На правах рукописи

АЛЕКСЕЕВ НИКИТА ВЛАДИМИРОВИЧ

СВОЙСТВА СПЕКТРАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2012

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей и математической статистики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научные руководители	доктор физико-математических наук, профессор **Никитин Яков Юрьевич**
	доктор физико-математических наук, профессор **Тихомиров Александр Николаевич**
Официальные оппоненты	доктор физико-математических наук, профессор **Вершик Анатолий Моисеевич**
	доктор физико-математических наук, профессор **Розовский Леонид Викторович**
Ведущая организация	Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Защита состоится "____" __________ 2012 года в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова РАН по адресу 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН по адресу 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27.

Автореферат разослан "____" __________ 2012 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.202.01
доктор физико-математических наук А. Ю. Зайцев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория случайных матриц – активно развивающаяся в последние десятилетия область математики. В начале 50-х годов прошлого столетия Вигнер предложил использовать матрицы большой размерности, элементы которых суть гауссовские случайные величины, для описания дискретной части спектра гамильтониана взаимодействия элементарных частиц тяжелых атомов. В дальнейшем теория случайных матриц нашла применения к физике, химии, информатике, генетике и другим наукам, а исследования спектра случайных матриц продолжили многие другие ученые, в том числе Марченко, Пастур, Гирко, Бай, Синай, Сошников, Гётце, Тихомиров, Тао, Ву [2, 1, 3, 6, 11, 12]. Значительный прогресс в изучении асимптотики поведения спектра случайных матриц был достигнут буквально в последние годы.

Спектральная теория случайных матриц изучает распределение собственных чисел случайных матриц, размер которых стремится к бесконечности. Пусть $\mathbf{W}_n$ – некоторая последовательность случайных матриц, имеющих размер $n \times n$, и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – собственные числа матрицы $\mathbf{W}_n$. Тогда эмпирическим спектральным распределением матрицы $\mathbf{W}_n$ называют меру на множестве комплексных чисел

$$\mu_n(A) = \frac{1}{n}\#\{i : \lambda_i \in A, i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

В случае, когда спектр вещественный, говорят об эмпирической спектральной функции распределения. Эмпирической спектральной функцией распределения называется функция вещественной переменной x

$$\mathcal{F}_n(x) = \frac{1}{n}\#\{i : \lambda_i < x, i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Если рассматривать эрмитовы случайные матрицы, то все их собственные числа вещественные, и эмпирическое спектральное распределение сосредоточено на вещественной прямой. Если при n, стремящемся к бесконечности, эмпирическое спектральное распределение имеет предел в смысле сходимости почти наверное, то предельное распределение называют *асимптотическим спектральным распределением.*

Мы рассматриваем в качестве матрицы $\mathbf{W}_n$ произведение

$$\mathbf{W}_n = \mathbf{X}^{(1)}\mathbf{X}^{(2)} \cdots \mathbf{X}^{(m)}(\mathbf{X}^{(1)}\mathbf{X}^{(2)} \cdots \mathbf{X}^{(m)})^*,$$

где матрицы $\mathbf{X}^{(k)}$ – независимые прямоугольные случайные матрицы размера $n_{k-1} \times n_k$ с независимыми элементами, удовлетворяющие некоторым естественным условиям. В этом случае в диссертации доказано, что математическое ожидание эмпирического спектрального распределения слабо сходится к пределу. Этот результат является обобщением результата Марченко–Пастура [2] о спектре выборочных ковариационных матриц. В частных случаях плотность предельного распределения была изучена физиками Жичковским, Пенсоном и другими [17, 10].

Цель работы. Диссертация посвящена изучению асимптотического спектрального распределения случайных матриц. Основная цель — изучение спектра произведений фиксированного числа независимых прямоугольных случайных матриц и степеней квадратных случайных матриц.

Методы исследований. В диссертационной работе применяются метод моментов и метод преобразования Стилтьеса. В исследовании моментов используются методы комбинаторики и комбинаторной топологии. Заметим, что метод моментов был применен еще в работе Вигнера [15]. Технику, связанную с преобразованием Стилтьеса, в спектральной теории случайных матриц впервые применили Марченко и Пастур [2].

