На правах рукописи

ПУСЕВ РУСЛАН СЕРГЕЕВИЧ

АСИМПТОТИКА ВЕРОЯТНОСТЕЙ МАЛЫХ УКЛОНЕНИЙ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ В ГИЛЬБЕРТОВОЙ НОРМЕ

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2011

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей и математической статистики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научные руководители	доктор физико-математических наук, профессор **Никитин Яков Юрьевич**
	доктор физико-математических наук, доцент **Назаров Александр Ильич**
Официальные оппоненты	доктор физико-математических наук, профессор **Розовский Леонид Викторович**
	доктор физико-математических наук, профессор **Смородина Наталия Васильевна**
Ведущая организация	Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Защита состоится "____" __________ 2011 года в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова РАН по адресу 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН по адресу 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27.

Автореферат разослан "____" __________ 2011 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.202.01
доктор физико-математических наук А. Ю. Зайцев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория малых уклонений гауссовских процессов в различных нормах интенсивно развивается в последние годы (см., например, обзоры [12] и [13], практически полная библиография по малым уклонениям представлена в [14]). Этому развитию способствовало обнаружение связей малых уклонений с другими важными математическими задачами, такими как оценка точности дискретной аппроксимации случайных процессов, вычисление метрической энтропии функциональных множеств, закон повторного логарифма в форме Чжуна и в форме Вичуры, нахождение скорости ухода на бесконечность бесконечномерного винеровского процесса. Недавно была также установлена связь малых уклонений с задачами математической статистики: функциональным анализом данных [10] и непараметрическим байесовским оцениванием [1], [18].

Задача о малых уклонениях случайного процесса X в норме $\|\cdot\|$ представляет собой описание поведения при $\varepsilon \to 0$ вероятности $\mathsf{P}\{\|X\| \leqslant \varepsilon\}$. Результат, подобный

$$\mathsf{P}\{\|X\| \leqslant \varepsilon\} \sim C\varepsilon^{\beta} \exp(-d\varepsilon^{-\alpha}), \quad \varepsilon \to 0,$$

с некоторыми вещественными константами C, β, d и α называется точной асимптотикой. Если же доказано меньше, а именно

$$\ln \mathsf{P}\{\|X\| \leqslant \varepsilon\} \sim -d\varepsilon^{-\alpha}, \quad \varepsilon \to 0,$$

то такой результат называется логарифмической асимптотикой.

В известной монографии М. А. Лифшица [2, §18] отмечается: “Поведение малых уклонений, в отличие от больших, нельзя описать единообразно для всего класса гауссовских мер даже на логарифмическом уровне. Формализм оценивания значений малых уклонений, сравнимый по простоте с применением функционала действия для больших уклонений, еще не найден. Известны лишь частные результаты для нескольких важных специальных ситуаций...”

Как правило, в работах по малым уклонениям речь шла о нижних и верхних оценках вероятностей $\mathsf{P}\{\|X\| \leqslant \varepsilon\}$, а точную и даже логарифмическую асимптотику с явно выписываемыми константами удавалось найти лишь для очень небольшого числа случайных процессов [12], [6].

Цель работы. Диссертация посвящена изучению асимптотики малых уклонений гауссовских случайных функций в L_2-норме. Наша основная цель — получение точной асимптотики вероятностей малых уклонений вплоть до константы для ряда конкретных гауссовских процессов. Особое внимание мы уделяем весовой норме в L_2 для ряда случайных процессов, связанных с броуновским движением, где точная асимптотика малых уклонений была ранее известна лишь для немногих простейших весов.

Методы исследований. В диссертационной работе применяются методы теории случайных процессов, теории краевых задач, спектральной теории операторов и теории функций комплексной переменной. Важную роль играет подход, предложенный в работах А. И. Назарова и Я. Ю. Никитина [17, 3, 16] и позволяющий получать точную асимптотику малых уклонений в L_2-норме для гауссовских процессов, ковариационная функция которых является функцией Грина самосопряженного дифференциального оператора из широкого класса.

Основные результаты.

