На правах рукописи

Руцкий Дмитрий Владимирович

BMO-регулярность в решётках измеримых функций и интерполяция классов Харди

Специальность 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2011

Работа выполнена в лаборатории математического анализа Учреждения Российской академии наук Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:
доктор физико-математических наук, чл.-корр. РАН
Кисляков Сергей Витальевич

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:
доктор физико-математических наук, профессор
Асташкин Сергей Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор
Широков Николай Алексеевич

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ:
Воронежский государственный университет

Защита диссертации состоится ____________ 2011 года в 15 часов на заседании диссертационного совета Д.002.202.01 в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова РАН по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Санкт-Петербургского отделения Математического института имени В. А. Стеклова РАН.

Автореферат разослан "___" __________ 2011 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических
наук А. Ю. Зайцев

Общая характеристика работы

Объект исследования и научные положения, выносимые на защиту. Исследуется свойство BMO-регулярности решёток, свойство A_1-регулярности решёток, ограниченность операторов в решётках и формулы для вещественной интерполяции пространств, порождённых квазирегулярным проектором, а также пространств типа Харди.

1. Свойства самодвойственности, делимости, и характеризация BMO-регулярности решёток в терминах ограниченности сингулярных интегральных операторов имеют чисто вещественные доказательства, которые работают и в общем случае пространств однородного типа вроде $\mathbb{R}^n$, а не только на окружности $\mathbb{T}$. BMO-регулярность для пар решёток на пространстве однородного типа также обладает свойствами самодвойственности и делимости.
2. Теорема о неподвижной точке Ки Фана–Какутани — мощный инструмент, который можно применять в таких вопросах анализа, как переход от разрешимости H_p задачи о короне к разрешимости H_∞ задачи о короне, проверка самодвойственности и делимости свойства BMO-регулярности, и проверка критерия BMO-регулярности решётки в терминах AK-устойчивости некоторой пары решёток с дополнительной переменной.

Цели и задачи диссертации. В этой работе автор ставит перед собой цель продемонстрировать и математически строго доказать новые закономерности, позволяющие лучше понять внутреннюю структуру таких важных инструментов функционального анализа, комплексного анализа и теории функций, как теория интерполяции, сингулярные интегральные операторы, решётки измеримых функций, теорема о короне, а также связанных с ними понятий.

Методы исследования. Основные результаты о BMO-регулярности получены с помощью теоремы о неподвижной точке, методов теории банаховых решёток (включая известную теорему Г. Я. Лозановского о факторизации и теорему А. В. Бухвалова и Г. Я. Лозановского о том, что множества, замкнутые по мере, во многих отношениях ведут себя как компактные множества), весовых классов Макенхаупта, и одного известного результата, опирающегося на теорему Гротендика. Результаты о хорошей интерполяции A_1-регулярных решёток получены с помощью методов весовых оценок и теории сингулярных интегральных операторов Кальдерона–Зигмунда.

Достоверность научных положений. Все результаты, выносимые на защиту, являются математически достоверными фактами. Они были опубликованы в рецензируемых журналах, а их доказательства неоднократно проверялись специалистами в той области, к которой эти результаты относятся (имеется в виду функциональный анализ и теория интерполяции).

Научная новизна. Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми.

Актуальность, практическая ценность и область применения результатов. Вопрос об ограниченности конкретных операторов в конкретных пространствах занимает важное место в анализе и активно исследовался по меньшей мере с тех пор, как понятие оператора и линейного топологического пространства распространилось в математике, т. е. со становлением и развитием функционального анализа. Новые сведения, методы и закономерности, описанные в этой диссертации, могут быть использованы для получения новых результатов в этой области или в близких к ней, таких как вопросы теории аналитических функций и т. д.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на общегородском семинаре по линейному и комплексному анализу в Санкт-Петербурге (2 доклада в 2010 году и 1 доклад в 2011 году).

Публикации. Результаты, выносимые на защиту, опубликованы в работах [39], [40], [41] и препринте [42]. Все три статьи [39], [40] и [41] напечатаны в журналах из списка ВАК.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения и пяти глав, разбитых в общей сложности на 28 параграфов и занимает 182 страницы. Библиография содержит 65 наименований.

Содержание работы.

Интерполяция аналитических пространств

Пусть X и Y — квазибанаховы решётки измеримых функций на окружности $\mathbb{T}$ с мерой Лебега. В них естественным образом вводятся аналитические подпространства X_A и Y_A, $X_A = X \cap \mathrm{N}^+$ и $Y_A = Y \cap \mathrm{N}^+$, состоящие из сужений на границу аналитических функций из класса Смирнова, которые лежат также в X и Y соответственно. Например, аналитические подпространства для классов Лебега L_p — это просто классы Харди $(\mathrm{L}_p)_A = \mathrm{H}_p$. Как устроены интерполяционные пространства между X_A и Y_A? Разумеется, для всякого интерполяционного функтора $\mathcal{F}$ в категории банаховых пространств верно соотношение $\mathcal{F}\left((X_A, Y_A)\right) \subset \left(\mathcal{F}\left((X,Y)\right)\right)_A$. Обратное включение, т. е. равенство $\mathcal{F}\left((X_A, Y_A)\right) = \left(\mathcal{F}\left((X,Y)\right)\right)_A$, мы будем называть “правильной”, или “хорошей” интерполяцией для пары (X_A, Y_A) по понятным причинам; это явление ещё называется *устойчивостью интерполяции $\mathcal{F}$ для пары пространств* (X_A, Y_A). Для пространств Лебега L_p (вещественная и комплексная интерполяция которых, как хорошо известно, в рассматриваемых далее случаях снова даёт пространства Лебега) эти соотношения для вещественной интерполяции (при естественном выборе показателя r) принимают вид

$$(\mathrm{H}_p, \mathrm{H}_q)_{r,\theta} = \mathrm{H}_r, \quad \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}; \tag{1}$$

для комплексной интерполяции, соответственно,

$$(\mathrm{H}_p, \mathrm{H}_q)_\theta = \mathrm{H}_r, \quad \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}. \tag{2}$$

Хорошая интерполяция (с произвольным методом $\mathcal{F}$) для пары (X_A, Y_A) легко получается, если эта пара является ретрактом пары (X, Y) в категории пар банаховых пространств, т. е. если существует некоторый линейный ограниченный проектор $P : X+Y \mapsto X_A+Y_A$, одновременно проектирующий X на X_A и Y на Y_A, т. е. если пространства X_A и Y_A дополняемы в X и Y соответственно, с одним и тем же проектором. Разумеется, во многих интересных случаях это не выполнено; например, как хорошо известно (см., например, [4]), пространства H_p не дополняемы в L_p при $p \in \{1, \infty\}$. Поскольку проектор Рисса $\mathbb{P}$ проектирует пространства L_p на H_p при $1 < p < \infty$, при $1 < p, q < \infty$ пара $(\mathrm{H}_p, \mathrm{H}_q)$ является ретрактом пары $(\mathrm{L}_p, \mathrm{L}_q)$, и поэтому на ней любой интерполяционный метод устойчив. В частности, при $1 < p, q < \infty$ соотношения (1) и (2) автоматически выполнены. Но нередко бывают интересны как раз крайние значения показателей. П. Джонс ещё в начале 80-х годов прошлого столетия показал (см. [9], [8] и [6]), что хорошая интерполяция имеет место для обычных пространств Харди H_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и вещественного и комплексного методов интерполяции — т. е. в интерполяционном смысле шкала пространств H_p при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ведёт себя так же, как и шкала пространств L_p.

Интерес к вопросам, связанным с интерполяцией аналитических пространств, усилившийся к концу 80-х, обусловлен, в частности, исследованиями свойств диск-алгебры C_A и классов Харди H_p как банаховых пространств; см. обзоры [35] и [7, Chapter 16]. Упомянем работу Ж. Бургейна [10] 1984 г., где, в частности, для диск-алгебры C_A был установлен аналог теоремы Гротендика о том, что всякий ограниченный оператор из C_A в L_1 является 2-суммирующим. С. В. Кисляков в работе [15] 1989 г. нашёл простые доказательства для этих результатов, фактически основывающиеся на интерполяции для весовых пространств H_p. В то же время К. Шу (используя некоторые идеи Ж. Пизье) в [29] привёл простые доказательства упомянутых теорем П. Джонса о правильной интерполяции в шкале H_p.

Примерно в это время стало понятно (первым это заметил, по-видимому, Ж. Пизье в работе [23]), что естественным подходом к подобным вопросам для вещественной интерполяции является исследование K-замкнутости соответствующей пары. Вещественные интерполяционные пространства описываются в терминах K-функционала $K(t, f; X, Y) = \inf\,\{\|g\|_X + t\|h\|_Y \mid f = g + h\}$, заданного для $t > 0$ и $f \in X + Y$. Подпара (E, F) пары (X, Y) банаховых пространств называется K-замкнутой в (X, Y), если выполнено соотношение $K(t, f; E, F) \leqslant CK(t, f; X, Y)$ для всех $t > 0$ и $f \in E + F$ с некоторой константой C, не зависящей от t и f. Свойство K-замкнутости допускает простые переформулировки (см., например, [5]), из которых наиболее полезна следующая: для всякого разложения функции $f \in E + F$ в сумму $f = g_0 + h_0$, $g_0 \in X$, $h_0 \in Y$, найдётся разложение в сумму $f = g + h$, $g \in E$, $h \in F$, такое, что $\|g\|_X \leqslant C\|g_0\|_X$ и $\|h\|_Y \leqslant C\|h_0\|_Y$ с некоторой константой C, не зависящей от f, g_0, h_0. Естественно, из K-замкнутости пары (X_A, Y_A) в паре (X, Y), которую мы, следуя статье [17], будем называть AK-устойчивостью (*аналитической* K-устойчивостью) пары (X, Y), вытекает хорошая вещественная интерполяция для этой пары. Отметим ещё одно интересное свойство. Подпара (E, F) пары (X, Y) называется ретрактной подпарой пары (X, Y), если для всякого элемента $f \in E+F$ существует линейный оператор $T : X+Y \to E+F$, такой, что $\|T\|_{X \to E} \leqslant C$, $\|T\|_{Y \to F} \leqslant C$ и $Tf = f$, для некоторой константы C, не зависящей от f. Легко видеть, что если пара (E, F) является ретрактной подпарой пары (X, Y), то пара (E, F) K-замкнута в (X, Y), но неясно, верно ли обратное утверждение в общем случае. Нетрудно проверить, что для хорошей интерполяции (любым интерполяционным методом) достаточно, чтобы пара (X_A, Y_A) была ретрактной подпарой пары (X, Y) (см., например, [12, Corollary 2.1]).

