На правах рукописи

Лохару Евгений Эдуардович

Мультипликативные неравенства для максимальных функций, измеряющих гладкость

Специальность 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2012

Работа выполнена в лаборатории математического анализа Федерального государственного бюджетного учреждения науки Санкт-Петербургского отделения Математического института имени В. А. Стеклова Российской академии наук

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:
доктор физико-математических наук, чл.-корр. РАН
Кисляков Сергей Витальевич
ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:
доктор физико-математических наук, профессор
Широков Николай Алексеевич,
кандидат физико-математических наук, доцент
Васин Андрей Васильевич
ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ:
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Защита диссертации состоится __________ 2012 года в ____ часов на заседании диссертационного совета Д002.202.01 в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Санкт-Петербургском отделении Математического института имени В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Санкт-Петербургском отделении Математического института имени В. А. Стеклова Российской академии наук.

Автореферат разослан “___” __________ 2012 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических
наук А. Ю. Зайцев

Общая характеристика работы

Объект исследования и научные положения, выносимые на защиту. Основные объекты исследования — интерполяционные неравенства для производных и их обобщения, а также максимальные операторы, измеряющие гладкость. Первый результат, выносимый на защиту, — аналог неравенства Гальярдо–Ниренберга в терминах максимальных функций, измеряющих гладкость. Второй результат, который выносится на защиту, — явные контрпримеры функций, ясно демонстрирующие разницу между двумя основными максимальными операторами $M^{\sharp}_{s,p}$ и $M^{\flat}_{s,p}$. Третий результат, подлежащий защите, — интерполяционные неравенства для максимальных функций $M^{\sharp}_{s,p}f$ и $M^{\flat}_{s,p}f$ одного порядка гладкости.

Цели и задачи диссертации. В этой работе автор ставит перед собой цель продемонстрировать и математически строго обосновать новый подход к вопросам, связанным с интерполяционными неравенствами для производных, и теоремам вложения для различных функциональных пространств.

Методы исследования. Основные результаты диссертации получены методами теории максимальных функций, измеряющих гладкость.

Достоверность научных положений. Все результаты, которые выносятся на защиту, являются математически достоверными фактами. Они были опубликованы в рецензируемых журналах, а их доказательства неоднократно проверялись специалистами в той области, к которой эти результаты относятся.

Научная новизна. Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми.

Актуальность, практическая ценность и область применения результатов. Новые сведения и закономерности, описанные в этой диссертации, могут быть использованы для получения новых результатов в этой области или в близких к ней, таких как теория функциональных пространств, теоремы вложения и т.д.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на общегородском семинаре по линейному и комплексному анализу в Санкт-Петербурге, а также на семинаре по теории функций многих действительных переменных и ее приложениям к задачам математической физики в Москве.

Публикации. Результаты, выносимые на защиту, опубликованы в работах [Lh, Lh1, Lh2]. Все три статьи напечатаны в журналах из списка ВАК.

Структура и обьем работы. Диссертация состоит из введения и пяти параграфов, разбитых в общей сложности на 16 пунктов и занимает 74 страницы. Библиография содержит 38 наименований.

Содержание работы

Мультипликативные интерполяционные неравенства для производных широко известны в анализе и его приложениях к различным задачам математической физики. Речь здесь идет о неравенствах, позволяющих оценивать норму функции или ее производной выражением, в котором участвуют норма самой функции и норма старшей производной. Классический пример неравенства такого рода — знаменитое неравенство Ландау–Колмогорова:

$$||f^{(s)}||_{L^\infty(I)} \leq C_{k,s}||f||_{L^\infty(I)}^{1-\frac{s}{k}}||f^{(k)}||_{L^\infty(I)}^{\frac{s}{k}}, \quad 1 \leq s < k. \tag{1}$$

Это неравенство, верное для всех функций f из класса $C^{(k)}(I)$, для $k = 2$, где $I = \mathbb{R}$ или $I = \mathbb{R}_+$, было получено в 1913 году Эдмундом Ландау [La]. Им также были установлены оптимальные константы — $\sqrt{2}$ и 2 соответственно. В 1939 году Колмогоров (см. [Kol]) доказал точный вариант неравенства (1) для всех значений параметров k и l ($1 \leq l < k$), когда $I = \mathbb{R}$. Другое, не менее известное, неравенство Гальярдо–Ниренберга позволяет оценивать уже не равномерную норму, как в случае неравенства Ландау–Колмогорова, а средние от производных (их лебеговы нормы). Оно выглядит так:

$$||\nabla^s f||_{L^q(R^n)} \leq C_{s,k,n}||f||_{L^r(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{s}{k}}||\nabla^k f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{s}{k}}, \tag{2}$$