1. Найдена асимптотика вероятностей малых уклонений в L_2-норме с точностью до константы для широкого класса взвешенных гауссовских процессов.

2. Вычислена точная асимптотика малых уклонений для ряда конкретных гауссовских случайных процессов в весовой L_2-норме, в том числе для процесса Боголюбова и семейства процессов Матерна.

3. Получена логарифмическая асимптотика малых уклонений в L_2-норме для ряда случайных полей.

4. Найдена точная асимптотика малых уклонений для ряда броуновских функционалов, в том числе для весовой L_2-нормы броуновской экскурсии и броуновского меандра.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми. В ней впервые получены окончательные результаты о точной асимптотике малых уклонений в гильбертовой норме для ряда известных и употребительных случайных процессов.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Разработанные в ней методы и подходы могут использоваться для решения близких задач теории малых уклонений. В перспективе полученные результаты могут быть использованы в других разделах теории вероятностей и математической статистики, а также статистической физики.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались автором на международной конференции “Вероятности малых уклонений и смежные вопросы” (Санкт-Петербург, 12–19 сентября 2005 г.), на семинаре Института математической стохастики Геттингенского университета под руководством проф. М. Денкера (в июне 2007 г.), на семинаре по теории вероятностей и математической статистике Билефельдского университета под руководством проф. Ф. Гётце (в июле 2008 г.), на Первом Северном трехстороннем (финско-шведско-российском) семинаре (Эспоо, 9–11 марта 2009 г.), на 16-й Всероссийской школе-коллоквиуме по стохастическим методам (Санкт-Петербург, 19–24 мая 2009 г.), на 33-й Конференции по случайным процессам и их приложениям (Берлин, 27–31 июля 2009 г.), на 10-й Международной вильнюсской конференции по теории вероятностей и математической статистике (Вильнюс, 28 июня – 2 июля 2010 г.) и на санкт-петербургском городском семинаре по теории вероятностей и математической статистике под руководством академика РАН И. А. Ибрагимова (в октябре 2010 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [П1]–[П8]. Из них пять работ [П1]–[П5] опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК (работа [П5] опубликована в журнале, удовлетворяющем достаточному условию включения в перечень ВАК: его переводная версия “Journal of Mathematical Sciences” входит в систему цитирования SCOPUS). Работы [П5]–[П7] написаны в соавторстве. В работе [П5] научному руководителю А.И.Назарову принадлежит постановка задачи и общее руководство работой, а диссертанту — доказательство основных теорем. Работы [П6,П7] — это тезисы совместных докладов на международных конференциях на общую тему, где представлены как результаты автора, так и его научных руководителей.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из восьми параграфов и списка литературы, содержащего 102 наименования. Общий объем работы составляет 101 страницу.

Содержание работы

Во **введении (параграф 1)** излагается история вопроса, описывается структура и содержание диссертации.

В **параграфе 2** решается вопрос о нахождении асимптотики малых уклонений для взвешенных случайных процессов. Для процессов, ковариационная функция которых является функцией Грина дифференциального оператора из довольно широкого класса, и достаточно гладких невырожденных весовых функций явно выписывается асимптотика малых уклонений с точностью до константы. Условиям основной теоремы §2 удовлетворяют многие известные процессы, например, винеровский процесс, броуновский мост, процесс Орнштейна–Уленбека, их многократно проинтегрированные аналоги. В последующих параграфах обсуждаются случаи, когда возможно провести до конца все вычисления и получить явное выражение для всех констант, входящих в асимптотику.

В **параграфе 3** рассматриваются гауссовские случайные процессы, у которых собственные функции ковариации выражаются через тригонометрические функции.