Ж. Пизье (см. [22], [23], [24]) показал в 1991 г., что для классов Харди AK-устойчивость имеет место, а также получил некоторые векторнозначные и некоммутативные обобщения этих результатов. Эти результаты также охватывают случай показателей, меньших единицы. Примерно в то же время К. Шу в [31] также получил некоторые результаты для хорошей вещественной интерполяции векторнозначных классов H_p. Далее, К. Шу показал в [30], что для перестановочно инвариантных банаховых решёток X и Y пара (X_A, Y_A) является ретрактной подпарой пары (X, Y), и, таким образом, для таких решёток, и, в частности, для пар классов Харди H_p при $1 \leqslant p \leqslant \infty$, имеется хорошая интерполяция. П. Мюллер в [20] (см. также [19]) получил хорошую комплексную интерполяцию между H_1 и H_∞ с помощью комплексных мартингалов Н. Варопулоса. С. В. Кисляков и К. Шу в [37] показали, в частности, как можно получить ретрактность пары $(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_\infty)$ в паре $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_\infty)$ только из усиленной некоторым образом AK-устойчивости пары $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_\infty)$ (а именно, из AK-устойчивости пары $\left(\mathrm{L}_1\left(l^\infty\right), \mathrm{L}_\infty\left(l^\infty_\lambda\right)\right)$; ниже мы подробнее рассмотрим пары такого вида).

А что можно сказать о весовых пространствах Харди? Мы будем рассматривать только весовые пространства Харди $\mathrm{H}_p(w)$ с весом $\log w \in \mathrm{L}_1$; тогда их можно определить так: $\mathrm{H}_p(w) = W^{-1}\mathrm{H}_p = \left\{W^{-1}g \mid g \in \mathrm{H}_p\right\}$, где W — внешняя функция, такая, что $|W| = w$ почти всюду. Они естественно образуются из весовых пространств Лебега $\mathrm{L}_p(w) = \left\{f \mid w^{-1}f \in \mathrm{L}_p\right\}$ с соответствующей квазинормой. В 1990 г. М. Цвикель, Дж. Е. Маккарти и Т. Вольф показали в [2], что пространство $\mathrm{H}_p\left(w_0^{1-\theta}w_1^\theta\right)$, $0 < \theta < 1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, является интерполяционным пространством степени θ для пары $(\mathrm{H}_p(w_0), \mathrm{H}_p(w_1))$ (как стало ясно несколько позже, для весовых пространств Харди это свойство эквивалентно хорошей вещественной или комплексной интерполяции соответствующих весовых классов $\mathrm{H}_p(w)$, т. е. соотношениям вида (1) или (2)) тогда и только тогда, когда выполнено условие $\log \frac{w_0}{w_1} \in \mathrm{BMO}$. Далее, С. В. Кисляков и К. Шу показали в [13], что то же самое условие $\log \frac{w_0}{w_1}$ является необходимым и достаточным для хорошей вещественной или комплексной интерполяции для пары $(\mathrm{H}_p(w_0), \mathrm{H}_q(w_1))$ и при разных показателях $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, а также получили некоторые результаты для векторнозначных классов Харди.

BMO-регулярность — относительно новое понятие, которое в явном виде было введено Н. Кальтоном в [11] в связи с рассматриваемым вопросом (в более общей постановке), хотя, как стало ясно позднее, оно неявно играло роль и в более ранних работах. Решётка X (пока, по-прежнему, речь идёт об измеримых функциях на окружности) называется BMO-регулярной, если для всякой функции $f \neq 0$ найдётся мажоранта

$g \in X$, $g \geqslant |f|$, такая, что $\|g\|_X \leqslant m\|f\|_X$ и $\log g \in \mathrm{BMO}$, $\|\log g\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C$, где константы m и C не зависят от f. Н. Кальтон, в частности, доказал (см. [11, Theorem 5.12]), что если решётки X и Y суперрефлексивны и решётка X BMO-регулярна, то хорошая комплексная интерполяция для пары (X_A, Y_A), т. е. соотношение

$$(X_A, Y_A)_\theta = ((X, Y)_\theta)_A\,, \tag{3}$$

имеет место при некотором (эквивалентно, при всех) $0 < \theta < 1$ тогда и только тогда, когда решётка Y также BMO-регулярна. Кроме того, при тех же ограничениях на решётку X её BMO-регулярность эквивалентна ограниченности проектора Рисса $\mathbb{P}$ в пространстве $X^\alpha \mathrm{L}_2^{1-\alpha}$ при некотором $0 < \alpha < 1$. Отсюда видно, что условие BMO-регулярности встречается довольно часто. Также в [11] приведены некоторые обобщения этих результатов на векторнозначный случай. Таким образом, BMO-регулярность оказалась тесно связанной с хорошей комплексной интерполяцией. Однако, несмотря на всю общность результатов Н. Кальтона, следует отметить, что суперрефлексивность — тяжёлое условие, которое исключает из рассмотрения едва ли не самые интересные случаи решёток L_1 и L_∞. Снять эти ограничения в характеризации соотношения (3) пока не удалось. Однако, о чём пойдёт речь ниже, для результата о связи BMO-регулярности решётки X с ограниченностью проектора Рисса $\mathbb{P}$ в пространстве $X^\alpha \mathrm{L}_2^{1-\alpha}$ при некотором $0 < \alpha < 1$ достаточно лишь свойства Фату, и сам этот результат в действительности устанавливается вещественными методами и имеет место для широкого класса сингулярных интегральных операторов вместо $\mathbb{P}$ на общих пространствах однородного типа вместо $\mathbb{T}$.

Чтобы охватить случай пространств векторнозначных функций, естественно работать с квазибанаховыми решётками измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T}, m) \times (\Omega, \mu)$, где σ-конечное пространство (Ω, μ) играет роль пространства "побочных" переменных. Тогда условие $\|\log g\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C$ в определении BMO-регулярности следует понимать как равномерное условие по второй переменной, т. е.

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\omega \in \Omega} \|\log g(\cdot, \omega)\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C.$$

Естественно определить BMO-регулярность для пары решёток следующим образом: пара решёток (X, Y) измеримых функций на измеримом пространстве $\mathbb{T} \times \Omega$ называется BMO-регулярной с константами (C, m), если для любой пары функций (f, g), $f \in X$, $g \in Y$, отличных от нуля, существует такая пара функций (u, v), $u \in X$, $v \in Y$, называющаяся BMO-мажорантой для пары (f, g), что $\|u\|_X \leqslant m\|f\|_X$, $\|v\|_Y \leqslant m\|g\|_Y$ и $\operatorname{ess\,sup}_{\omega \in \Omega} \|\log(u(\cdot, \omega)/v(\cdot, \omega))\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C$. С. В. Кисляков в обзоре [12] показал, что BMO-регулярность пары решёток является достаточным условием для AK-устойчивости и хорошей вещественной и (при некоторых ограничениях — значительно менее тяжёлых, чем у Н. Кальтона в [11]) комплексной интерполяции аналитических пространств. Легко проверить, что при наличии BMO-регулярности вопрос об AK-устойчивости некоторой пары очень просто сводится к вопросу об AK-устойчивости весовой пары $(\mathrm{L}_\infty(u), \mathrm{L}_\infty(v))$, где в роли весов выступают соответствующие BMO-мажоранты. На последний вопрос ответ, как уже говорилось, известен.

Ранее в 1997 г. С. В. Кисляков показал, что при условии (4) (и только при этом условии) пара $(\mathrm{H}_p(u), \mathrm{H}_q(v))$, $1 < p, q < \infty$, является ретрактом пары $(\mathrm{L}_p(u), \mathrm{L}_q(v))$, причем для фиксированных весов соответствующий общий проектор, называющийся проектором Бургейна, действует сразу при всех p и q. Далее, С. В. Кисляков и К. Шу показали в работах [12] и [14], что условие (4) на веса u и v необходимо (и, разумеется, достаточно) для того, чтобы пара $(\mathrm{H}_p(u), \mathrm{H}_q(v))$ была ретрактной подпарой пары $(\mathrm{L}_p(u), \mathrm{L}_q(v))$ при всех $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ (при крайних значениях показателей настоящей ретракции, разумеется, нет). С помощью этого результата (распространённого на случай трёх решёток) можно очень просто получить устойчивость комплексной интерполяции для BMO-регулярной пары решёток (X, Y), т. е. формулу (3), лишь в предположении, что решётка $X^{1-\theta}Y^{\theta}$ обладает порядково непрерывной нормой (см. [14, Corollary 2]).

Нетрудно проверить, что пара $(\mathrm{L}_p(u), \mathrm{L}_q(v))$ BMO-регулярна тогда и только тогда, когда для весов u и v выполнено условие (4); таким образом, для пар весовых пространств Лебега AK-устойчивость равносильна BMO-регулярности. Верно ли это для произвольной пары квазибанаховых решёток — пока остаётся открытым вопросом, для которого, впрочем, есть некоторое количество частных положительных результатов. В 2001 г. С. В. Кисляков получил в [33] следующий критерий. Свойство Фату решётки X означает замкнутость единичного шара $B_X = \{f \in X \mid \|f\|_X \leqslant 1\}$ по мере, т. е. относительно сходимости по мере на множествах конечной меры, что эквивалентно следующему естественному свойству: если последовательность $f_n \in X$ такова, что $f_n \to f$ почти всюду и $\|f_n\|_X \leqslant 1$, то $f \in X$ и $\|f\|_X \leqslant 1$. Свойство $(*)$ также довольно естественно — оно обеспечивает, среди прочего, невырожденность пространства X_A и означает, что для каждой функции $f \in X$, $f \neq 0$, найдётся мажоранта $g \in X$, $g \geqslant |f|$, такая, что $\log g(\cdot, \omega) \in \mathrm{L}_1$ при почти всех $\omega \in \Omega$. Обозначим через $l^p_\lambda = l^p(\lambda^j)$ решётку l^p с весом $j \mapsto \lambda^j$.