Основные результаты.

1. Найден предел математического ожидания эмпирического спектрального распределения для произведения фиксированного числа прямоугольных случайных матриц. Получено описание моментов предельного распределения в терминах m-арных деревьев.
2. Доказано, что производящая функция для последовательности m-арных деревьев удовлетворяет алгебраическому уравнению m-ой степени.
3. Доказано, что эмпирическое спектральное распределение степеней квадратной случайной матрицы сходится к распределению Фусса–Каталана почти наверное.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми. В ней впервые получены предельные распределения сингулярных чисел степеней и произведений случайных матриц.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Разработанные в ней методы и подходы могут использоваться для решения близких задач теории случайных матриц. В перспективе полученные результаты могут быть использованы в других разделах математики, таких как алгебраическая геометрия и комбинаторная топология.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на четырех конференциях: на Первом Северном трехстороннем семинаре (9–11 марта 2009 г., Хельсинки, Финляндия), на конференции по свободной теории вероятностей и случайным комбинаторным структурам (7–9 декабря 2009 г., Билефельд, Германия), на Третьем Северном трехстороннем семинаре (11–13 апреля 2011 г., Институт Эйлера, Санкт-Петербург), на конференции „Случайные матрицы, операторные алгебры и аспекты математической физики“ (11–21 апреля 2011 г., международный институт математической физики им. Эрвина Шредингера, Вена, Австрия). Кроме того, работа обсуждалась в Санкт-Петербурге на городском семинаре по теории вероятностей и математической статистике под руководством академика И.А. Ибрагимова (апрель 2011 г. и апрель 2012 г.) и на семинаре "Теория Вероятностей"лаборатории им. П.Л. Чебышева (март и май 2011 г.)

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [П1]–[П5]. Работы [П1–П3] опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК (работа [П3] опубликована в журнале, удовлетворяющем достаточному условию включения в перечень ВАК: входит в систему цитирования Springer). Публикации [П4,П5] — это тезисы докладов на международных конференциях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из четырех параграфов, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации – 81 страница, список литературы содержит 61 наименование.

Содержание работы

Во **введении (параграф 1)** излагается история вопроса, описывается структура и содержание диссертации.

В **параграфе 2** приводятся комбинаторные теоремы. Для всех рассмотренных ансамблей случайных матриц моменты предельных спектральных распределений имеют комбинаторные интерпретации. Так, k-ым моментом распределения Марченко–Пастура с параметром $y = 1$ является k-ое число Каталана

$$Cat(k) = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}.$$

Кроме того, k-ый момент распределения Марченко–Пастура с произвольным параметром y задается формулой

$$\sum_{r=1}^{k} N(k,r) y^{r-1},$$

где $N(k,r)$ – числа Нараяна. Наконец, k-ый момент m-го распределения Фусса–Каталана есть число Фусса–Каталана

$$FC(m,k) = \frac{1}{mk+1}\binom{mk+k}{k}.$$

Все эти числа имеют многочисленные комбинаторные интерпретации и удовлетворяют некоторым комбинаторным тождествам. При доказательстве предельных теорем методом моментов комбинаторные интерпретации играют ключевую роль, а комбинаторные тождества позволяют исследовать свойства предельных распределений. Одним из важных утверждений, доказанных в **параграфе 2**, является следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть $T(k_0, k_1, \dots, k_m)$ – количество $(m+1)$-арных деревьев, у которых число вершин i-го типа есть k_i для всех $0 \le i \le m$. Пусть $f(x_0, x_1, \dots, x_m)$ – производящая функция последовательности $T(k_0, k_1, \dots, k_m)$:*

$$f(x_0, x_1, x_2 \dots, x_m) = \sum_{k_i=0}^{\infty} T(k_0, k_1, k_2, \dots, k_m) x_0^{k_0} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m}.$$