Рассмотрим случайный процесс $W_{(u)}(t) \equiv W(t) - utW(1)$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$, $u \leqslant 1$. Это гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией $G_{W_{(u)}}(t,s) = s \wedge t - (2u - u^2)st$, то есть при $u \in (0,1]$ процесс $W_{(u)}$ совпадает по распределению с рассматриваемым на отрезке $[0,1]$ броуновским мостом из нуля в нуль длины $(2u - u^2)^{-1}$. При $u = 1$ этот процесс совпадает со стандартным броуновским мостом, а при $u = 0$ со стандартным винеровским процессом. Асимптотика малых уклонений для процесса $W_{(u)}$ со степенным и экспоненциальным весом изучалась в работе [3], частичные результаты для винеровского процесса и броуновского моста со степенным весом были независимо получены в [9].

В **параграфе 3** вычисляется точная асимптотика малых уклонений процесса $W_{(u)}$ с четырьмя конкретными дробно-рациональными весами: $\psi(t) = (a^2 + t^2)^{-2}$ при $a > 0$, $\psi(t) = (a^2 - t^2)^{-2}$ при $a > 1$, $\psi(t) = (t + a)^{-2}$ при $a > 0$ и $\psi(t) = (t + a)^{-4}$ при $a > 0$.

Примером может служить

Теорема 3.4. *Пусть $a > 0$.*

1. Для стандартного броуновского моста $W_{(1)} = B$ при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^1 \frac{B^2(t)}{(t+a)^4}\,dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(a(a+1))^{-2}}{8}\,\varepsilon^{-2}\right).$$

2. Пусть $u < 1$. Тогда для “укороченного” броуновского моста $W_{(u)}$ при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^1 \frac{W_{(u)}^2(t)}{(t+a)^4}\,dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim \frac{4a^{1/2}(a+1)^{3/2}}{(1-u)\pi^{1/2}}\cdot\varepsilon\cdot\exp\left(-\frac{(a(a+1))^{-2}}{8}\,\varepsilon^{-2}\right).$$

В **параграфах 4 и 5** рассматриваются процессы, собственные функции которых выражаются через функции Бесселя.

В **параграфе 4** вычисляется точная асимптотика для ряда процессов, порождающих краевые задачи *второго* порядка. Получены следующие результаты для для стационарного процесса Орнштейна–Уленбека $U_{(\alpha)}$ и процесса Орнштейна–Уленбека $\mathring{U}_{(\alpha)}$, выходящего из нуля, на отрезке и на полуоси с экспоненциальным весом:

Теорема 4.2. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ и $q \neq 0$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ имеем*

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^1 e^{2qt}\mathring{U}_{(\alpha)}^2(t)\,dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim \frac{e^{\alpha/2}}{e^{q/4}}\,\frac{4q}{\sqrt{\pi}(e^q-1)}\cdot\varepsilon\cdot\exp\left(-\frac{(e^q-1)^2}{8q^2}\,\varepsilon^{-2}\right).$$

Теорема 4.3. *Пусть $\alpha > 0$ и $q \neq 0$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ имеем*

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^1 e^{2qt}U_{(\alpha)}^2(t)\,dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim$$

$$\sim 8\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\frac{e^{\alpha/2}}{e^{q/4}}\left(\frac{q}{e^q-1}\right)^{3/2}\cdot\varepsilon^2\cdot\exp\left(-\frac{(e^q-1)^2}{8q^2}\,\varepsilon^{-2}\right).$$

Теорема 4.4. *Пусть $q > 0$.*

1. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^\infty \mathring{U}_{(\alpha)}^2(t)e^{-2qt}\,dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim$$

$$\sim \frac{2}{\pi^{\frac14}\Gamma^{\frac12}\left(1+\frac{|\alpha|}{q}\right)}\cdot(2q\varepsilon)^{\frac12-\frac{|\alpha|}{q}}\cdot\exp\left(-\frac18(q\varepsilon)^{-2}\right).$$

2. Пусть $\alpha > 0$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^\infty U_{(\alpha)}^2(t)e^{-2qt}\,dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim$$

$$\sim \frac{2\left(\frac{\alpha}{q}\right)^{\frac12}}{\pi^{\frac14}\Gamma^{\frac12}\left(1+\frac{\alpha}{q}\right)}\cdot(2q\varepsilon)^{\frac32-\frac{\alpha}{q}}\cdot\exp\left(-\frac18(q\varepsilon)^{-2}\right).$$

Также в **параграфе 4** получена асимптотика для броуновского моста со степенным весом и для так называемого онлайн-центрированного винеровского процесса $W(t) - t^{-1}\int_0^t W(s)\,ds$ со степенным весом.