Теорема C. *Пусть пространство (Ω, μ) дискретно (т. е. мера μ состоит из не более чем счётного числа атомов) и банахова решётка X на $\mathbb{T} \times \Omega$ удовлетворяет условию $(*)$. Следующие условия эквивалентны.*

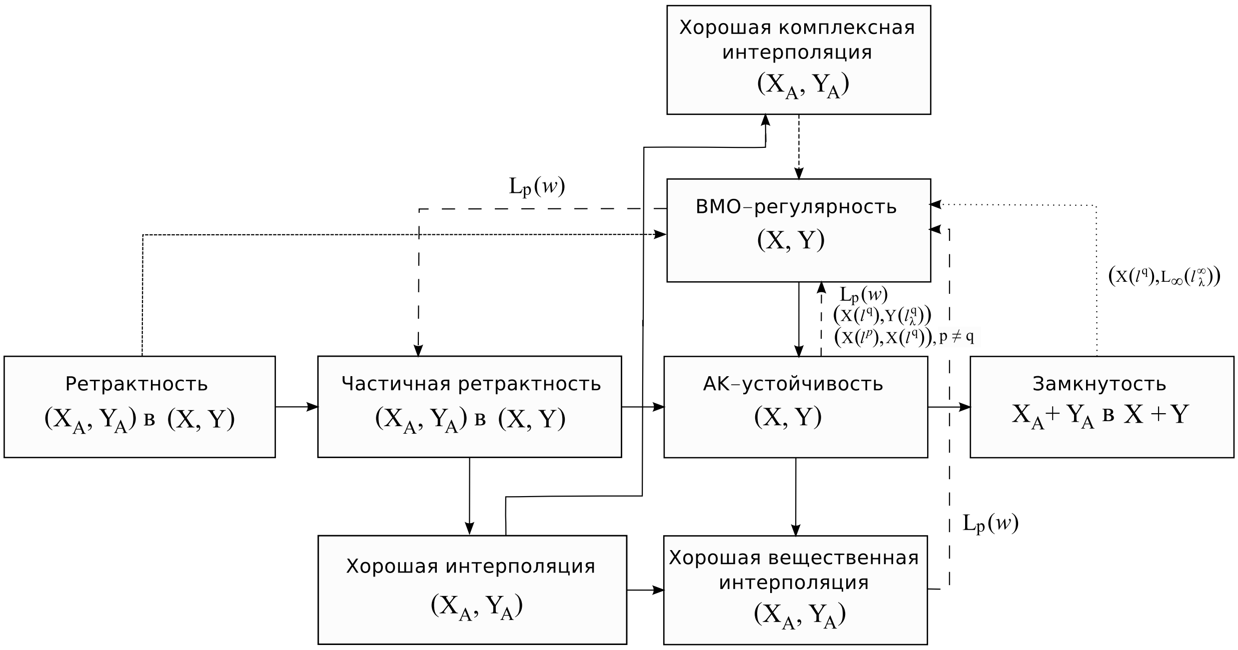
1. *Решётка X BMO-регулярна.*
2. *Для некоторого (эквивалентно, для всех) $r \in [1, \infty)$ и $\lambda > 1$ пара*
$$(X_A(l^r), \mathrm{H}_\infty(l^\infty_\lambda))$$
K-*замкнута в паре*
$$(X(l^r), \mathrm{L}_\infty(l^\infty_\lambda))$$
(т. е. пара $\left(X(l^r), \mathrm{L}_\infty\left(l^\infty_\lambda\right)\right)$ AK-устойчива).

Результаты такого вида естественно называть критериями BMO-регулярности в терминах AK-устойчивости с дополнительной переменной. Наиболее интересным следствием из этого результата является самодвойственность BMO-регулярности, т. е. то, что в условиях этой теоремы решётки X и X' BMO-регулярны лишь одновременно. Решётка X', порядково сопряжённая с решёткой X, состоит по определению из таких измеримых функций g, что $\int_{\mathbb{T}} |fg| < \infty$ при всех f из X. Используя самодвойственность BMO-регулярности, С. В. Кисляков получил в [33] характеризацию BMO-регулярности решётки X в терминах ограниченности проектора Рисса (или оператора гармонического сопряжения) в решётке $X^{\alpha}\mathrm{L}_2^{1-\alpha}$ при некотором (эквивалентно, при всех достаточно малых) $0 < \alpha < 1$. По сравнению с упоминавшимся результатом Н. Кальтона [11] суперрефлексивность не нужна и достаточно лишь условия Фату. Доказательство теоремы C (а точнее, перехода от 2 к 1 в ней) потребовало привлечения теоремы о неподвижной точке и нетривиальной техники построения некоторого аналитического разложения единицы. Далее, в [34] С. В. Кисляков показал, что условие K-замкнутости в этой теореме эквивалентно условию замкнутости пространства $X_A\left(l^r\right) + \mathrm{H}_\infty\left(l^\infty_\lambda\right)$ в пространстве $X\left(l^r\right) + \mathrm{L}_\infty\left(l^\infty_\lambda\right)$ при всех $r > 0$ (таким образом, и в теореме C можно брать любые показатели $0 < r < \infty$), а в [17] он же с помощью этого результата доказал (снова в предположении дискретности пространства Ω), что AK-устойчивость вытекает из некоторого ослабления требования BMO-регулярности для пары (это новое свойство получило название слабой BMO-регулярности), а также привёл некоторые обобщения теоремы C. В работе [17] также продемонстрировано, как самодвойственность свойства BMO-регулярности для банаховых решёток влечёт так называемую делимость этого свойства (т. е. то, что из BMO-регулярности решёток XY и Y следует BMO-регулярность решётки X). Упомянутая слабая BMO-регулярность для пар банаховых решёток (X, Y) вводится так: требуется, чтобы для некоторой BMO-регулярной пары (E, F) и числа $\alpha > 0$ пара $(X^\alpha E, Y^\alpha F)$ была BMO-регулярна. В условиях теоремы C на решётки X и Y это свойство эквивалентно любому из следующих двух условий.

- Пара $(X\mathrm{L}_1, Y\mathrm{L}_1)$ BMO-регулярна.
- Решётка XY' BMO-регулярна.

Там же (в [17]) доказано, что при тех же ограничениях на измеримое пространство Ω слабая BMO-регулярность для пар обладает самодвойственностью и делимостью, а также достаточна для хорошей аналитической интерполяции, и высказана гипотеза о том, что слабая BMO-регулярность для пар эквивалентна обычной.

Итак, мы видим, что для решёток измеримых функций на окружности (в действительности на измеримом пространстве $\mathbb{T} \times \Omega$, но роль пространства Ω в этих вопросах в какой-то мере вспомогательная) имеется развитая теория, в которой переплетены интерполяция аналитических подпространств типа Харди и фундаментальные свойства решёток, породивших эти подпространства, центральное место среди которых занимают различные варианты BMO-регулярности. В части этой работы мы развиваем и дополняем упомянутую теорию, не покидая окружности. Мы докажем гипотезу, упомянутую в предыдущем абзаце (и даже более общее утверждение для пространств с мерой однородного типа, о котором написано ниже). Кроме того, мы обобщим теорему C на случай $r = \infty$ и на случай произвольного σ-конечного (не обязательно дискретного) измеримого пространства (Ω, μ) (что требует лишь изменения одной технической детали в оригинальном доказательстве в работе [33]; это изменение, впрочем, не лежит на поверхности). При этом мы несколько разовьём технику работы с AK-устойчивостью и BMO-регулярностью из работ [33] и [17] и докажем, что в условиях теоремы C (без предположения о дискретности пространства Ω) BMO-регулярность



Интерполяция аналитических пространств на окружности и BMO-регулярность: что известно на момент написания работы. Пунктирные и точечные стрелки означают, что данный переход известен (или справедлив) только при некоторых ограничениях, либо лишь в отдельных нетривиальных случаях.

решётки X также эквивалентна АК-устойчивости пары $\big(X(l^1), \mathrm{L}_\infty(l^\infty)\big)$. Мы также приведём прямое доказательство С. В. Кислякова для случая $r = \infty$ в теореме C. Из этого случая легко получается следующее интересное следствие: если при некоторых дополнительных предположениях пара (X_A, Y_A) является ретрактом (X, Y) в категории пар банаховых пространств, т. е. пространства X_A и Y_A дополняемы в решётках X и Y соответственно одним и тем же проектором, то пара (X, Y) BMO-регулярна. Это немного напоминает методы работы [11], где также использовалась дополняемость для перехода к BMO-регулярности.

Мы приведём полное доказательство сформулированного в [12] утверждения о том, что хорошая интерполяция степени $0 < \theta < 1$ пары весовых пространств H_p на измеримом пространстве $\mathbb{T} \times \Omega$ влечёт BMO-регулярность этой пары. До этого оно имелось в [13] лишь в случае одной переменной, т. е. когда измеримое пространство Ω состоит из одной точки. Обобщение этого доказательства получается естественным, но не вполне тривиальным образом. Наконец, мы покажем, что условие АК-устойчивости пары $\big(\mathrm{L}_{p(\cdot)}, \mathrm{L}_\infty\big)$, в которой фигурирует пространство Лебега $\mathrm{L}_{p(\cdot)}$ с переменным показателем $p(\cdot)$, влечёт некоторые слабые условия гладкости типа логарифмического условия Гёльдера для показателя $p(\cdot)$; в частности, из них следует, что для кусочно-логарифмически-гёльдеровых показателей $p(\cdot)$, $0 < \operatorname{ess\,inf} p(\cdot) < \operatorname{ess\,sup} p(\cdot) < \infty$ (например, для кусочно-постоянных показателей $p(\cdot)$), рассматриваемая АК-устойчивость пары $\big(\mathrm{L}_{p(\cdot)}, \mathrm{L}_\infty\big)$ эквивалентна отсутствию разрывов у показателя $p(\cdot)$, а значит, BMO-регулярности решётки $\mathrm{L}_{p(\cdot)}$. Мы также приводим новые доказательства некоторых известных утверждений. К сожалению, на вопрос о необходимости условия BMO-регулярности для хорошей вещественной интерполяции в общем случае пока ответ получить не удалось, однако разработанные методы также интересны в связи с некоторыми другими приложениями. Однако, главные, на взгляд автора, результаты работы состоят в том, что, как оказалось, можно покинуть окружность и развить содержательную теорию BMO-регулярных решёток измеримых функций на пространствах с мерой однородного типа (например, на $\mathbb{R}^n$). Приступим к описанию этой части работы.

BMO-регулярность в решётках на пространствах однородного типа

Ценность упомянутых в предыдущем разделе результатов состоит ещё и в том, что BMO-регулярные решётки (пока по-прежнему на окружности, точнее, на измеримом пространстве $\mathbb{T}\times\Omega$) встречаются удивительно часто. Сформулируем одно общее утверждение (которое упоминалось ранее), подтверждающее это, и в то же время дающее представление о том, как строить решётки, не являющиеся BMO-регулярными (для этого удобнее всего добиваться нарушения условия 3 ниже). Предположим, что решётка X банахова и обладает свойством Фату. Пусть ещё зафиксировано число $0 < \beta < 1$.