где $0 \leq s < k$, $\frac{1}{q} = (1-\frac{s}{k})\frac{1}{r} + \frac{s}{k}\frac{1}{p}$, $1 \leq r, p \leq \infty$. Последние неравенство предполагает, что $f \in \dot{W}_p^k \cap L^r$, где $\dot{W}_p^k$ — однородное пространство Соболева. Это неравенство было независимо получено в 1959 году Гальярдо [G] и Ниренбергом [N]. Позднее было опубликовано много работ, содержащих различные обобщения неравенства (2) и его аналоги. Прежде чем перейти к обзору соответствующих результатов, стоит сказать несколько слов о поточечных мультипликативных неравенствах.

Возвращаясь к неравенству Гальярдо–Ниренберга, отметим, что в явном виде его поточечный аналог уже не будет иметь места. Имеется в виду следующее неравенство:

$$\nabla^s f(x) \leq C_{s,k,n} f(x)^{1-\frac{s}{k}} \nabla^k f(x)^{\frac{s}{k}}. \tag{3}$$

Для того, чтобы убедиться в том (для примера, когда $k=2$), что это неравенство оказывается несостоятельным, достаточно рассмотреть любую финитную и гладкую функцию, которая линейна на некотором отрезке I, а ее производная не обращается на I в ноль. Для такой функции правая часть неравенства (3) обратится в ноль на всем отрезке, в то время как левая часть будет отлична от нуля. В связи с этим возникает вопрос: можно ли все же ожидать найти какое-то поточечное неравенство, включающее в себя классическое неравенство (2)? Оказывается, ответ на этот вопрос положительный. Здесь стоит вспомнить о другом объекте — сингулярных интегральных операторах Кальдерона–Зигмунда. Такие операторы ограничены в L^p, $1<p<\infty$, однако поточечной оценки вида

$$|Tf(x)| \le C|f(x)| \tag{4}$$

нет, кроме вырожденных случаев. Однако, можно получить поточечное неравенство (см., например, [GR]), если перейти к максимальным функциям:

$$(Tf)^\sharp(x) \le C(M|f|^p)^{\frac{1}{p}}(x), \quad 1<p<\infty. \tag{5}$$

Здесь M — максимальный оператор Харди–Литтлвуда:

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f|, \tag{6}$$

а через $f^\sharp$ мы обозначаем функцию Феффермана–Стейна

$$f^\sharp(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f - f_Q|, \tag{7}$$

где f_Q — среднее значение функции f по кубу Q. В этих определениях супремум берется по всем кубам Q, содержащим точку $x \in \mathbb{R}^n$. Здесь и далее мы будем рассматривать только те кубы, у которых стороны параллельны осям координат.

Поточечное неравенство (5) (которое само по себе не очень трудно) сводит оценки сингулярных интегральных операторов на идеальных пространствах к оценкам максимальных функций. Эти соображения в свое время были применены к выводу ограниченности сингулярных операторов в пространствах $L^r(\omega)$, где $1 < r < \infty$, а вес ω удовлетворяет известному условию Макенхаупта A_r (см. [GR]).

Теперь обратимся к неравенству (2). По-видимому, стоит ожидать и здесь наличия оценок, похожих на (5), в которых будут фигурировать некоторые максимальные операторы.

Действительно, в 1994 году в своей работе [K] Агнешка Каламайска получила подобное неравенство:

$$M(\nabla^s f)(x) \leq C(M(f-P)(x))^{1-\frac{s}{k}}(M(\nabla^k f)(x))^{\frac{s}{k}}. \qquad (8)$$

Здесь $0 < s < k$ — целые неотрицательные числа, а P — некоторый полином степени не более k (он зависит от функции f). Последнее неравенство верно для всех функций f (константа C от выбора функции не зависит), которые локально принадлежат классу Соболева W_1^k и для которых выполнено условие:

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^s}\frac{1}{|B(xR, rR)|}\int_{B(xR,rR)} |f| = 0. \qquad (9)$$

Через $B(x,r)$ мы обозначаем шар в пространстве R^n с центром в точке x и радиусом r.