В **параграфе 5** вычисляется точная асимптотика малых уклонений для процессов, порождающих краевые задачи *четвертого и более высокого* порядка. Для гауссовского процесса $X(t)$, $t \in [0,1]$, рассмотрим его m раз проинтегрированный аналог $X_m^{[\beta_1,\dots,\beta_m]}(t)$,

$$X_m^{[\beta_1,\dots,\beta_m]}(t) = (-1)^{\beta_1+\ldots+\beta_m} \int_{\beta_m}^{t} \dots \int_{\beta_1}^{t_1} X(s)\,ds\,dt_1 \dots dt_{m-1}.$$

Здесь β_j, $j = 1,\dots,m$, равны 0 или 1.

Положим при $n \geqslant 1$

$$\varepsilon_n = \left(\varepsilon\sqrt{n \sin\frac{\pi}{2n}}\right)^{\frac{1}{2n-1}}, \qquad \mathcal{D}_n = \frac{2n-1}{2n\sin\frac{\pi}{2n}} \qquad z = \exp\left(\frac{i\pi}{n}\right),$$

через $V(\dots)$ обозначим матрицу Вандермонда.

Получены следующие результаты для различных многократно проинтегрированных случайных процессов со степенным весом:

Теорема 5.3. *Пусть $u < 1$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ имеет место соотношение*

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^1 t^{-n}\left(W_{(u),n-1}^{[0,0,\dots,0]}(t)\right)^2 dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim$$
$$\sim \frac{2^{n/2}\cdot\pi^{(n-2)/4}\cdot n^{(n+2)/4}}{(0!1!2!\dots(n-1)!\cdot|\det V(1,z,\dots,z^{n-1})|)^{1/2}} \times$$
$$\times \frac{\varepsilon_n^{1-\frac{n^2}{2}}}{(1-u)\sqrt{\mathcal{D}_n}} \cdot \exp\left(-\frac{\mathcal{D}_n}{\varepsilon_n^2}\right).$$

Теорема 5.4. *При $\varepsilon \to 0$ имеет место соотношение*

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^1 t^{-n}\left(B_{n-1}^{[0,0,\dots,0]}(t)\right)^2 dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim$$
$$\sim \frac{2^{n/2}\cdot\pi^{(n-2)/4}\cdot n^{(n+2)/4}}{(1!1!2!\dots(n-1)!\cdot|\det V(z^{-1},z,\dots,z^{n-1})|)^{1/2}} \times$$
$$\times \frac{\varepsilon_n^{-\frac{n^2}{2}}}{\sqrt{\mathcal{D}_n}} \exp\left(-\frac{\mathcal{D}_n}{\varepsilon_n^2}\right).$$

Аналогичные результаты получены для процесса $W^{[1,1,\dots,1]}_{(u),n-1}$, "условного" проинтегрированного винеровского процесса (так называемого процесса Лашаля) $\mathbb{B}_m$,

$$\mathbb{B}_m(t) = \left(W^{[0,0,\dots,0]}_m(t) \middle| \, W^{[0,0,\dots,0]}_j(1) = 0, \ 0 \leqslant j \leqslant m \right),$$

и многократно проинтегрированного центрированного винеровского процесса $\overline{W}(t) \equiv W(t) - \int_0^1 W(s)\,ds$. Найдена также точная асимптотика малых уклонений для однократно проинтегрированного онлайн-центрированного винеровского процесса с квадратичным весом.

В **параграфах 6 и 7** изучаются малые уклонения случайных процессов, имеющих важное значение для физических и статистических приложений.