Тогда функция $f(x_0, x_1, \dots, x_m)$ удовлетворяет функциональному уравнению:

$$f(x_0, x_1, x_2, \dots, x_m) = \prod_{i=0}^{m} (1 + x_i f(x_0, x_1, x_2 \dots, x_m)).$$

В **параграфе 3** рассматривается распределение сингулярных чисел произведения независимых прямоугольных случайных матриц. Основным результатом этого параграфа является обобщение классического результата Марченко–Пастура о предельном спектральном распределении выборочной ковариационной матрицы $\mathbf{XX}^*$. Мы рассматриваем произведение нескольких матриц

$$\mathbf{W} = \mathbf{X}^{(1)}\mathbf{X}^{(2)}\cdots\mathbf{X}^{(m)}(\mathbf{X}^{(1)}\mathbf{X}^{(2)}\cdots\mathbf{X}^{(m)})^*.$$

Оказывается, что спектральное распределение слабо сходится к предельному. Доказана следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть $n = n_0, n_1, \ldots, n_m$ – последовательности натуральных чисел, такие, что для каждого $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$ существует ненулевой конечный предел*

$$y_k = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n_k(n)}.$$

Пусть $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \ldots, \mathbf{X}^{(m)}$ – семейство последовательностей прямоугольных независимых случайных матриц. Матрица $\mathbf{X}^{(k)}$ имеет размер $n_{k-1} \times n_k$, элементы этой матрицы имеют вид $n_k^{-1/2} x_{ij}^{(k)}$, где $x_{ij}^{(k)}$ суть независимые случайные величины, удовлетворяющие моментному условию

$$\mathbf{E}\, x_{ij}^{(k)} = 0, \quad \mathbf{E}\left|x_{ij}^{(k)}\right|^2 = 1. \tag{1}$$

и условию Линдеберга: $\forall \alpha > 0$

$$L_n(\alpha) = \max_k n^{-2} \sum_{1\le i,j\le n} \mathbf{E}\,|x_{ij}^{(k)}|^2 \mathbb{I}\{|x_{ij}^{(k)}| > \alpha\sqrt{n}\} \to 0,\ n \to \infty. \tag{2}$$

.

Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ собственные числа случайной матрицы

$$\mathbf{W} = \mathbf{X}^{(1)}\mathbf{X}^{(2)}\cdots\mathbf{X}^{(m)}(\mathbf{X}^{(1)}\mathbf{X}^{(2)}\cdots\mathbf{X}^{(m)})^*,$$

и через $F_n(x)$ – математическое ожидание эмпирической спектральной функции распределения

$$F_n(x) = \mathbf{E}\,\frac{1}{n}\#\{\lambda_i \le x, i \in 1, \ldots, n\}.$$

Тогда $F_n(x)$ сходится равномерно по x к некоторой функции распределения $G(x)$ при $n \to \infty$.

Предельная функция распределения $G(x)$ имеет все моменты $M_p = \int_{\mathbb{R}} x^p d\,G(x)$, $p = 1, 2, ...$ и однозначно определяется ими. Числа M_p имеют простой комбинаторный смысл

$$M_p = \sum_{p_0+p_1+\cdots+p_m=p-1} T(p_0, p_1, \ldots, p_m) y_1^{p_1} y_2^{p_2} \cdots y_m^{p_m}, \tag{3}$$

где сумма берется по всевозможным наборам натуральных чисел p_i, удовлетворяющим равенству

$$p_0 + p_1 + \cdots + p_m = p - 1,$$

а $T(p_0, p_1, \ldots, p_m)$ – количество $(m+1)$-арных деревьев, у которых число вершин i-го типа равно p_i.

Кроме описания предельного распределения в терминах моментов, существует описание в терминах преобразования Стилтьеса.