Немного позднее, очень похожее на (8) неравенство было получено в работе В. Мазьи и Т. Шапошниковой в 1999 г. (см. [MzSh]):

$$|\nabla^s f(x)| \leq C(M(\nabla^l f)(x))^{\frac{k-s}{k-l}}(M(\nabla^k f)(x))^{\frac{s-l}{k-l}}, \qquad (10)$$

где $0 < l < s < k$.

Для доказательства этого неравенства они использовали следующую формулу интегрального представления функции из класса Соболева (см. [MzPo, §1.5.1]):

$$g(0)=\sum_{|\beta|<k-s} t^{-n}\int_{B_t}\frac{(-y)^\beta}{\beta!}D^\beta g(y)\eta\left(\frac{y}{t}\right)dy+$$

$$+(-1)^{k-s}(k-s)\sum_{|\alpha|=k-s}\int_{B_t}\frac{y^\alpha}{\alpha!}D^\alpha g(y)\int_{|y|/t}^{\infty}\eta\left(\rho\frac{y}{|y|}\right)\rho^{n-1}d\rho\frac{dy}{|y|^n}.$$

Это равенство применяется к функции $g=D^\gamma f$, где $|\gamma|=s$. Затем оценка соответствующих слагаемых дает (10).

В заключение обзора поточечных оценок типа Гальярдо–Ниренберга, отметим так же работу Мазьи и Куфнера [MzKu], где подробно рассмотрены поточечные аналоги неравенства Колмогорова.

Помимо упомянутых поточечных модификаций неравенства Гальярдо–Ниренберга, существуют также и иные неравенства, близкие по идеологии. В классическое неравенство входят нормы в соответствующих пространствах Лебега, однако можно пытаться получить похожие мультипликативные оценки для норм в других пространствах, таких как, например, пространство Липшица или BMO. В 1994 году Куфнер и Ваннебо [KV] получили обобщение неравенства (2) на случай, где в правой части вместо L^p-нормы использована гёльдерова норма. А именно, ими было доказано неравенство

$$||\nabla^s f||_q \le C||\nabla^k f||_p^a [f]_\lambda^{1-a} \tag{11}$$

для соответствующих значений параметров k, s, a, λ, $0<\lambda<1$, где

$$[f]_\lambda=\sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|y-x|^\lambda}.$$

Их рассуждение (в одномерном случае) основано на следующем неравенстве:

$$\int_I |f^{(s)}(t)|^q dt \leq \tag{12}$$

$$K|I|^{(k-s)q+1-\frac{q}{p}} \left(\int_I |f^{(k)}(t)|^p dt \right)^{\frac{q}{p}} + K|I|^{1+(\lambda-s)q}[f]^q_\lambda.$$

Это неравенство, вообще говоря, не мультипликативное, но при соответствующих условиях на параметры s, k, λ, p и q из него удается получить мультипликативную оценку (11) (и тут существенно то, что неравенство выполнено для произвольного отрезка I). Вывод неравенства (11) из оценки (12) основан на оригинальной идее Ниренберга и довольно изящен, однако не видно, применимы ли схожие соображения в других ситуациях.

Другой вариант неравенства Гальярдо–Ниренберга был найден в 2003 году Мейером и Ривери в их совместной работе [MR], где было доказано, что

$$||\nabla f||^2_{L^4(\Omega)} \leq C||f||_{BMO}||f||_{W^2_4(\Omega)}. \tag{13}$$

Их доказательство опирается на разложение Литтлвуда–Пэли, а также на связь пространства BMO с однородным пространством Бесова $\dot{B}^{-1,\infty}_\infty$ (если $f = \partial_j g$ и $g \in BMO$, то $f \in \dot{B}^{-1,\infty}_\infty$). Похожее неравенство в одномерном случае было найдено в работе [KMi, стр. 240] в 1994 году. Позднее, в 2005 году Стрелецки (см. [Strz]) получил более общий вариант последнего неравенства:

$$||\nabla^s f||_{L^{\frac{k}{s}p}(\mathbb{R}^n)} \leq C||f||^{1-\frac{s}{k}}_{BMO}||f||^{\frac{s}{k}}_{W^k_p(\mathbb{R}^n)}, \quad 1 < p < \infty. \tag{14}$$

Неравенство (14) предполагает, что функция f принадлежит пространству W^k_p. В своем доказательстве, автор работы использует двойственность пространства Харди $H^1(\mathbb{R}^n)$ и пространства BMO, а именно тот факт, что $BMO = (H^1)^*$. Напомним определения этих пространств (см. [F], [FS] и [S]).