Определим процесс Боголюбова $Y(t)$, $t \in [0,1]$, как гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией

$$\mathsf{E}Y(t)Y(s) = \frac{1}{2\omega \operatorname{sh}(\omega/2)} \operatorname{ch}\left(\omega|t-s| - \frac{\omega}{2}\right), \quad t,s \in [0,1], \quad \omega > 0.$$

Мерой Боголюбова μ_{B} называется распределение процесса $Y(t)$ в пространстве $C^0[0,1]$, снабженном равномерной метрикой.

Мера Боголюбова была детально рассмотрена в [4, 5]. Она играет важную роль в теории статистического равновесия квантовых систем. Мера Боголюбова возникает в представлении гиббсовских равновесных средних от бозе-операторов в виде функциональных интегралов с помощью метода T-произведений Боголюбова. Свойства меры Боголюбова, функциональных интегралов по этой мере и траекторий процесса Боголюбова изучались в последние годы в работах Д. П. Санковича и В. Р. Фаталова.

В **параграфе 6** вычисляется точная асимптотика для процессов Боголюбова с единичным и экспоненциальным весом:

Теорема 6.2. *При $\varepsilon \to 0$ верно соотношение*

$$\mathsf{P}\{\|Y\| \leqslant \varepsilon\} \equiv \mu_{\mathrm{B}}\left\{x : \int_0^1 x^2(t)dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim \frac{4\sqrt{2}\operatorname{sh}(\omega/2)}{\sqrt{\pi}} \varepsilon \exp\left(-\frac{1}{8}\varepsilon^{-2}\right).$$

Теорема 6.3. *При $q \neq 0$ и $\varepsilon \to 0$ верно соотношение*

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^1 Y^2(t) e^{2qt} dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim \frac{4\sqrt{2}\operatorname{sh}(\omega/2) q}{\sqrt{\pi \operatorname{ch}(q/2)}(e^q - 1)} \varepsilon \exp\left(-\frac{(e^q-1)^2}{8q^2}\varepsilon^{-2}\right).$$

Кроме того, в **параграфе 6** получена точная асимптотика для многократно проинтегрированных процессов Боголюбова.

Для $\nu > 1/2$ определим процесс Матерна $Z^{(\nu)}(t)$, $t \in [0,1]$, как гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией

$$G_{Z^{(\nu)}}(s,t) = \frac{2^{3/2-\nu}}{\Gamma(\nu-1/2)}|s-t|^{\nu-1/2}K_{\nu-1/2}(|s-t|), \quad s,t \in [0,1],$$

где K_α — модифицированная функция Бесселя с индексом α. Эти процессы были, по-видимому, впервые рассмотрены известным шведским статистиком Б. Матерном в задачах геостатистики [15]. Они появляются во многих прикладных вероятностных моделях статистической гидромеханики, теории электрических шумов, см., например, [7]. Процессы Матерна также связаны с одним классом дробных случайных полей, недавно изученным в работе [11].

В **параграфе 7** вычисляется логарифмическая асимптотика малых уклонений с произвольным суммируемым весом для процесса Матерна с любым индексом и *точная* асимптотика для процессов Матерна с произвольным натуральным индексом:

Теорема 7.1. *Пусть* ψ *— суммируемая неотрицательная функция на* $[0,1]$. *Положим* $J_h = \int\limits_0^1 \psi(t)^{1/h}dt$. *Тогда*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{2/(2\nu-1)} \cdot \ln \mathsf{P}\{\|Z^{(\nu)}\|_\psi \leqslant \varepsilon\} =$$
$$= -\left(\frac{2\Gamma(\nu)}{\pi^{2\nu-1/2}\Gamma(\nu-1/2)}\right)^{1/(2\nu-1)} \cdot \frac{2\nu-1}{2} \cdot \left(\frac{\pi J_{2\nu}}{2\nu \sin\frac{\pi}{2\nu}}\right)^{2\nu/(2\nu-1)}.$$

Теорема 7.4. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$. *При* $\varepsilon \to 0$ *имеет место соотношение*

$$\mathsf{P}\{\|Z^{(n)}\| \leqslant \varepsilon\} \sim \frac{2^{(n^2+n+1)/2}n^{(n+1)/2}e^{n/2}}{|\det V(1,z,\dots,z^{n-1})|}\frac{\varepsilon_n^{n^2+1}}{\sqrt{\pi\mathcal{D}_n}}\exp\left(-\frac{\mathcal{D}_n}{2\varepsilon_n^2}\right).$$