Следствие 1. *Преобразование Стилтьеса*

$$s(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x - z}\, dG(x)$$

предельного распределения $G(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$1 + zs(z) - s(z) \prod_{k=1}^{m} (1 - y_k - y_k z s(z)) = 0. \tag{4}$$

Уравнение (4) позволяет исследовать носитель распределения $G(x)$, а в некоторых случаях находить плотность распределения $G(x)$. Так, при $m = 2$, $y_1 = y_2 = 1$ плотность $\rho_2(x)$ распределения $G(x)$ может быть выписана (см., например, [17]):

$$\rho_2(x) = \frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{12\pi}\ \frac{\sqrt[3]{2}\left(27 + 3\sqrt{81 - 12x}\right)^{2/3} - 6\sqrt[3]{x}}{x^{2/3}\left(27 + 3\sqrt{81 - 12x}\right)^{1/3}}\ \mathbb{I}_{(0,27/4]}(x). \tag{5}$$

В **параграфе 4** рассматривается распределение сингулярных чисел степеней квадратных случайных матриц. Доказана следующая теорема:

Теорема 3. *Пусть $\mathbf{X}(n)$ – последовательность случайных матриц. Матрица $\mathbf{X}(n)$ имеет размер $n \times n$, элементы этой матрицы имеют вид $n^{-1/2} x_{ij}$, где x_{ij} удовлетворяют условию*

$$\mathbf{E}\, x_{ij} = 0, \mathbf{E}\, |x_{ij}|^2 = 1 \ \text{и}\ \mathbf{E}\, |x_{ij}|^4 \le B < \infty. \tag{6}$$

Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ собственные числа случайной матрицы

$$\mathbf{W}_m(n) = \mathbf{X}(n)^m \mathbf{X}(n)^{m*},$$

и пусть $\mathcal{F}_n(x)$ – эмпирическая спектральная функция распределения

$$\mathcal{F}_n(x) = \frac{1}{n}\#\{\lambda_i \le x, i \in 1, \dots, n\}.$$

Тогда $F_n(x) = \mathbf{E}\,\mathcal{F}_n(x)$ сходится к функции распределения Фусса–Каталана $G(x)$ при $n \to \infty$. Предельная функция распределения $G(x)$ имеет моменты $M_p = \int_{\mathbb{R}} x^p d\,G(x)$ всех натуральных порядков p и однозначно ими определяется. Числа M_p являются числами Фусса–Каталана

$$M_p = \frac{1}{mp+1}\binom{mp+p}{p}. \tag{7}$$

Более того, если случайные величины x_{ij} (ненормированные элементы матрицы $\mathbf{X}(n)$) имеют все моменты, т.е. удовлетворяют условию

$$\mathbf{E}\,|x_{ij}|^p \le C_p < \infty, \tag{8}$$

то имеет место равномерная по x сходимость эмпирической спектральной функции распределения $\mathcal{F}_n(x)$ к предельной функции $G(x)$ почти наверное.

Распределения Фусса–Каталана активно изучаются в последние годы, в частности в работах [7, 8, 9, 10, 17].

Как показано в **параграфе 4**, распределение Фусса–Каталана является предельным не только для эмпирического спектрального распределения степени случайной матрицы, но и для более широкого класса матриц. Именно, верно следующее замечание:

Замечание 4. Как следует из теоремы 2 и теоремы 3, предельные спектральные распределения совпадают в случаях произведения m независимых квадратных матриц (случай $y_1 = y_2 = \cdots = y_m = 1$) и степени m квадратных матриц. Распределение Фусса–Каталана является предельным в общем случае. Именно, пусть $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_k$ – независимые квадратные случайные матрицы с независимыми элементами, удовлетворяющими условиям теоремы 2. Пусть натуральные числа $m_1, m_2, \dots, m_k$ таковы, что $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = m$. Тогда математическое ожидание эмпирического спектрального распределения матрицы

$$\mathbf{W} := \mathbf{X}_1^{m_1}\mathbf{X}_2^{m_2}\cdots\mathbf{X}_k^{m_k}\,(\mathbf{X}_1^{m_1}\mathbf{X}_2^{m_2}\cdots\mathbf{X}_k^{m_k})^*$$

сходится к распределению Фусса–Каталана с параметром m.

Список литературы

[1] Гирко В.Л. Круговой закон. // Теория вероятн. и ее примен. — 1984. — Т. 29, N 4. — С. 669—679.