Пространство Харди $H^1(\mathbb{R}^n)$ определяется как множество всех функций f из пространства $L^1(\mathbb{R}^n)$, для которых

$$f_* := \sup_{\epsilon>0} |f * \varphi_\epsilon| \in L^1.$$

Здесь $\varphi_\epsilon = \epsilon^{-n}\varphi(x/\epsilon)$, где неотрицательная функция φ принадлежит классу $C_0^\infty(B(0,1))$ и такова, что $\int \varphi = 1$. В свою очередь, пространство BMO состоит из тех функций $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, для которых

$$||f||_{BMO} = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |f - f_Q| < \infty$$

(иными словами, $f^\sharp \in L^\infty$).

Нужно сказать, что несмотря на очевидное сходство природы упомянутых неравенств, их доказательства имеют мало общего между собой, что явно указывает на несоответствие и неприспособленнось использованных технических инструментов к рассматриваемому кругу задач.

В связи с этим возникает вопрос о возможном едином подходе к этим и им подобным неравенствам. Такой подход предложен автором в этой работе. Он заключается в следующем: вместо того, чтобы рассматривать производные и доказывать неравенства для них, оказывается более удобным рассматривать определенные максимальные операторы, специально приспособленные для измерения гладкости, и уже для них единообразно проверять мультипликативные неравеснтва. Такие объекты не новы, в 1972 году в работе Кальдерона (см. [Ca]) были введены подобные максимальные операторы и установлена их связь с дифференциальными свойствами функции. Определение, данное Кальдероном, выглядит следующим образом. Для произвольных вещественных чисел $s > 0$ и $1 \leq q \leq \infty$ рассмотрим функцию $f \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$

и определим

$$N_q^s f(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{r^s} \left(\frac{1}{r^n} \int_{B(x,r)} |f(y) - P_x(y)|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \qquad (15)$$

где P_x — некоторый полином степени, строго меньшей, чем s. Это равенство нужно понимать так: если для заданной точки $x \in R^n$ найдется полином P_x степени, строго меньшей, чем s (он не зависит от радиуса шара), для которого супремум в определении (15) конечен, то мы определяем величину $N_q^s f(x)$ по формуле (15), в противном случае мы считаем, что $N_q^s f(x) = +\infty$. Можно показать (см. [Ca]), что если такой полином P_x существует, то он единственен. В той работе, помимо прочего, было доказано, что если функция $N_q^s f$ локально-суммируема (s — целое), то $f \in W_{1,loc}^s$ и справедлива оценка

$$|\nabla^s f| \leq C N_q^s f.$$

Чуть позднее, в 1978 году вышла совместная работа Кальдерона и Скотта (см. [CaSc]), где были доказаны неравенства типа Соболева для максимальных операторов N_q^s. Вслед за этой работой, в 1984 вышла книга Девора и Шарпли [DvSh], посвященная максимальным функциям, измеряющим гладкость. Девор и Шарпли рассматривают максимальные операторы, похожие на (15), определяемые в терминах локальных полиномиальных приближений: для заданной функции $f \in L_{loc}^p$, где $1 \leq p \leq \infty$, положим

$$E_k^{(p)}(f, A) := \inf_{\pi \in \mathbb{P}_{k-1}} \left(\int_A |f - \pi|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (16)$$

Здесь A — ограниченное измеримое множество, а через $\mathbb{P}_k$ мы обозначаем множество всех полиномов степени не более k. В дальнейшем условимся считать, что $\mathbb{P}_{-1} = \{0\}$. В районе 1984 года свойства функционала $E_k^{(p)}(f, A)$ были уже хорошо известны (также как и функциональные пространства, определяемые в терминах локальных полиномиальных приближений; см. работы Ю. Брудного [B], [B1], [B2]). Таким образом, достаточно естественно, что Девор и Шарпли определяют максимальные операторы, используя конструкцию (16):

$$M_{k,p,s}f(x) := \sup_{Q\ni x}\inf_{\pi\in\mathbb{P}_k}\frac{1}{|Q|^{\frac{s}{n}}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|f-\pi|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (17)$$