Здесь

$$\varepsilon_n = \left(\varepsilon\sqrt{\frac{2n}{c_n}\sin\frac{\pi}{2n}}\right)^{1/(2n-1)}, \quad \mathcal{D}_n = \frac{2n-1}{2n\sin\frac{\pi}{2n}},$$

$$z = \exp\left(\frac{i\pi}{n}\right), \quad c_n = \frac{2\sqrt{\pi}\Gamma(n)}{\Gamma(n-1/2)},$$

а $V(\dots)$ обозначает матрицу Вандермонда.

Далее в **параграфе 7** получена логарифмическая асимптотика для полей Матерна, т.е. тензорных произведений процессов Матерна.

В **параграфе 8** изучаются малые уклонения гильбертовой нормы броуновской экскурсии, броуновского меандра на отрезке $[0,1]$ и ряда других броуновских функционалов в тесной связи с малыми уклонениями броуновского локального времени и бесселевскими процессами. Ключевую роль в нахождении асимптотики малых уклонений упомянутых процессов играет их связь с некоторыми хорошо изученными гауссовскими процессами.

Опираясь на тождество Уильямса, связывающее броуновскую экскурсию с трехмерным бесселевским мостом, мы находим точную асимптотику малых уклонений для броуновской экскурсии $\mathfrak{e}$ в L_2-норме с различными весами:

Теорема 8.3. *При $\varepsilon \to 0$ верно соотношение*

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^1 \mathfrak{e}^2(t)\,dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}}\varepsilon^{-2}\exp\left(-\frac{9}{8}\varepsilon^{-2}\right).$$

Теорема 8.4. *Пусть $\theta > -2$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ верно соотношение*

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^1 t^\theta \mathfrak{e}^2(t)\,dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim \frac{4\pi^{1/4}}{3^{(\theta-4)/(4(\theta+2))}\Gamma^{3/2}\left(\frac{\theta+3}{\theta+2}\right)}\times$$
$$\times\left((\theta+2)\varepsilon\right)^{-\frac{\theta+8}{2(\theta+2)}}\exp\left(-\frac{9}{2}\left((\theta+2)\varepsilon\right)^{-2}\right).$$

Кроме того, вычислена асимптотика малых уклонений броуновской экскурсии с весами Андерсона–Дарлинга $\psi(t) = (t(1-t))^{-1}$ и Родригеса–Виолласа $\psi(t) = (t(2-t))^{-1}$.

Аналогичные результаты получены для малых уклонений броуновского меандра $\mathfrak{m}$ с различными весами:

Теорема 8.10. *При $\varepsilon \to 0$ справедлива точная асимптотика*

$$\mathsf{P}\{\|\mathfrak{m}\|^2 \leqslant \varepsilon^2\} \sim 4\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\,\exp\left(-\frac{9}{8}\varepsilon^{-2}\right).$$

Теорема 8.11. *Пусть $\theta > -2$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ верно соотношение*

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^1 t^\theta \mathfrak{m}^2(t)dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim \frac{2^{2+\frac{\theta}{2(\theta+2)}}\pi^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}+\frac{3\theta}{4(\theta+2)}}\Gamma\left(\frac{1}{\theta+2}\right)\Gamma^{1/2}\left(\frac{\theta+3}{\theta+2}\right)} \times$$
$$\times\left((\theta+2)\varepsilon\right)^{\frac{3\theta}{2(\theta+2)}} \exp\left(-\frac{9}{4}((\theta+2)\varepsilon)^{-2}\right).$$

Также найдена точная асимптотика малых уклонений броуновского меандра $\mathfrak{m}^z$ с концом в точке $z \geqslant 0$:

Теорема 8.9. *При $\varepsilon \to 0$ и фиксированном $z \geqslant 0$ справедлива асимптотика:*

$$\mathsf{P}\{\|\mathfrak{m}^z\| \leqslant \varepsilon\} \sim \frac{2\sqrt{2(z^2+3)}}{\sqrt{\pi}}\ \varepsilon^{-2}\ \exp\left(-\frac{(z^2+3)^2}{8}\varepsilon^{-2} + \frac{z^2}{2}\right).$$

Используя связь между распределениями функционалов от локального времени броуновского моста $L_t^x(B)$ и функционалов от броуновской экскурсии, мы получаем точную асимптотику малых уклонений для некоторых функционалов от процесса $L_1^x(B)$ за время 1 в точке x:

Теорема 8.7. *При $\varepsilon \to 0$ справедливо соотношение*

$$\mathsf{P}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(L_1^x(B))^3 dx \leqslant \varepsilon\right\} \sim \frac{8\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}}\varepsilon^{-1}\exp\left(-\frac{9}{2}\varepsilon^{-1}\right),$$

Теорема 8.8. *При $\varepsilon \to 0$*

$$\mathsf{P}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(L_1^x(B))^2\ dx \leqslant\ \varepsilon\right\} \sim \frac{8}{3}a_1^{3/2}\varepsilon^{-2}\exp\left(-\frac{8a_1^3}{27\varepsilon^2}\right),$$

где $a_1 \approx 2.3381$ — абсолютное значение первого нуля функции Эйри.

Эти результаты уточняют полученную в работе [8] логарифмическую асимптотику малых уклонений рассмотренных функционалов от локального времени броуновского моста.

Также в **параграфе 8** найдена точная асимптотика малых уклонений для супремума броуновской экскурсии $m(\mathfrak{e}) = \sup_{0\leqslant u\leqslant 1}\mathfrak{e}(u)$ и для интегрального функционала

$$h(\mathfrak{e}) = \int_0^1 ds/\mathfrak{e}(s).$$

Теорема 8.12. *При $\varepsilon \to 0$ справедлива точная асимптотика*

$$\mathsf{P}\{m(\mathfrak{e}) \leqslant \varepsilon\} \sim \frac{\pi^2\sqrt{2\pi}}{\varepsilon^3} \exp\left(-\frac{\pi^2}{2}\varepsilon^{-2}\right).$$

Следствие 8.13. *При $\varepsilon \to 0$ справедлива асимптотика*

$$\mathsf{P}\{h(\mathfrak{e}) \leqslant \varepsilon\} \sim \frac{8\pi^2\sqrt{2\pi}}{\varepsilon^3} \exp\left(-\frac{2\pi^2}{\varepsilon^2}\right).$$

Список литературы

[1] Аурзада Ф., Ибрагимов И. А., Лифшиц М. А., ван Зантен Х. Малые уклонения гладких стационарных гауссовских процессов. // Теория вероятн. и ее примен. — 2008. — Т. 53, № 4. — С. 788–798.

[2] Лифшиц М. А. Гауссовские случайные функции. — Киев: ТВiМС, 1995.

[3] Назаров А. И. О точной константе в асимптотике малых уклонений в L_2-норме некоторых гауссовских процессов. — Нелинейные уравнения и математический анализ. Новосибирск: Т. Рожковская, 2003, с. 179–214. (Проблемы матем. анализа, в. 26).

[4] Санкович Д. П. Гауссовы функциональные интегралы и гиббсовские равновесные средние. // Теор. и мат. физика. — 1999. — Т. 119, № 2. — С. 345–352.

[5] Санкович Д. П. О некоторых свойствах функциональных интегралов по мере Боголюбова. // Теор. и мат. физика. — 2001. — Т. 126, № 1. — С. 149–163.

[6] Фаталов В. Р. Константы в асимптотиках вероятностей малых уклонений для гауссовских процессов и полей. // Успехи мат. наук. — 2003. — Т. 58, № 4. — С. 89–134.

[7] Яглом А. М. Корреляционная теория стационарных случайных функций с примерами из метеорологии. — Л.: Гидрометеоиздат, 1981.