Теорема A. *Следующие условия эквивалентны.*

1. *Решётка X* BMO-*регулярна.*
2. *Решётка X'* BMO-*регулярна.*
3. *Для всех достаточно малых чисел α, $0 < \alpha < 1$, оператор гармонического сопряжения ограничен в пространстве $\left(X^{\alpha}\mathrm{L}_1^{1-\alpha}\right)^{\beta}$.*

В случае решёток на $\mathbb{T} \times \Omega$, разумеется, оператор гармонического сопряжения действует здесь по первой переменной. Тем самым выясняется, что условие BMO-регулярности для решётки X тесно связано с хорошим поведением оператора гармонического сопряжения на некоторых решётках, производных от X, что делает класс BMO-регулярных решёток интересным и вне связи с интерполяцией пространств типа Харди.

Теорема A — глубокий результат. Впервые он был доказан в [33], причём одним из основных моментов в рассуждении была теорема Ки Фана–Какутани о неподвижной точке для многозначных отображений. Другим, как казалось, существенным моментом был комплексный анализ: хотя пространства вида X_A не входят в формулировку, в доказательстве использовалась сформулированная ранее теорема C. В настоящей работе мы, среди прочего, докажем теорему A чисто вещественными методами. Автор нашёл этот способ доказательства, решая (и решив) упомянутый ранее вопрос о связи между слабой BMO-регулярностью и обычной. Самое важное, однако, состоит в том, что вещественные методы позволяют покинуть окружность и доказать результат для других пространств с мерой — таких, на которых естественно вводится класс BMO. Сформулируем основной результат в случае пространства $\mathbb{R}^n$. По аналогии с окружностью, назовём квазибанахову решётку X измеримых функций на $\mathbb{R}^n$ BMO-регулярной, если для всякой функции $0 \neq f \in X$ найдётся такая мажоранта $g \geqslant |f|$, что $\|g\|_X \leqslant C\|f\|_X$ и $\|\log g\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C$. Мы по-прежнему предполагаем, что решётка X обладает свойством Фату; пусть, как и раньше, задано число $0 < \beta < 1$.

Теорема B. *Следующие условия эквивалентны.*

1. *Решётка X BMO-регулярна.*
2. *Решётка X' BMO-регулярна.*
3. *В пространстве $\left(X^\alpha \mathrm{L}_1^{1-\alpha}\right)^\beta$ при всех достаточно малых значениях числа α, $0 < \alpha < 1$, ограничен максимальный оператор Харди–Литлвуда M*
4. *Все сингулярные интегральные операторы Кальдерона–Зигмунда ограничены в пространстве $\left(X^\alpha \mathrm{L}_1^{1-\alpha}\right)^\beta$ при всех достаточно малых значениях α, $0 < \alpha < 1$.*
5. *Одно из преобразований Рисса*

$$R_j f(x) \overset{def}{=} \mathrm{v.\,p.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{c_n(t_j - x_j)}{|t-x|^{n+1}} f(t)dt$$

ограничено в пространстве $\left(X^\alpha \mathrm{L}_1^{1-\alpha}\right)^\beta$ хотя бы при одном значении числа α, $0 < \alpha < 1$.

Хотя в случае $\mathbb{R}^n$ пока не видно, связано ли как-нибудь условие BMO-регулярности с интерполяцией, теорема B показывает, что оно в простых терминах выражает некое фундаментальное свойство решётки X и что его стоит изучать. Что касается доказательства, то теорема Ки Фана–Какутани в нём по-прежнему участвует. Однако при проверке эквивалентности условий 5 и 1 приходится привлекать ещё и неравенство Гротендика. Впрочем, польза от него в этих вопросах была известна давно — впервые в близком контексте его применил ещё Рубио де Франсиа в [26]. Отметим, что в [33] комплексные методы позволили избежать неравенства Гротендика, но в их отсутствии к нему придётся вернуться.

Интерполяция пространств, порождённых квазирегулярным проектором

Остановимся на одном важном семействе подпространств в решётках измеримых функций. Аналитические классы Харди, обсуждавшиеся ранее, тоже можно вписать в этот более общий контекст. Нас снова будет интересовать интерполяция — однако в общем случае удаётся сказать про неё значительно меньше, чем про пространства X_A в решётках измеримых функций на окружности. Главная причина состоит в том, что аналитичность не разрушается при перемножении функций, и это доставляет дополнительный ресурс при работе с пространствами вида X_A.

Пусть Q — сингулярный интегральный оператор Кальдерона–Зигмунда (не обязательно скалярный), исходно заданный на множестве D_0 ограниченных функций с ограниченным носителем на пространстве однородного типа $\Omega = \mathbb{R}^n$ или $\Omega = \mathbb{T}^n$ с мерой Лебега, продолжающийся до ограниченного оператора на $\mathrm{L}_{p(Q)}$ для некоторого показателя $p(Q) > 1$, и являющийся проектором, т. е. соотношение $Q^2 = Q$ выполнено по крайней мере на множестве D_0. Нас будут интересовать решётки измеримых функций на Ω. Если множество $D_0 \cap X$ плотно в решётке X (что эквивалентно тому, что решётка X обладает порядково непрерывной нормой; например, $X = \mathrm{L}_p$ при $1 \leqslant p < \infty$) то соответствующее пространство X^Q, порождённое проектором Q, можно задать как как замыкание множества

$$\{f \in X \mid Qf = f\} \tag{4}$$

в пространстве X. Для весовой решётки $\mathrm{L}_\infty(\omega)$ соответствующее пространство можно задать через двойственность как

$$\mathrm{L}_\infty^Q(\omega) = \left(\mathrm{L}_1^{I-Q^*}\left(\omega^{-1}\right)\right)^\perp; \tag{5}$$

в этом случае достаточно лишь того, чтобы оператор Q^* был оператором Кальдерона–Зигмунда. При этом можно проверить, что для функций $f \in \mathrm{L}_\infty^Q(\omega) \cap \mathrm{L}_1$ соотношение $Qf = f$ будет выполнено. Легко видеть, что в обоих случаях X_Q является замкнутым подпространством пространства X. Многие интересные пространства укладываются в эту конструкцию (см. [12]). Сейчас мы приведём основные примеры (см. также [5]).

- Комплексные классы Харди на окружности H_p и вообще пространства X_A (если множество D_0 плотно в X) представляются в виде $X_A = X^{\mathbb{P}}$, где $\mathbb{P}$ — проектор Рисса.

- Аналогично, пространства Харди $\mathrm{H}_p(\mathbb{B}_n)$ на единичном шаре $\mathbb{B}_n$ пространства $\mathbb{C}^n$, понимаемые в смысле их граничных значений на сфере $\mathbb{S}_n = \partial\mathbb{B}_n$, имеют вид (4), где в роли Q выступает проектор Коши.

- Тесно связанные с пространствами Соболева $\mathrm{W}_p^{(l)}(\mathbb{T}^n)$ множества

$$X_p = \left\{\left\{f^{(k)}\right\}_{|k|=l} \mid f \in \mathrm{W}_p^{(l)}(\mathbb{T}^n)\right\}$$

  также могут быть представлены в виде (4) или (5), поскольку можно проверить, что при $p = 2$ соответствующий ортогональный проектор на пространство X_2 в L_2 является оператором Кальдерона–Зигмунда.

- Пространства вида

$$X \cap T_1^{-1}X \cap \ldots \cap T_N^{-1}X = \{f \in X \mid T_1 f \in X, \ldots, T_N f \in X\},$$

  где $T = \{T_j\}_{j=1}^N$ — некоторый конечный набор операторов Кальдерона-Зигмунда, могут быть представлены в виде первой координаты от $X^Q\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$ для проектора $Q(f, x_1, \ldots, x_n) = (f, T_1 f, \ldots, T_N f)$.

- Вещественный класс Харди $\mathrm{H}_1(\mathbb{R}^n)$ имеет именно такой вид для $T = \{R_j\}_{j=1}^n$, где R_j — преобразования Рисса.

Нас интересует следующий вопрос: для каких пар решёток (X, Y) и проекторов Q рассматриваемого вида имеет место хорошая вещественная интерполяция для пары

$\left(X^Q, Y^Q\right)$, т. е. формула $\left(X^Q, Y^Q\right)_{\theta,p} = \left[(X,Y)_{\theta,p}\right]^Q$? Естественным подходом является сведение к вопросу о K-замкнутости пары $\left(X^Q, Y^Q\right)$ в паре (X, Y), который, как обсуждалось ранее, интересен и сам по себе (кстати, один родственный вопрос рассматривался также в [36]). Случай классов Лебега $X = \mathrm{L}_p$ представляет наибольший интерес. В 1996 г. в работе [37] С. В. Кисляков и К. Шу получили следующий результат.

Теорема K. 1. *Если проектор Q является оператором Кальдерона-Зигмунда, то пара $\left(\mathrm{L}_s^Q, \mathrm{L}_t^Q\right)$ K-замкнута в паре $(\mathrm{L}_s, \mathrm{L}_t)$ при всех $1 \leqslant s, t \leqslant p(Q)$.*

2. *Если проектор Q^* является оператором Кальдерона–Зигмунда, то пара $\left(\mathrm{L}_s^Q, \mathrm{L}_t^Q\right)$ K-замкнута в паре $(\mathrm{L}_s, \mathrm{L}_t)$ при всех $p(Q^*)' \leqslant s, t \leqslant \infty$.*

3. *Если оба проектора Q и Q^* являются операторами Кальдерона-Зигмунда, то пара $\left(\mathrm{L}_s^Q, \mathrm{L}_t^Q\right)$ K-замкнута в паре $(\mathrm{L}_s, \mathrm{L}_t)$ при всех $1 \leqslant s, t \leqslant \infty$.*

Этот результат также имеется в обзоре [12].

А что с интерполяцией весовых пространств $\mathrm{L}_p^Q(w)$? По сравнению с аналитическими пространствами на окружности, вопрос о достаточных условиях для хорошей вещественной интерполяции пары весовых пространств $\mathrm{L}_p^Q(w)$, по-видимому, является довольно трудной проблемой из-за несовершенства имеющихся методов, которые, насколько известно автору, сводятся к тому, что было использовано в теореме K. Тем не менее, *кое-что* эти методы дают. В 2004 г. Д. Анисимов и С. В. Кисляков в работе [32] получили аналог разложения Кальдерона–Зигмунда для окаймлённого оператора $Q_u g = u^{-1}Q[ug]$ с весом a, т. е. в пространстве $\mathrm{L}_1\left(a^{-1}\right)$, если веса a и $w = \frac{a}{u}$ удовлетворяют условиям $\frac{a}{u} \in \mathrm{A}_1$ и $a \in \mathrm{A}_\infty$. Окаймление соответствует преобразованию $f = ug$ в паре, что позволяет с помощью замены плотности получить аналог первых двух утверждений теоремы K для весовых пар $\left(\mathrm{L}_1^Q\left(w^{-1}\right), \mathrm{L}_t^Q\left(a^{1-\frac{1}{t}} w^{-1}\right)\right)$ и $\left(\mathrm{L}_s^Q\left(wa^{-\frac{1}{s}}\right), \mathrm{L}_\infty^Q(w)\right)$ при достаточно малых значениях $t > 1$ и больших значениях $s < \infty$ соответственно.