Максимальные операторы (17) интересны прежде всего тем, что с их помощью удается единообразно описать классические пространства “гладких” функций: однородные пространства Соболева $\dot{W}_q^s$ и однородные пространства Липшица Lip_α, где $\alpha > 0$ (см. изложение в монографиях [KK], [DvSh]). Именно эти максимальные операторы, как оказалось, представляют собой естественный инструмент для доказательства различных интерполяционных неравенств. В работе автора [Lh] был получен поточечный аналог неравенства Гальярдо–Ниренберга в терминах максимальных операторов $M_{k,p,s}$. Благодаря свойствам этих максимальных операторов, доказанное неравенство естественным образом включает в себя все перечисленные ранее результаты. Кроме того, это неравенство оказывается справедливым в классе функций, существенно более широком, чем классы Соболева.

Среди максимальных операторов вида (17) можно выделить два наиболее естественных оператора (в случае целого s):

$$M^\flat_{s,p} = M_{s-1,p,s} \quad \text{и} \quad M^\sharp_{s,p} = M_{s,p,s}.$$

Для $s = 0$ мы получим максимальный оператор Харди–Литтлвуда M и “шарп” функцию Феффермана–Стейна $f^\#$. Хорошо известно (теорема Феффермана–Стейна, см. [FS]), что L^p-нормы функций Mf и $f^\#$ сравнимы, когда $f \in L^p$ и $p > 1$. Однако, в случае положительной гладкости ситуация иная. Операторы $M^\flat_{s,p}$ и $M^\sharp_{s,p}$, отвечающие одному и тому же порядку гладкости, оказываются количественно очень разными: функция $M^{\sharp}_{s,p}f$ может быть существенно меньше, чем функция $M^{\flat}_{s,p}f$. Автором (см. [Lh1]) в общем случае приводится явный пример финитной и непрерывной функции f, для которой L_q-норма функции $M^{\sharp}_{s,p}f$ конечна, в то время как $||M^{\flat}_{s,p}f||_q = \infty$.

Важная особенность всех неравенств, полученных автором, в том, что они позволяют оценивать "большую" максимальную функцию $M^{\flat}_{s,p}$ через "меньшую" $M^{\sharp}_{k,p}f$ (однако другого порядка гладкости).

Отдельный вопрос — наличие оценок для функций $M^{\flat}_{s,p}f$ и $M^{\sharp}_{s,p}f$ (здесь рассматриваются операторы одного порядка гладкости, которые в явном виде не сравнимы между собой, см. [Lh1]). Оказалось (см. [Lh2]), что при некоторых дополнительных ограничениях на функцию f неравенства такого плана получить удается. Этому вопросу посвящен §4 настоящей диссертации.

Описание диссертации по главам и параграфам. Первый параграф настоящей работы содержит основные сведения, относящиеся к теории максимальных функций, измеряющих гладкость.

В пункте 1.1 мы дадим два похожих определения максимальных операторов $M_{k,p,s}$ и докажем их эквивалентность. Первое определение использует конструкцию наилучшего полиномиального приближения, а второе — конструкцию проектора, дающего многочлен "почти" наилучшего приближения. Будут введены максимальные операторы $M^{\sharp}_{s,p}$ и $M^{\flat}_{s,p}$, играющие ключевую роль в последующем изложении. Кроме этого, в пункте 1.1 мы обсудим важные свойства рассматриваемых максимальных операторов и докажем оценку (утверждение

1.1.4), связывающаю L^∞-норму оператора $M^\sharp_{s,p}$ с нормой соответствующей производной в пространстве BMO.

Пункт 1.2 посвящен редукционной теореме, играющей ключевую роль во многих вопросах, связанных с максимальными функциями, измеряющими гладкость. Эта теорема показывает, что для фиксированного порядка гладкости $s \geq 0$ значения параметра k, строго большие $[s]$, будут давать сравнимые с $M^\sharp_{s,p}$ максимальные операторы (также мы рассмотрим случай $k < [s]$, который приводит к вырождению).