[2] Марченко В.А., Пастур Л.А., Распределение собственных значений в некоторых ансамблях случайных матриц. // Матем. сб. — 1967. — Т. 72, N 4. — С. 507–536.

[3] Bai Z.D. Circular Law. // Ann. Probab. — 1997. — V. 25, No. 1. — P. 494–529.

[4] Götze F., Tikhomirov A. Rate of convergence in probability to the Marchenko–Pastur law. // Bernoulli. — 2004. — V.10, No.3. — P. 503-–548.

[5] Götze F., Tikhomirov A.N. On the Circular Law. // arXiv:math/0702386v1.

[6] Götze F., Tikhomirov A.N. The circular law for random matrices. // Ann. Probab. — 2010. — V. 38, No. 4. — P. 1444-1491.

[7] Liu D.-Z., Song C. , Wang Z.-D., On explicit probability densities associated with Fuss–Catalan numbers. // Proc. Amer. Math. Soc. — 2011. — V. 139, No.10. — P. 3735–3738.

[8] Liu D.Z., Sun X., Wang Z.D. Fluctuation of eigenvalues for random Toeplitz and related matrices. // arXiv:1010.3394v2.

[9] Mlotkowski W. Fuss–Catalan numbers in noncommutative probability. // Documenta Math. — 2010. — V. 15. — P. 939–955.

[10] Penson K.A., Zyczkowski K. Product of Ginibre matrices: Fuss–Catalan and Raney distributions. // Phys. Rev. E. — 2011. — V. 83, No. 6. — 9 pp.

[11] Sinai Ya.G., Soshnikov A.B. Central Limit Theorem for Traces of Large Random Symmetric Matrices with Independent Matrix Elements. // Boletim. Soc. Brasil. Mat. — 1998. — V. 29, No. 1. — P. 1–24.

[12] Tao T., Van V. Random matrices: universality of ESDs and the circular law. With an appendix by Manjunath Krishnapur. // Ann. Probab. — 2010. — V. 38, No. 5. — P. 2023–2065.

[13] Tikhomirov A.N. The rate of convergence of the expected spectral distribution function of a sample covariance matrix to the Marchenko–Pastur distribution. // Siberian Adv. Math. — 2009. — V. 19, No. 4. — P. 277–286.

[14] Tikhomirov A.N. On the rate of convergence of the expected spectral distribution function of a Wigner matrix to the semi-circular law. // Siberian Adv. Math. — 2009. — V. 19, No. 3. — P. 211–223.

[15] Wigner E.P. Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions. // Ann. Math. — 1955. — V. 62, No. 3. — P. 548–564.

[16] Wigner E.P. On the distribution of the roots of certain symmetric matrices // Ann. Math. — 1958. — V. 67, No. 2. — P. 325–327.

[17] Zyczkowski K., Penson K.A., Nechita I., Collins B. Generating random density matrices // J. Math. Phys. — 2011. — V. 52, No. 6. — 20 pp.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

[П1] Алексеев Н.В. О сходимости почти наверное спектрального распределения степени случайной матрицы к распределению Фусса-Каталана. // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2010. — Т. 384. — С. 21–28.

[П2] Алексеев Н.В., Гётце Ф., Тихомиров А.Н. О сингулярном спектре степеней и произведений случайных матриц. // Доклады РАН. — 2010. — Т. 433, N 1. — С. 7–9.

[П3] Alexeev N., Götze F., Tikhomirov A. Asymptotic distribution of singular values of powers of random matrices. // Lithuanian Math. J. — 2010. — V. 50, No. 2. — P. 121–132.

Другие публикации:

[П4] Alekseev N. Genus expansion for some ensembles of random matrices. // Workshop „Random Matrix, Operator Algebra, and Mathematical Physics Aspects“, Vienna, 2011, Abstracts of talks, p. 1.

[П5] Alexeev N. Gaussian random matrices and genus expansion. // Third Northern Triangular Seminar, St. Petersburg, 2011, Programme and Abstracts, p. 5.