В диссертации с помощью метода склейки интервалов получен весовой аналог утверждения 3 теоремы K для весовой пары $\left(\mathrm{L}_1^Q\left(w_0^{-1}\right), \mathrm{L}_\infty^Q(w_1)\right)$, если $w_0, w_1 \in \mathrm{A}_1$ и $w_0 w_1 \in \mathrm{A}_\infty$ с соответствующей оценкой на константу K-замкнутости в терминах констант весов w_0, w_1 и $w_0 w_1$. Отсюда легко получить, что для любой A_1-регулярной решётки X (т. е. такой, в которой ограниченно действует максимальный оператор Харди–Литлвуда M) пара $\left(\mathrm{L}_1^Q, X^Q\right)$ K-замкнута в паре (L_1, X). В частности, отсюда получается хорошая вещественная интерполяция для вещественных классов Харди и для пространств Соболева на торе для пространств Лебега $X = \mathrm{L}_{p(\cdot)}$ с переменным показателем $p(\cdot)$ (при "стандартных" условиях на этот показатель, которые гарантируют A_1-регулярность пространства $\mathrm{L}_{p(\cdot)}$). Например, так получается хорошая вещественная интерполяция пары $\left(\mathrm{H}_1, \mathrm{L}_{p(\cdot)}\right)$ при условии, что максимальный оператор M ограничен в пространствах $\mathrm{L}_{p(\cdot)}$ и $\mathrm{L}_{p'(\cdot)}$. Отметим, что хорошая комплексная интерполяция для пары $\left(\mathrm{H}_1, \mathrm{L}_{p(\cdot)}\right)$ была получена в 2009 г. Т. Копалиани в работе [18] при условии, что максимальный оператор ограничен в пространстве $\mathrm{L}_{p(\cdot)}$. Комплексные интерполяционные пространства для пары пространств Лебега $\mathrm{L}_{p(\cdot)}$ с переменным показателем $p(\cdot)$ вычисляются так же, как и в случае постоянного показателя $p(\cdot)$ (т. е. для них справедлив аналог интерполяционной теоремы Рисса–Торина; см., например, [3]), однако на момент написания этой работы вещественные интерполяционные пространства или аналог интерполяционной теоремы Марцинкевича для такой пары неизвестны.

Мы также обсудим, как можно задавать пространства X^Q для *произвольных* A_1-регулярных решёток измеримых функций. Эта процедура даёт то же, что и естественный способ, указанный ранее, когда он применим, а также обеспечивает некоторые результаты типа K-замкнутости для соответствующих пар. Она была предложена автору С. В. Кисляковым.

Теорема о короне и аналитическое разложение единицы

Последний сюжет, о котором мы упомянем, снова относится к граничным пространствам аналитических функций на окружности. С помощью "классической" теоремы о короне Л. Карлесона [1] в упомянутой ранее работе [2] была впервые получена хорошая аналитическая интерполяция степени θ для весовых пространств Харди $\mathrm{H}_p(w)$ (с одинаковым p). Точно так же получается и АК-устойчивость соответствующей пары; это доказательство довольно коротко. В работе [16] С. В. Кисляков получил характеризацию условия $\log w \in \mathrm{BMO}$ в терминах аналитического разложения единицы $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, согласованного с весом w. Последовательность $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ называется аналитическим разложением единицы для констант $\varepsilon > 0$, $\lambda > 1$ и C, согласованным с весом w, если выполнены соотношения $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\varphi_j|^\varepsilon \leqslant C$ и $|\varphi_j|^\varepsilon w \leqslant C\lambda^j$ почти всюду при всех $j \in \mathbb{Z}$, а таже $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\varphi_j|^\varepsilon \lambda^j \leqslant Cw$ почти всюду и $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi_j = 1$. Это — аналитический аналог естественного разложения единицы $e_n = \chi_{\{2^n \leqslant w < 2^{n+1}\}}$, т. е. функции φ_n аналитичны, образуют разложение единицы и ведут себя примерно как e_n. Оба перехода — от условия $\log w \in \mathrm{BMO}$ к аналитическому разложению единицы, согласованному с весом w, и обратно — довольно нетривиальны.

В главе 2 диссертации мы покажем, как эту характеризацию можно непосредственно получить из векторнозначной теоремы о короне. При этом нам не понадобится никакой новой техники, это доказательство можно считать несколько более прозрачным (и коротким) вариантом той же самой конструкции из [16]. Как следствие, мы получаем компактное доказательство того, что BMO-регулярность влечёт АК-утойчивость, использующее теорему о короне, но не опирающееся явно на АК-устойчивость весовых классов Харди. Конечно, следует иметь в виду, что АК-устойчивость весовых классов Харди получается вполне элементарными методами (см. [12]), в то время как теорема о короне — довольно сложный и глубокий результат. Стоит ещё отметить, что сама постановка задачи о короне даётся в терминах поведения аналитических функций на всём единичном круге $\mathbb{D}$, и не известно её доказательств, избегающих выхода в круг. В то же время АК-устойчивость можно изучать, не покидая единичной окружности (см. [12] и другие источники, цитированные ранее). Поэтому "упрощение", основанное на использовании теоремы о короне, носит, скорее, психологический характер.

Вместе с этим мы обсудим векторнозначную теорему о короне в более общем виде, в котором фигурируют последовательности из l^s при любом $0 < s \leqslant \infty$, а не только l^2. А именно, мы рассматриваем уравнение $\sum_j f_j g_j = 1$ относительно последовательности $\{g_j\}$ функций, аналитических в круге $\mathbb{D}$, которое и называется задачей о короне, и исследуем вопрос о разрешимости этого уравнения с оценками в терминах нормы $\mathrm{H}_\infty(l^r)$, $0 < r \leqslant \infty$, в предположениях $0 < p, q \leqslant \infty$, $f \in \mathrm{H}_\infty(l^q)$ и $|f(z)|_p \geqslant \delta$ при всех $z \in \mathbb{D}$. Исходное (и сложное) доказательство Л. Карлесона годилось только для конечного числа функций. Доказательство Т. Вольфа, появившееся в 1979 г., довольно быстро привело к векторнозначному обобщению при $p = q = r = 2$ в 1980 г. одновременно и независимо В. А. Толоконниковым в [38] и М. Розенблюмом в [25] (и далее оценки в этом результате улучшались рядом авторов вплоть до работы [27]); в то же время А. Учияма в работе [28] показал, как исходное доказательство Л. Карлесона обобщается на случай счётного числа функций при $p = q = \infty$ и $r = 1$. В. А. Толоконников также получил разрешимость в случае $2 < p = q < \infty$, $r = p'$, но при этом p должно было быть целым чётным (его доказательство этого утверждения, видимо, не было опубликовано). Сведения, имеющиеся на момент написания этой работы относительно разрешимости векторнозначной задачи о короне в рассматриваемой постановке при других значениях показателей p, q и r, неполны, и, в частности, пока ничего не известно про разрешимость при $p = q < 2$.

Кроме обычной задачи о короне, рассматривается также её более слабый вариант, называющийся H_p задачей о короне: разрешимость уравнения $\sum_j f_j g_j = h$ для $h \in \mathrm{H}_p$ относительно функций $\{g_j\} \in \mathrm{H}_p(l^r)$ с соответствующими оценками на норму решения. Под теоремой о разрешимости мы понимаем доказательство существования решения при естественном необходимом условии $\sup_{z\in\mathbb{D}} |\{f_j(z)\}|_{r'} \geqslant \delta > 0$. При $p = r = 2$ соответствующий результат тесно связан с так называемой тёплицевой теоремой о короне, и обычная H_∞ теорема о короне получается из неё с помощью теоремы о подъёме коммутанта (см. по этому поводу, например, [21, Appendix 3]). Естественно, разрешимость H_∞ задачи о короне влечёт разрешимость H_p задачи о короне. Поэтому кажется, что H_p задача о короне должна быть проще. В этой работе мы покажем, что так оно и есть: доказательство Т. Вольфа разрешимости H_∞ задачи о короне можно адаптировать к H_2 задаче о короне, и при этом оно значительно упростится: в нём не понадобится использовать ни построение внешних функций, ни оценки с мерами Карлесона в какомлибо виде, а все оценки выглядят просто и естественно. Правда, при этом получается довольно грубая оценка на константу разрешимости. Вероятно, это рассуждение было известно и ранее, однако готовых ссылок найти не удалось. См., впрочем, [27], где непосредственно получена наилучшая из известных в настоящий момент оценка в H_2 задаче о короне, что, видимо, несовместимо с упомянутыми упрощениями.

В этой работе мы также покажем, что разрешимость векторнозначной H_p задачи о короне (даже, по существу, в более общей постановке, чем было указано выше) влечёт разрешимость H_∞ задачи о короне с той же константой, и более того, для широкого класса решёток X разрешимость векторнозначной X_A задачи о короне (т. е. если пространство H_p везде заменить на X_A) точно так же влечёт разрешимость H_∞ задачи о короне. Этот результат является хорошей иллюстрацией применения теоремы о неподвижной точке, которая является ключевым ингридиентом в основных результатах этой работы. Пока, впрочем, неясно, имеются ли у этого результата какие-нибудь интересные применения (ведь, как уже упоминалось, в стандартном случае эквивалентность H_2 и H_∞ задач о короне можно установить с помощью теоремы о подъёме коммутанта). *Новым* на данный момент, по-видимому, является только то, что константы в H_p и H_∞ векторнозначных задачах о короне совпадают при всех p, и что вместо H_p можно использовать очень широкий класс решёток для попыток улучшения этой константы. С. В. Кисляков внёс значительные улучшения в исходное доказательство автора.

Сводка основных результатов

В этот раздел вынесены точные формулировки основных результатов этой работы со ссылками на соответствующие утверждения в тексте диссертации. Здесь мы лишь вкратце объясняем суть дела; определения используемых понятий и подробные обсуждения, включая их связь с имевшимися до этого результатами, даются в соответствующих разделах диссертации.

Интерполяция аналитических пространств. Для числа $\lambda > 0$ через $l^p_\lambda = l^p(\lambda^j)$ обозначается решётка l^p с весом $j \mapsto \lambda^j$. Следующий результат даёт характеризацию BMO-регулярности пар решёток в терминах AK-устойчивости некоторых пар с дополнительной переменной.