Во втором параграфе мы докажем первый важный результат — неравенство Гальярдо–Ниренберга в терминах максимальных функций $M^\sharp_{s,p}$ и $M^\flat_{s,p}$:

Теорема 1. *Если $\alpha < s < \sigma$, то*

$$M^\flat_{s,p} f(x) \leq C \left(M^\sharp_{\alpha,p} f(x)\right)^{\frac{\sigma-s}{\sigma-\alpha}} \left(M^\sharp_{\sigma,p} f(x)\right)^{\frac{s-\alpha}{\sigma-\alpha}}.$$

Неравенство справедливо для всех функций f из пространства $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ($p \geq 1$), удовлетворяющих условию

$$\lim_{|Q|\to\infty} \frac{1}{|Q|^{\frac{s}{n}}} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f - P_Q^{(s)} f|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Замечание. *Важно отметить, что параметры α, σ и s могут быть и не целыми.*

Пункт 2.1 посвящен обсуждению теоремы 1 и ее следствий. В пункте 2.2 содержится доказательство основной леммы, которая используется для доказательства теоремы 1. Эта лемма дает контроль над изменением (относительно множества Q) величины $M^\flat_{s,p,Q} f$ из определения функции $M^\flat_{s,p} f$ с помощью "меньшей" функции $M^\sharp_{s,p} f$. В пункте 2.3 мы докажем ряд других необходимых технических утверждений. Непосредственное доказательство теоремы 1 содержится в п. 2.4.

В начале §3 мы докажем вторую важную теорему, которая неоднократно будет использована в дальнейшем.

Теорема 2. *Пусть $f \in L^q$, $q \geq 1$. Тогда для любого вещественного $s > 0$ справедлива оценка*

$$(Mf)(x)^{1+\frac{qs}{n}} \leq C||f||_{L^q}^{\frac{qs}{n}}(M^\sharp_{s,p}f)(x).$$

Остальная часть §3 посвящена доказательству следующей теоремы вложения и ее следствий.

Теорема 3. *Пусть $M^\sharp_{s,p}f \in L^r$, где $1 \leq r < \infty$. Тогда найдется полином π_f степени не более s, для которого*

1) *если $rs > n$, то*

$$||M^\sharp_{\alpha,p}(f-\pi_f)||_\infty \leq C||M^\sharp_{s,p}f||_r, \quad \alpha = \frac{rs-n}{r};$$

в частности, если $s \in (0,1]$, то

$$\sup_{x\neq y}\frac{|f(y)-\pi_f(y)-f(x)+\pi_f(x)|}{|y-x|^{\frac{rs-n}{r}}} \leq C||M^\sharp_{s,p}f||_q;$$

2) *если $rs < n$ и $f \in L^q$ при некотором $q \geq 1$, то $f \in L^{\frac{rn}{n-rs}}$ и при этом справедлива оценка для нормы*

$$||f||_{\frac{rn}{n-rs}} \leq C||M^\sharp_{s,p}f||_q;$$

3) *если $rs = n$, то $f - \pi_f \in BMO$ и, кроме того,*

$$||f-\pi_f||_{BMO} \leq C||M^\sharp_{s,p}f||_q.$$

Из утверждения этой теоремы можно сразу получить классические результаты о вложениях соболевских пространств W^s_p, когда $p > 1$. Однако, важно отметить, что теорема верна для пространств, более широких, нежели пространства Соболева. Это обстоятельство связано с качественной разницей между операторами $M^\sharp_{s,p}$ и $M^\flat_{s,p}f$ (этот вопрос подробно обсуждается в §5). Когда $p = 1$, доказательство теоремы 3 можно найти в книге [DvSh].

Следствие 1. *Пусть* $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ *и* $M^\sharp_{s,p}f \in L^r(\mathbb{R}^n)$, *где* $rs > n$ *и* $1 \le r, q < \infty$. *Тогда для любого числа* θ *из интервала* $(0,1)$ *справедлива оценка*

$$||f||_\infty \le C||f||_{BMO}^{(1-\theta)\left(1+\frac{q\theta\alpha}{n}\right)^{-1}} ||f||_q^{\frac{q\theta\alpha}{n}\left(1+\frac{q\theta\alpha}{n}\right)^{-1}} ||M^\sharp_{s,p}f||_r^{\theta\left(1+\frac{q\theta\alpha}{n}\right)^{-1}},$$

где $\alpha = \frac{rs-n}{r}$.

