локализованных в шаре оптического радиуса r с центром в фиксированной точке $x\in\Omega$, при $r\to 0$. Если обозначить такой проектор через $E^r(x)$, то для $y\in\vec{C}^\infty(\Omega)\cap\mathcal{U}_\varepsilon\langle\Omega\rangle$ справедливо

$$(E_\varepsilon\langle\Omega^r[x_0]\rangle\, y, y)_{\mathcal{U}_\varepsilon\langle\Omega\rangle} = \frac{2\pi}{15}\,\varepsilon(x_0)\,|\mathrm{rot}\, y(x_0)|^2\,(c(x_0)\,r)^5 + O(r^6) \tag{21}$$

при $r\to 0$.

В разделе 5.4 решается задача раздельного восстановления ε, μ. Сначала определяется касательная часть градиента $\Pi\nabla\ln\varepsilon$ в $\Omega^T\setminus\omega$, которая извлекается из главного символа псевдодифференциального оператора, являющегося модификацией $\widetilde{\mathcal{R}}^T_e$. Далее с использованием формулы (21) определяется нормальная составляющая $\langle\nabla\ln\varepsilon,\nu\rangle$, чего достаточно для определения ε, а затем и $\mu=\frac{1}{\varepsilon c^2}$ в Ω^T.

Список литературы

[1] Романов В.Г., Кабанихин С.И. *Обратные задачи геоэлектрики.* Наука, М. 1991.

[2] М.И. Белишев, В.М. Исаков, Л.Н. Пестов, В.А. Шарафутдинов, К реконструкции метрики по внешним электромагнитным измерениям, Докл. РАН, 2000, 372(3), 298–300.

[3] М.И. Белишев, А.К. Гласман, Динамическая обратная задача для системы Максвелла: восстановление скорости в регулярной зоне (ВС-метод), Алгебра и анализ, 2000, 12(2), 279–316.

[4] М.И. Белишев, Об унитарном преобразовании в пространстве $L_2(\Omega;\mathbb{R}^3)$, связанном с разложением Вейля, Зап. научн. семин. ПОМИ, 2001, 275, 25–40.

[5] M.I.Belishev, *Recent progress in the boundary control method*, Inverse Problems, 2007, 23(5), R1–R67.

[6] М.Н. Демченко, *О частично изометрическом преобразовании соленоидальных векторных полей*, Зап. научн. семин. ПОМИ, 2009, 370, 22–43.

[7] M.I. Belishev, M.N. Demchenko, *Time-optimal reconstruction of Riemannian manifold via boundary electromagnetic measurements*, J. Inv. Ill-Posed Problems, 2011, 19, 167–188.

[8] М.Н. Демченко, *Динамическая трехмерная обратная задача для системы Максвелла*, Алгебра и анализ, 2011, 23(6), 31–78.