Теорема. (5.5.1) *Пусть (X, Y) — пара решёток измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T}\times\Omega, m\times\mu)$, обладающих свойством Фату и свойством $(*)$, причём XY' является банаховой решёткой. Следующие условия эквивалентны.*

1. *Пара (X, Y) BMO-регулярна.*
2. *Пара $(X(l^p_\lambda), Y(l^q))$ AK-устойчива при некоторых значениях $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$ и $\lambda > 1$.*
3. *Пара $(X(l^p_\lambda), Y(l^q))$ AK-устойчива при всех значениях $\lambda > 1$ и $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$.*
4. *Пара $(X(l^\infty), Y(l^1))$ AK-устойчива.*

По сравнению с результатами, полученными в [17] и [33], новой здесь является достаточность условия 2 при $p = q$, достаточность условия 4 и то, что мы рассматриваем произвольное σ-конечное измеримое пространство Ω (в упомянутых работах оно предполагалось дискретным).

Следует отметить интересное следствие этого результата.

Предложение. (5.5.6) *Пусть X и Y — банаховы решётки измеримых функций на некотором измеримом пространстве $(\mathbb{T}\times\Omega, m\times\mu)$, обладающие свойством Фату и свойством $(*)$, причём решётка XY' банахова. Пусть пара (X_A, Y_A) является ретрактом пары (X, Y), т. е. некоторый проектор $Q : X + Y \to X_A + Y_A$ переводит X в X_A, Y в Y_A, и ограничен в решётках X и Y. Тогда пара (X, Y) BMO-регулярна.*

Кроме того, в диссертации приведён следующий несложный результат о свойствах, которыми должен обладать показатель $p(\cdot)$ в пространстве Лебега $\mathrm{L}_{p(\cdot)}$ с переменным показателем, чтобы пара $\left(\mathrm{L}_{p(\cdot)}, \mathrm{L}_\infty\right)$ была АК-устойчива. Для измеримых множеств $E \subset \mathbb{T}$ положительной меры мы используем следующие следующие естественные обозначения: $p_+(E) = \operatorname{ess\,sup}_E p(\cdot)$, $p_-(E) = \operatorname{ess\,inf}_E p(\cdot)$, $p_\pm = p_\pm(\mathbb{T})$.

Предложение. (5.7.2) *Пусть $p : \mathbb{T} \to (0, \infty)$ — измеримая функция, такая, что $0 < p_- \leqslant p_+ < \infty$ и пара $\left(\mathrm{L}_{p(\cdot)}, \mathrm{L}_\infty\right)$ АК-устойчива. Тогда существует постоянная c_2, для которой при всех $\frac{\pi}{2} > \varepsilon > 0$ и $\theta \in \mathbb{R}$ выполнено условие*

$$\frac{1}{p_+(E_{\varepsilon,\theta})} - \frac{1}{p_-(F_{\varepsilon,\theta})} \leqslant \frac{c_2}{-\log \varepsilon}, \tag{6}$$

где $E_{\varepsilon,\theta} = \{e^{i\alpha} \mid \alpha \in (\theta, \theta + \varepsilon)\}$, $F_{\varepsilon,\theta} = \{e^{i\alpha} \mid \alpha \in (\theta - \varepsilon, \theta - \frac{\varepsilon}{2})\}$, и тем же свойством обладает функция $\tilde{p}(e^{i\theta}) = p(e^{-i\theta})$.

Условие (6) является следствием известного логарифмического условия Гёльдера $\alpha = \frac{1}{p(\cdot)}$, $|\alpha(x) - \alpha(y)| \leqslant c_1 \left[\log\left(e + \frac{1}{|x-y|}\right)\right]^{-1}$, которое достаточно (но, видимо, не необходимо) для того, чтобы решётка $\mathrm{L}_{p(\cdot)}$ была BMO-регулярной. Пока неясно, как связаны АК-устойчивость и BMO-регулярность в общем случае и в случае решёток $\mathrm{L}_{p(\cdot)}$, однако предложение 5.7.2 показывает, что эти свойства эквивалентны по крайней мере для достаточно широкого класса кусочно-логарифмически-гёльдеровых показателей.

Следствие. *Пусть задана измеримая функция $p : \mathbb{T} \to (0, \infty)$, $0 < p_- \leqslant p_+ < \infty$, и окружность $\mathbb{T}$ разбивается на конечное число дуг I_n, на внутренности каждой из которых функция $\frac{1}{p(\cdot)}$ удовлетворяет логарифмическому условию Гёльдера и монотонна вблизи концов этих дуг. Следующие условия эквивалентны.*

1. *Пара $\left(\mathrm{L}_{p(\cdot)}, \mathrm{L}_\infty\right)$ АК-устойчива.*
2. *Функция $\frac{1}{p(\cdot)}$ удовлетворяет логарифмическому условию Гёльдера.*
3. *Решётка $\mathrm{L}_{p(\cdot)}$ BMO-регулярна.*

BMO-регулярность в решётках на пространствах однородного типа. Пусть (S, ν) — измеримое пространство однородного типа (например, $S = \mathbb{R}^n$ или $S = \mathbb{T}^n$ с мерой Лебега). A_p-регулярность решётки X измеримых функций на измеримом пространстве $(S \times \Omega, \nu \times \mu)$ означает, что для всякой функции $f \in X$ найдётся некоторая мажоранта $g \geqslant |f|$, такая, что $\|g\|_X \leqslant c\|f\|_X$ и $g \in \mathrm{A}_p$ (равномерно по второй переменной) с некоторой константой C, причём величины c и C не зависят от функции f. Под A_p понимается известное условие Макенхаупта, а также класс функций, удовлетворяющих этому условию. Следующий основной результат является уточнением свойства делимости BMO-регулярности, обсуждаемого ниже.

Теорема. (3.3.1) *Пусть X — банахова решётка измеримых функций на измеримом пространстве $(S \times \Omega, \nu \times \mu)$, обладающая свойством Фату, а решётка $X\mathrm{L}_q$, $1 < q < \infty$,* *также является банаховой и* A_p*-регулярна при некотором* $1 \leqslant p < \infty$*. Тогда решётка* X A_{p+1}*-регулярна.*

Этот результат получается с помощью теоремы о неподвижной точке.

BMO-регулярность решётки X означает, что для всякой ненулевой функции f из решётки X найдётся некоторая мажоранта $g \geqslant |f|$, такая, что $\|g\|_X \leqslant c\|f\|_X$ и $\log g \in \mathrm{BMO}$ (равномерно по второй переменной) с некоторой константой C, причём величины c и C не зависят от функции f. Следующий результат показывает, что свойство BMO-регулярности самодвойственно для решёток, обладающих свойством Фату, и выявляет связь этого свойства с ограниченностью максимального оператора Харди–Литлвуда M.

Теорема. (3.4.1) *Пусть* X *— банахова решётка измеримых функций на измеримом пространстве* $(S \times \Omega, \nu \times \mu)$*, обладающая свойством Фату. Пусть* $0 < \beta < 1$*. Следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Решётка* X BMO*-регулярна.*
2. *Решётка* $X\mathrm{L}_q$ BMO*-регулярна при некотором* $0 < q < \infty$*.*
3. *Максимальный оператор Харди–Литлвуда* M *ограничен в решётке* $\left(X^\alpha \mathrm{L}_1^{1-\alpha}\right)^\beta$ *при всех достаточно малых значениях* $0 < \alpha \leqslant 1$*.*
4. *Оператор* M *ограничен в решётке* $\left(X^\alpha \mathrm{L}_1^{1-\alpha}\right)^\beta$ *при некотором* $0 < \alpha \leqslant 1$*.*
5. *Решётка* X' BMO*-регулярна.*

Довольно простым следствием этого результата является делимость свойства BMO-регулярности. Для достаточно хороших весов w весовая решётка $Y(w)$ определяется как множество функций вида wf, $f \in Y$, с нормой $\|g\|_{Y(w)} = \|gw^{-1}\|_Y$.

Предложение. (3.4.3) *Пусть* X *и* Y *— банаховы решётки измеримых функций на некотором измеримом пространстве* $(S \times \Omega, \nu \times \mu)$*, обладающие свойством Фату. Если решётки* XY *и* Y BMO*-регулярны, то решётка* X *также* BMO*-регулярна. В частности, если решётка* Y *и весовая решётка* $Y(w)$ BMO*-регулярны для некоторого веса* w*, то* $\log w \in \mathrm{BMO}$ *с некоторой константой* C*, т. е.* $\|\log w(\cdot, \omega)\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C$ *при почти всех* $\omega \in \Omega$*.*

Следующий результат, в частности, выявляет связь между свойством BMO-регулярности и ограниченностью операторов Кальдерона–Зигмунда в некоторых пространствах. Мы формулируем его в несколько абстрактных терминах, чтобы не сужать его естественную область применения. Отображение T называется A_2-ограниченным, если для него имеются весовые оценки в пространстве L_2 с весами, удовлетворяющими условию Макенхаупта A_2 и соответствующими оценками констант. Отображение T называется слабо A_2-ограниченным, если соответствующие весовые оценки выполнены с весами, удовлетворяющими условию Макенхаупта A_1 и соответствующими оценками констант. Отображение T называется BMO-невырожденным, если из наличия для него весовой L_2 оценки с весом w вытекает, что выполнено условие $\log w \in \mathrm{BMO}$ с соответствующей оценкой константы.

Теорема. (3.6.3) *Пусть X — банахова решётка измеримых функций на измеримом пространстве $(S\times\Omega, \nu\times\mu)$, обладающая свойством Фату. Следующие условия эквивалентны.*

1. *Решётка X* BMO-*регулярна.*
2. *Некоторый слабо* A_2-*ограниченный и* BMO-*невырожденный линейный оператор T ограниченно действует в решётке* $\left(X^{\alpha}\mathrm{L}_1^{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$ *при некотором* $0<\alpha<1$.
3. *Все слабо* A_2-*ограниченные отображения T ограничены в решётке* $\left(X^{\alpha}\mathrm{L}_1^{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$ *при всех достаточно малых значениях* $0<\alpha<1$.

В частности, в пункте 2 в качестве оператора T можно взять любое преобразование Рисса R_j, а в пункте 3 — все операторы Кальдерона–Зигмунда (со стандартными условиями на гладкость ядра).

BMO-регулярность пары решёток (X,Y) означает, что для всяких ненулевых функций $f\in X$ и $g\in Y$ найдутся некоторые мажоранты $u\geqslant|f|$ и $v\geqslant|g|$, такие, что $\|u\|_X\leqslant c\|f\|_X$, $\|v\|_Y\leqslant c\|g\|_Y$ и $\log\frac{u}{v}\in\mathrm{BMO}$ с некоторой константой C, причём величины c и C не зависят от функций f и g. Следующие результаты дают характеризацию BMO-регулярности пары (X,Y) в терминах BMO-регулярности решётки XY' и показывают, что это свойство также обладает самодвойственностью и делимостью.