Следствие 2. *Пусть* $rk > n$. *Предположим, что* $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ *и* $M^\sharp_{k,p}f \in L^r(\mathbb{R}^n)$, *тогда*

$$||f||_\infty \le C||f||_q^{\frac{q}{r}\left(\frac{n}{rk-n}+\frac{q}{r}\right)^{-1}} ||M^\sharp_{k,p}f||_r^{\frac{n}{rk-n}\left(\frac{n}{rk-n}+\frac{q}{r}\right)^{-1}}.$$

Следствие 3. *Пусть* $rk > n$. *Предположим, что* $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ *и* $M^\sharp_{k,p}f \in L^r(\mathbb{R}^n)$, *тогда для любого* $0 < \alpha \le \frac{rk-n}{r}$ *функция* f *принадлежит однородному пространству Липшица* Lip_α *и, кроме того, справедлива оценка*

$$||f||_{Lip_\alpha} \le$$

$$C||f||_q^{\frac{q}{r}\left(\frac{n}{rk-n}+\frac{q}{r}\right)^{-1}(1-\frac{\alpha r}{rk-n})} ||M^\sharp_{k,p}f||_r^{\frac{n}{rk-n}\left(\frac{n}{rk-n}+\frac{q}{r}\right)^{-1}(1-\frac{\alpha r}{rk-n})+\frac{\alpha r}{rk-n}}$$

В §4 мы докажем три теоремы для максимальных функций $M^\sharp_{s,p}f$ и $M^\flat_{s,p}f$ одного порядка гладкости. Далее следует основной результат §4:

Теорема 4. *Пусть* $0 \le s < \sigma$ *(не обязательно целые) и* $p \ge 1$. *Предположим, что функция* $M^\sharp_{s,p}f$ *принадлежит пространству* $L^q(\mathbb{R}^n)$, *тогда для любого* $1 \le \tau < \infty$ *справедлива оценка*

$$||M^\flat_{s,p}(f-\pi)||_\tau^\tau \le C_\sigma||M^\sharp_{s,p}f||_\tau^\tau + C_\sigma\left(||M^\sharp_{s,p}f||_q^q\right)^{\frac{\sigma-s}{n}\frac{\tau}{\gamma}} ||M^\sharp_{\sigma,p}f||_{\frac{\tau}{\gamma}}^{\frac{\tau}{\gamma}},$$

где $\gamma = 1 + q\frac{\sigma-s}{n}$, *а* π *— некоторый многочлен степени не более* s, *который зависит от функции* f *и не зависит от параметров* τ *и* σ.

Ключевая особенность доказанных в §4 оценок в том, что в этих неравенствах слева и справа участвуют "несравнимые" максимальные функции $M^{\flat}_{s,p}f$ и $M^{\sharp}_{s,p}f$.

В §5 мы обсудим вопрос о связи функций $M^{\flat}_{s,p}f$ и $M^{\sharp}_{s,p}f$. Для всех возможных значений параметров мы явно сконструируем финитную и непрерывную функцию f, для которой $M^{\sharp}_{s,p}f \in L^{\infty} \cap L^q$, в то время как $||M^{\flat}_{s,p}f||_q = \infty$ (слабые производные порядка s у функции f просто не существуют). Мы начнем со случая, когда гладкость и размерность равны единице (п. 5.1). Тогда пример оказывается абсолютно наглядным. Затем (в п. 5.2) на его основе построим одномерный контрпример, отвечающий случаю произвольной гладкости. Это, в свою очередь, позволит нам разобрать общую ситуацию произвольных гладкости и размерности (см. п. 5.3). Основной результат §5 содержится в приводимой далее теореме.

Теорема 5. *Пусть $s > 0$. Тогда для любых $p \geq 1$ и $q > \frac{p}{sp+n}$ существует финитная и непрерывная функция, для которой*

$$M^{\sharp}_{s,p}f \in L^q \text{ и } ||M^{\flat}_{s,p}f||_{L^q} = \infty.$$

Список литературы

[B] Ю. Брудный, *О локальном наилучшем приближении*, ДАН 161:4 (1965), 746-749.

[B1] Ю. Брудный, *Пространства, определяемые с помошью локальных приближений*, Труды ММО 24 (1971), 69—132.