[8] Csörgő M., Shi Z., Yor M. Some asymptotic properties of the local time of the uniform empirical process. // Bernoulli. — 1999. — V. 5. — P. 1035–1058.

[9] Deheuvels P., Martynov G. Karhunen-Loève expansions for weighted Wiener processes and Brownian bridges via Bessel functions. // Proc. of the conference "High dimensional probability III", Sandjberg, 2002. / ed. J. Hoffmann-Jørgensen et al. Basel: Birkhäuser, 2003. P. 57–93.

[10] Ferraty F., Vieu Ph. Nonparametric functional data analysis. — Berlin: Springer, 2006.

[11] Kelbert M. Ya., Leonenko N. N., Ruiz-Medina M. D. Fractional random fields associated with stochastic fractional heat equations. // Adv. Appl. Prob. — 2005. — V. 37. — P. 108–133.

[12] Li W. V., Shao Q. M. Gaussian processes: inequalities, small ball probabilities and applications. — Stochastic Processes: Theory and Methods. Amsterdam: North-Holland, 2001, p. 533-597 (Handbook Statist., v. 19).

[13] Lifshits M. A. Asymptotic behavior of small ball probabilities. // Probability Theory and Mathematical Statistics: Proceedings of the Seventh International Vilnius Conference. / ed. B. Grigelionis et al. Vilnius: TEV, 1999. P. 453–468.

[14] Lifshits M. A. Bibliography on small deviation probabilities. Режим доступа: http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/smalldev/biblio.pdf.

[15] Matérn B. Spatial variation. — Berlin: Springer-Verlag, 1986.

[16] Nazarov A. I. Exact L_2-small ball asymptotics of Gaussian processes and the spectrum of boundary-value problems. // J. Theoret. Probab. — 2009. — V. 22. — P. 640–665.

[17] Nazarov A. I., Nikitin Ya. Yu. Exact L_2-small ball behavior of integrated Gaussian processes and spectral asymptotics of boundary value problems. // Probab. Theory Relat. Fields. — 2004. — V. 129, № 4. — P. 469–494.

[18] van der Vaart A. W., van Zanten H. Rates of contraction of posterior distributions based on Gaussian process priors. // Ann. Statist. — 2008. — V. 36, № 3. — P. 1435–1463.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

[П1] Пусев Р. С. Малые уклонения полей и процессов Матерна в гильбертовой норме. // Доклады РАН. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 741–743.

[П2] Пусев Р. С. Асимптотика малых уклонений процессов Матерна в L_2-норме с весом. // Обозрение прикл. и промышл. матем. — 2009. — Т. 16, № 2. — С. 271.

[П3] Пусев Р. С. Асимптотика малых уклонений в весовой квадратичной норме для полей и процессов Матерна. // Теория вероятн. и ее примен. — 2010. — Т. 55, № 1. — С. 187–195.

[П4] Пусев Р. С. Асимптотика малых уклонений процессов Боголюбова в квадратичной норме. // Теор. и мат. физика. — 2010. — Т. 165, № 1. — С. 134–144.

[П5] Назаров А. И., Пусев Р. С. Точная асимптотика малых уклонений в L_2-норме с весом для некоторых гауссовских процессов. // Зап. научн. семин. ПОМИ. — 2009. — Т. 364. — С. 166–199.

Другие публикации:

[П6] Nazarov A. I., Nikitin Ya. Yu., Pusev R. S. Small deviations of Gaussian processes in L_2-norm: exact asymptotics. Transactions of the XXVI International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models (Nahariya, Israel, October 22-26, 2007), ed. Z. Volkovich, Ort Braude College, Karmiel, Israel, 2007, p. 153–156.

[П7] Nikitin Ya. Yu., Pusev R. S. Small deviation probabilities for Matérn processes under weighted L_2-norm. — SPA 2009, Abstract book of 33rd

Conference on Stochastic Processes and Their Applications, Berlin, 27th July - 31st July, 2009, p. 185–186.

[П8] Pusev R. Small deviations for the Bogoliubov process. — Abstracts of the 10th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics, 2010, p. 241–242.