Теорема. (3.8.8) *Пусть X и Y — банаховы решётки измеримых функций на измеримом пространстве $(S\times\Omega,\nu\times\mu)$, обладающие свойством Фату. Следующие условия эквивалентны.*

1. *Пара (X,Y)* BMO-*регулярна.*
2. *Пара $(X\mathrm{L}_q, Y\mathrm{L}_q)$* BMO-*регулярна при некотором значении (эквивалентно, при всех значениях)* $0<q\leqslant\infty$.
3. *Пара (X',Y')* BMO-*регулярна.*
4. *Решётка XY'* BMO-*регулярна.*

Предложение. (3.8.9) *Пусть X, Y, E и F — банаховы решётки измеримых функций на некотором измеримом пространстве $(S\times\Omega,\nu\times\mu)$, обладающие свойством Фату. Если пары (XE,YF) и (E,F)* BMO-*регулярны, то пара (X,Y) также* BMO-*регулярна.*

Интерполяция пространств, порождённых квазирегулярным проектором. Напомним, что для решётки X измеримых функций и проектора Q (вообще говоря, разрывного на X) через X^Q мы обозначаем множество тех функций f из решётки X, для которых выполнено соотношение $Qf=f$ в некотором смысле.

Теорема. (4.2.4) *Пусть X — A_1-регулярная решётка измеримых функций на измеримом пространстве $S = \mathbb{R}^n$ или $S = \mathbb{T}^n$ с мерой Лебега, причём множество $X \cap \mathrm{L}_1$ плотно в X, а Q — оператор Кальдерона–Зигмунда, являющийся проектором. Тогда пара $\left(\mathrm{L}_1^Q, X^Q\right)$* К*-замкнута в паре (L_1, X) с константой, зависящей лишь от константы A_1-регулярности решётки X и свойств проектора Q.*

Теорема о короне. Пусть E и E_* — решётки измеримых функций на измеримых пространствах (Ω, μ) и (Ω_*, μ_*) соответственно. Задачей о короне с данными $F \in \mathrm{H}_\infty (E \to E_*)$ называется уравнение $Fg = f$ относительно аналитической функции g со значениями в E. Эта задача называется разрешимой в решётке X_A, если для любой функции $f \in X_A(E)$ найдётся соответствующая функция $g \in X_A(E_*)$, такая, что $Fg = f$ и имеет место оценка $\|g\|_{X(E)} \leqslant C\|f\|_{X(E_*)}$ с некоторой константой C, не зависящей от f.

Теорема. (2.3.4) *Пусть банахова решётка измеримых функций X на измеримом пространстве $\mathbb{T}$ с мерой Лебега обладает свойством $(*)$ и свойством Фату. Пусть банахова решётка E конечномерна. Пусть $F \in \mathrm{H}_\infty (E \to E_*)$ — фиксированные данные задачи о короне. Тогда следующие условия эквивалентны с равенством констант.*

1. *X_A задача о короне с данными F разрешима для любой решётки X, обладающей условием $(*)$.*
2. *X_A задача о короне с данными F разрешима для некоторой решётки X, обладающей условием $(*)$ и свойством Фату.*
3. H_1 *задача о короне с данными F разрешима.*
4. H_∞ *задача о короне с данными F разрешима.*

Описание диссертации по главам и параграфам

Мы упоминаем в этом описании только основные моменты работы, не останавливаясь на большинстве вспомогательных разделов и второстепенных моментов.

В первой главе диссертации описываются общие понятия и методы, использующиеся в работе, которые удобно изложить отдельно: решётки измеримых функций, пространства однородного типа, сингулярные интегральные операторы типа Кальдерона–Зигмунда, класс BMO, веса Макенхаупта, теорема о неподвижной точке, теорема Гротендика, классы типа Харди, AK-устойчивость. Приводится ряд вспомогательных результатов общего характера.

Вторая глава посвящена векторнозначной задаче о короне, её приложению к характеризации весов с логарифмом в BMO и связи между X_A (в частности, H_p) и H_∞ задачами о короне.

В §2.1 обсуждается векторнозначная задача о короне с l^r-оценками на норму решения. Обсуждается, что можно получить в этом направлении вполне элементарными методами из известных результатов.

В §2.2 вводится понятие аналитического разложения единицы, согласованного с заданным весом w, и показывается, как с помощью векторнозначной теоремы о короне можно непосредственно получить известный результат о том, что условие $\log w \in \mathrm{BMO}$ влечёт существование аналитического разложения единицы, согласованного с весом w.

В §2.3 обсуждается связь между X_A и H_∞ (т. е. обычной) векторнозначными задачами о короне. Показывается, как из разрешимости X_A задачи о короне следует разрешимость H_1 задачи о короне. Далее, с помощью теоремы о неподвижной точке из неё получается разрешимость H_∞ задачи о короне с соответствующей оценкой константы разрешимости через константу разрешимости X_A задачи о короне.

В §2.4 приводится доказательство Т. Вольфа разрешимости стандартной векторнозначной задачи о короне, адаптированное к случаю соответствующей H_2 задачи о короне и значительно упрощённое. Этим способом мы получаем значительно более грубую оценку на норму решения, имеющую порядок $\frac{1}{\delta^5}$, зато все рассуждения вполне элементарны.

В третьей главе излагаются основные результаты о BMO-регулярности на общих пространствах с мерой однородного типа, включая эквивалентность слабой и обычной BMO-регулярности для пар решёток.

В §3.1 вводится понятие BMO-регулярности и его уточнение — понятие A_p-регулярности. Излагаются простые свойства этих понятий, в том числе эквивалентность A_1-регулярности ограниченности максимального оператора, а также то, что достаточно хорошие перестановочно инвариантные (симметричные) решётки BMO-регулярны.

Далее, в §3.3 формулируется и доказывается теорема 3.3.1 о том, что при наличии свойства Фату у решётки X A_p-регулярность решётки $X\mathrm{L}_p$, если она банахова, влечёт A_{p+1}-регулярность решётки X.

В §3.4 с помощью этой теоремы проверяется самодвойственность и делимость свойства BMO-регулярности для банаховых решёток, обладающих свойством Фату, и обсуждаются некоторые простые следствия, включая критерий BMO-регулярности пространств Лебега $\mathrm{L}_{p(\cdot)}$ с переменным показателем $p(\cdot)$.

В §3.5 приводится, с небольшими уточнениями, доказательство из [12] известного результата о том, что если линейный оператор T ограничен в банаховой решётке $Y^{\frac{1}{2}}$ с порядково непрерывной нормой, то у функций f из решётки Y' имеются мажоранты $w \in Y'$ соизмеримой нормы, такие, что оператор T ограничен в пространстве $\mathrm{L}_2\left(w^{-\frac{1}{2}}\right)$, причём оценка для нормы оператора T в этом пространстве не зависит от f.

В §3.6 исследуется связь между BMO-регулярностью и ограниченностью некоторых отображений в соответствующих решётках. В частности, показывается, что если банахова решётка X BMO-регулярна и обладает свойством Фату, а отображение T слабо A_p-ограничено, то для всех достаточно малых значений $0 < \alpha < 1$ отображение T ограничено в решётке $\left(X^\alpha \mathrm{L}_1^{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}$. С другой стороны, для BMO-невырожденных линейных операторов верно и обратное утверждение.

В §3.7 показывается, что если квазинормированная решётка X BMO-регулярна, то решётка $X\left(l^q\right)$ также BMO-регулярна. Частично исследуется вопрос об A_p-регулярности решёток вида $\mathrm{L}_\infty(l^q)$.

В §3.8 рассматривается свойство BMO-регулярности для пар решёток, приводятся простейшие утверждения о нём, проверяется его самодвойственность и устойчивость относительно делимости, и с его помощью получается альтернативное доказательство теоремы 3.3.1.

В четвёртой главе показывается, как A_1-регулярность можно применить к интерполяции пространств, порождённых квазирегулярным проектором.

В §4.1 определяется весовое разложение типа Кальдерона–Зигмунда и показывается, как из него следует стандартный весовой слабый тип $(1-1)$ и хорошая вещественная интерполяция (метод Бургейна). Далее, выводится весовое разложение типа Кальдерона–Зигмунда для "окаймлённого" оператора Кальдерона–Зигмунда в соответствии с [32] (но в несколько более общем виде).

В §4.2, с использованием метода Бургейна и теоремы типа Вольфа, получаются основные результаты о K-замкнутости весовой пары $\left(\mathrm{L}_1^Q\left(w_0^{-1}\right), \mathrm{L}_\infty^Q(w_1)\right)$ в паре $\left(\mathrm{L}_1\left(w_0^{-1}\right), \mathrm{L}_\infty(w_1)\right)$ с для весов w_0 и w_1, таких, что $w_0, w_1 \in \mathrm{A}_1$ и $w_0 w_1 \in \mathrm{A}_\infty$, и приводится основной результат — K-замкнутость пары $\left(\mathrm{L}_1^Q, X^Q\right)$ в паре (L_1, X) для A_1-регулярных решёток X, а также простое следствие для K-замкнутости пары $\left(\mathrm{L}_\infty^Q, [X^*]^Q\right)$ в паре (L_∞, X^*). Коротко рассматривается ещё один способ задания пространств X^Q для A_1-регулярных решёток X, для которого также получается K-замкнутость пары $\left(\mathrm{L}_t^Q, X^Q\right)$ в соответствующей паре при всех достаточно малых показателях $1 \leqslant t < \infty$.

В пятой главе мы возвращаемся на окружность. Излагаются некоторые новые результаты и новые доказательства, относящиеся к вещественной интерполяции аналитических пространств типа Харди.

В §5.1 вводится понятие ограниченной AK-устойчивости — ещё одно естественное усиление свойства AK-устойчивости, когда в свойстве аналитической K-устойчивости для пары функций (f, g) можно брать разбиение вида $(f+g)U + (f+g)(1-U)$, где U — ограниченная аналитическая функция. Ограниченная AK-устойчивость тоже следует из BMO-регулярности. Если пара решёток (X, Y) ограниченно AK-устойчива, то пара (X^δ, Y^δ) также ограниченно AK-устойчива при всех $0 < \delta \leqslant 1$. Ограниченная AK-устойчивость для пары, как и обычная, выдерживает умножение на решётку. Для пары решёток (X, L_∞) при некоторых дополнительных условиях ограниченная AK-устойчивость совпадает с обычной, что даёт удобную характеризацию AK-устойчивости решётки X. Наконец, показывается, что при наличии свойства Фату и свойства $(*)$ AK-устойчивость пары банаховых решёток (X, Y) влечёт ограниченную AK-устойчивость пары $(X\mathrm{L}_1, Y\mathrm{L}_1)$.