[B2] Ю. Брудный, *Локальные приближения и дифференцируемость функций многих переменных*, УМН, 29:4(178) (1974), 163–164

[Ca] A. Calderon, *Estimates of singular integral operatros in terms of maximal functions*, Studia Math. 44 (1972), 167-186.

[CaSc] A. Calderon and R. Scott, *Sobolev type inequalities for p > 0*, Studia Math. 62 (1978), 75-92.

[DvSh] R. DeVore and R. Sharpley, *Maximal functions measuring smoothness*, Memoirs of the American Mathematical Society, volume 47, number 293 (1984).

[F] C. Fefferman. *Characterizations of bounded mean oscillation*, Bull. Amer. Math. Soc. 77 (1971) 585–587.

[FS] C. Fefferman and E.M. Stein, *H^p spaces of several variables*, Acta Math. 129 (1972), 137-193.

[G] E. Gagliardo, *Ulteriori Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili*, Ric. Mat. Napoli 8 (1959), 24-51.

[GR] José García-Cuerva, J.-L. Rubio de Francia *Weighted norm inequalities and related topics* Elsevier Science Ltd, North-Holland, 1985

[K] A. Kalamajska, *Pointwise multiplicative inequalities and Nirenberg type estimates in weighted Sobolev spaces*, Studia Math. 108(3), s. 275-290, 1994.

[KMi] A. Kalamajska, A. Milani, *Anisotropic Sobolev spaces and parabolic equations*, Ulmer Seminare Ëuber Funktionalanalysis und Differentialgleichungen, Heft 2 (1997) 237–273.

[Kol] A.N. Kolmogorov, *On inequalities between upper bounds of consecutive derivatives of an arbitrary function* *defined on an arbitrary interval*, Moskov. Gos. Univ. Uchenye Zapiski Mat. 30 (3) (1939), 3-16.

[KV] A. Kufner, A. Wannebo, *An interpolation inequality involving holder norms*, Georgian Mathematical Journal: Vol. 2, No. 6, 1995, 603-612.

[KK] S. Kislyakov, N. Kruglyak, *Extremal problems in interpolation theory, Whitney-Besicovitch coverings, and singular integrals*, Monografie Matematyczne, Birkhäuser. (В печати).

[La] E. Landau *Einige Ungleichungen für zweimal differentiierbare Funktionen*, Proc. London Math. Soc. (2) 13 (1914), 43-49.

[Mz] V. Maz'ya *Sobolev spaces*, Springer, 1985.

[MzKu] V. Maz'ya, A. Kufner, *Variations on the theme of the inequality* $(f')^2 \leq 2f \sup f''$, Manuscripta Math. 56 (1986), 89–104.

[MzSh] V. Maz'ya, T. Shaposhnikova, *On pointwise interpolation inequalities for derivatives*, Mathematica Bohemica, 124 (1999).

[MzPo] V. Maz'ya, S. Poborchi, *Differentiable functions on bad domains*, World Scientific Publishing, Singapore, 1997.

[MR] Y. Meyer and T. Rivière, *A partial regularity result for a class of stationary Yang-Mills fields*, Rev. Mat. Iberoamericana 19 (2003) 195-219.

[N] L. Nirenberg, *On elliptic partial differential equations*, Ann. Sc. Norm. Pisa 13 (1959), 116-162.

[S] E. M. Stein, *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality and oscillatory integrals* Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.

[Strz] P. Strzelecki, *Gagliardo-Nirenberg inequalities with a BMO term*, Bull. London Math. Soc. 38 (2006) 294-300.

Публикации автора по теме диссертации

[Lh] Лохару Е.Э. Неравенство Гальярдо–Ниренберга для максимальных функций, измеряющих гладкость // Записки научных семинаров ПОМИ им В.А.Стеклова Российской академии наук. 2011. Том 389. С. 143-161.

[Lh1] Лохару Е.Э. Максимальные функции, измеряющие гладкость: контрпримеры // Записки научных семинаров ПОМИ им В.А.Стеклова Российской академии наук. 2011. Том 397. С. 53-72.

[Lh2] Лохару Е.Э. Интерполяционные неравенства для максимальных функций, измеряющих гладкость // Алгебра и анализ. 2012. Том 24. №2.