В коротком §5.2 показывается, как AK-устойчивость BMO-регулярной решётки можно получить непосредственно из аналитического разложения единицы, согласованного с соответствующими BMO-мажорантами.

В §5.3 для пар весовых классов Харди $\mathrm{H}_p(\mathbb{T} \times \Omega, m \times \mu)$ даётся результат о характеризации хорошей интерполяции степени θ в терминах их BMO-регулярности, и приводится доказательство перехода от хорошей интерполяции степени θ к BMO-регулярности в общем случае, которое ранее в литературе присутствовало лишь в случае одной переменной, т. е. в случае классов Харди на измеримом пространстве $\mathbb{T}$.

В §5.4 приводятся известные критерии BMO-регулярности банаховой решётки X измеримых функций на измеримом пространстве $(\mathbb{T} \times \Omega, m \times \mu)$, обладающей свойством Фату и свойством $(*)$, в терминах АК-устойчивости пары $\left(X(l^s), \mathrm{L}_\infty\left(l^\infty_\lambda\right)\right)$, где l^∞_λ — пространство последовательностей l^∞ с весом $j \mapsto \lambda^j$. Этот критерий распространяется на случай произвольного (а не только дискретного) измеримого пространства Ω путём исправления одной детали в доказательстве из работы [33], а также приводится непосредственное доказательство этого критерия для случая $s = \infty$, предоставленное С. В. Кисляковым.

В §5.5 результат из предыдущего раздела §5.4 несколько обобщается при помощи некоторых конструкций, которые выявляют определённую связь между весовой и векторнозначной АК-устойчивостью. А именно, показывается, что из АК-устойчивости решётки $X\left(l^\infty_\lambda\right)$ (т. е. АК-устойчивости пары $\left(X\left(l^\infty_\lambda\right), \mathrm{L}_\infty\right)$) следует, что решётка $X(w)$ также АК-устойчива с надлежащими оценками для любого веса w, такого, что $\log w \in \mathrm{BMO}$. Это означает, что при этих условиях решётка XF также будет АК-устойчивой для любой BMO-регулярной решётки F. В качестве следствия основного результата этого раздела мы получим, что при некоторых условиях на решётки X и Y из того, что пара (X_A, Y_A) является ретрактом пары (X, Y), следует, что пара (X, Y) BMO-регулярна.

В §5.6 рассматриваются решётки, обладающие следующим свойством суммирования: если $\|f_j\| \leqslant \sum_k \lambda^{-|j-k|}\|g_k\|$, то $\left\|\bigvee_j |f_j|\right\| \leqslant C \left\|\sum_j |g_j|\right\|$ (число $\lambda > 1$ фиксировано). Показывается, что если решётка X АК-устойчива и обладает этим свойством суммирования, то при некоторых дополнительных ограничениях из этого следует, что решётка XF также АК-устойчива для любой BMO-регулярной решётки F, т. е. для таких решёток АК-устойчивость выдерживает умножение на BMO-регулярные решётки. Это свойство (т. е. сохранение АК-устойчивости при умножении на BMO-регулярные решётки) интересно, в частности, тем, что если оно выполнено для решётки $X(l^\infty)$, а решётка X АК-устойчива, то по результатам §5.5 отсюда сразу следует, что решётка X BMO-регулярна. К сожалению, осталось невыясненным, обладают ли этим свойством суммирования какие-либо решётки, кроме весовых пространств L_p.

Наконец, в §5.7 рассматривается вопрос о том, какие условия на показатель $p(\cdot)$ налагает АК-устойчивость пространства Лебега $\mathrm{L}_{p(\cdot)}$ с переменным показателем $p(\cdot)$. Пользуясь только свойством ограниченной АК-устойчивости и теоремой единственности для граничных значений аналитических функций, мы получим, что при некоторых априорных ограничениях на показатель $p(\cdot)$ для него будет выполнен некоторый слабый аналог логарифмического условия Гёльдера, которое является известным достаточным условием для ограниченности максимального оператора Харди–Литлвуда в решётке $\mathrm{L}_{p(\cdot)}$ (а значит, и для BMO-регулярности этой решётки). В частности, из этого условия следует, что решётка $\mathrm{L}_{p(\cdot)}$ с кусочно-постоянным показателем $p(\cdot)$ АК-устойчива тогда и только тогда, когда $p(\cdot) = \mathrm{const}$.

Список литературы

[1] Carleson L. Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem. *Ann. Math.*, 76(2):547–559, 1962.

[2] Cwikel M., McCarthy J. E. and Wolff T. H. Interpolation between Weighted Hardy Spaces. *Proc. Am. Math. Soc.*, 116(2):381–388, 1992.

[3] Diening L., Harjulehto P. , Hästö P. and Růžička M. *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2017.* Springer-Verlag, Berlin, 2011.

[4] Hoffman K. *Banach spaces of analytic functions.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962.

[5] Janson S. Interpolation of subcouples and quotient couples. *Ark. Mat.*, 31:307–338, 1993.

[6] Janson S. and Jones P. W. Interpolation between H^p spaces: The complex method. *J. Funct. Anal.*, 48:58–80, 1982.

[7] Johnson W. B. and Lindenstrauss J. (editors). *Handbook of the geometry of Banach spaces*, volume 1. Elsevier Science B. V., 2001.

[8] Jones P. Interpolation between Hardy spaces. In *Conference on Harmonic Analysis in honor of Antoni Zygmund*, volume 2, pages 437–451, 1983.

[9] Jones P. W. L^∞ estimates of the $\bar{\partial}$-problem in a half-plane. *Acta Math.*, 150:138–152, 1983.

[10] Jones P. W. New Banach space properties of the disc algebra and H^∞. *Acta Math.*, 152:1–48, 1984.

[11] Kalton N. J. Complex interpolation of Hardy-type subspaces. *Math. Nachr.*, 171:227–258, 1995.

[12] Kisliakov S. V. Interpolation of H_p-spaces: some recent developments. *Israel Math. Conf.*, 13:102–140, 1999.

[13] Kisliakov S. V. and Xu Quanhua. Interpolation of weighted and vector-valued Hardy spaces. *Trans. Am. Math. Soc.*, 343(1):1–34, 1994.

[14] Kisliakov S. V. and Xu Quanhua. Partial retractions for weighted Hardy spaces. *Stud. Math.*, 138(3):251–264, 2000.

[15] Kislyakov S. V. Truncating functions in weighted H^p and two theorems of J. Bourgain. In *Dept. Math., Uppsala Univ., Report No. 10*, 1989.

[16] Kislyakov S. V. Bourgain's analytic projection revisited. *Proc. Am. Math. Soc.*, 126(11):3307–3314, 1998.

[17] Kislyakov S. V. On BMO-regular couples of lattices of measurable functions. *Stud. Math.*, 159(2):277–289, 2003.

[18] Kopaliani T. Interpolation theorems for variable exponent Lebesgue spaces. *Georgian International of Science Nova Science Publishers, Inc.*, 257(11):3541–3551, 2009.

[19] Müller P. F. X. Holomorphic martingales and interpolation between Hardy spaces. *J.'Analyse Math.*, 61:327–337, 1993.

[20] Müller P. F. X. Holomorphic martingales and interpolation between Hardy spaces: the complex method. *Trans. Am. Math. Soc.*, 347(5):1787–1792, 1995.

[21] Nikol'skiĭ N. K. *Treatise on the Shift Operator*. Springer-Verlag, 1986.

[22] Pisier G. A simple proof of a theorem of J. Bourgain. *Michigan Math. J.*, 39:475–484, 1992.

[23] Pisier G. Interpolation between H^p spaces and noncommutative generalizations. I. *Pacific J. Math.*, 155:341–368, 1992.

[24] Pisier G. Interpolation between H^p spaces and noncommutative generalizations. II. *Revista Mathemática Iberoamericana*, 2:281–291, 1993.

[25] Rosenblum M. A corona theorem for countably many functions. *Integral equations and operator theory*, 3(1):125–137, 1980.

[26] Rubio de Francia J. L. Operators in Banach lattices and L^2-inequalities. *Math. Nachr.*, 133:197–209, 1987.

[27] Treil S. and Wick B. D. The matrix-valued H^p corona problem in the disk and polydisk. *J. Funct. Anal.*, 226(1):138–172, 2005.

[28] Uchiyama A. Corona theorems for countably many functions and estimates for their solutions. *preprint, UCLA*, 1980.

[29] Xu Quan Hua. Elementary proofs of two theorems by P. W. Jones on interpolation of Hardy spaces. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 42:875–889, 1992.

[30] Xu Quan Hua. Notes on interpolation of Hardy spaces. *Ann. Inst. Fourier*, 42:875–889, 1992.

[31] Xu Quan Hua. Real interpolation of some Banach lattices valued Hardy spaces. *Bull. Sci. Math.*, 116:227–246, 1992.

[32] Анисимов Д. С. и Кисляков С. В. Двойные сингулярные интегралы: интерполяция и исправление. *Алгебра и Анализ*, 16(5):1–33, 2004.

[33] Кисляков С. В. О BMO-регулярных решётках измеримых функций. *Алгебра и Анализ*, 14(2):117–135, 2002.

[34] Кисляков С. В. О BMO-регулярных решётках измеримых функций. II. *Записки научных семинаров ПОМИ.*, 303(31):161–168, 2003.

[35] Кисляков С. В. Абсолютно суммирующие операторы на диск-алгебре. *Алгебра и Анализ*, 3(4):705–774, 1991.

[36] Кисляков С. В. и Кругляк Н. Я. Устойчивость аппроксимации под действием сингулярных интегральных операторов. *Функциональный анализ и его приложения*, 40(4):49–64, 2006.

[37] Кисляков С. В. и Шу Куанхуа. Вещественная интерполяция и сингулярные интегралы. *Алгебра и Анализ*, 8(4):75–109, 1996.

[38] Толоконников В. А. Оценки в теореме Карлесона о короне и конечнопорожденные идеалы алгебры H^∞. *Функциональный анализ и его приложения*, 14(4):85–86, 1980.

Публикации автора по теме диссертации

[39] Руцкий Д. В. Два замечания о связи BMO-регулярности и аналитической устойчивости интерполяции для решёток измеримых функций. *Записки научных семинаров ПОМИ*, 366:102–115, 2009.

[40] Руцкий Д. В. Замечания о BMO-регулярности и AK-устойчивости. *Записки научных семинаров ПОМИ*, 376:116–165, 2010.

[41] Руцкий Д. В. BMO-регулярность в решётках измеримых функций на пространствах однородного типа. *Алгебра и Анализ*, 23(2):248–295, 2011.

[42] Кисляков С. В. и Руцкий Д. В. Несколько замечаний к теореме о короне. *Препринт ПОМИ P-1-2011*, 2011.