Геометрический подход к стабильным гомотопическим группам сфер.I. Инвариант Хопфа

П.М.Ахметьев *

посвящается памяти проф. М.М.Постникова

Аннотация

В работе развивается геометрический подход к стабильным гомотопическим группам сфер, основанный на конструкции Понтрягина-Тома. В рамках этого подхода получено доказательство теоремы Адамса об инварианте Хопфа для всех размерностей, исключая $15, 31$. Доказывается, что при $n > 31$ в стабильной гомотопической группе сфер Π_n не существует элемента с инвариантом Хопфа 1. Новое доказательство основано на методах геометрической топологии. Используется теорема Понтрягина-Тома в форме Уоллеса о представлении стабильных гомотопических групп $\lim_{k\to+\infty}\pi_{k+n}(\Sigma^k(\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty))$ вещественного проективного бесконечномерного пространства (которые по теореме Кана-Придди эпиморфно отображаются на 2-компоненты стабильных гомотопических групп сфер) классами кобордизма погружений (вообще говоря, неориентируемых) $n-1$–мерных многообразий в коразмерности 1. Инвариант Хопфа выражаеся характеристическим классом $n-1$–мерного многообразия двукратных точек самопересечения погруженного n–мерного многообразия, представляющего заданный элемент в стабильной гомотопической группе Π_n.

Введение

Пусть $\pi_{n+m}(S^m)$ – гомотопические группы сфер. При условии $m \geq n+2$ эта группа не зависит от m и обозначается Π_n. Она называется

*Работа автора поддержена грантами INTAS 00-0259, РФФИ 08-01-00663-а.

стабильной гомотопической группой сфер в размерности n. Проблема вычисления стабильных гомотопических групп является одной из основных нерешенных проблем в топологии. Эта проблема имеет важное прикладное значение при изучении пространства вещественных функций (см. [В], гл.3) и при изучении задачи аппроксимации отображений вложениями [Me2].

При вычислении элементов стабильной гомотопической группы сфер изучают те алгебраические инварианты, определение которых дается сразу для всех размерностей (или для некоторой бесконечной последовательности размерностей). Тем не менее, эти инварианты, как правило, оказываются тривиальными и не вырождаются лишь в исключительных случаях, подробнее см. [M].

Основным алгебраическим инвариантом на гомотопических группах сфер является стабильный инвариант Хопфа, который представляет собой гомоморфизм

$$h : \Pi_{2k-1} \to \mathbb{Z}/2,$$

и который называется также инвариантом Стинрода-Хопфа, см., например, [M-T] по поводу определения и основных свойств. Стабильный инвариант Хопфа изучается в работе.

Доказательство следующей теоремы было получено Адамсом в [A].

Теорема. *Адамс [A]*

Стабильный инвариант Хопфа $h : \Pi_n \to \mathbb{Z}/2$, $n \equiv 1 \pmod 2$, *является тривиальным тогда и только тогда, когда* $n \neq 1, 3, 7$.

Замечание. Теорема Адамса в простом случае $n \neq 2^k - 1$ была доказана Адемом [Ad]. Случай $n = 15$ был доказан Тодой (см. [M-T] гл.18).

Впоследствии Адамс и Атья предложили альтернативный подход к изучению инвариантов Хопфа, основанный на результатах из K-теории и на теореме Ботта о периодичности см. [A-A]. В последующих работах этот подход также был обобщен. Простое доказательство Теоремы Адамса, близкое к доказательству Адамса-Атьи, было предложено В.М.Бухштабером в [B].

Определение стабильного инварианта Хопфа переформулируется на языке групп кобордизмов погруженных многообразий. В основе этого метода лежат результаты работ [E1, K2, K-S1, K-S2, La]. Стабильный инвариант Хопфа равен характеристическому числу многообразия двукратных точек самопересечения исходного многообразия, представляющего элемент в исходной группе кобордизма погружений. Это, например, явно сформулировано в работе [E1], Лемма 3.1.

Формулировка указанной леммы стандартным способом переводится на язык теории погружений при помощи конструкции Понтрягина-Тома.

В случае $n \not\equiv 3 \pmod 4$ доказательство теоремы Адамса, использующее теорию погружений, было получено А.Сючем в работе [Sz]. Следующий по сложности случай (теорема Адема) возникает при $n \neq 2^l - 1$. Теорема Адамса в этом случае была передоказана геометрическими методами в совместной работе автора с А. Сючем [A-Sz].

Далее в работе всюду предполагается, что $n = 2^l - 1$. Основной результат настоящей работы обобщает предыдущий и состоит в следующем.

Основная Теорема

Пусть $g : M^{\frac{3n+3}{4}+7} \looparrowright \mathbb{R}^n$– произвольное гладкое погружение замкнутого, вообще говоря, несвязного многообразия M, $\dim(M) = \frac{3n+3}{4} + 7$, причем нормальное расслоение $\nu(g)$ погружения g изоморфно сумме Уитни $(\frac{n+1}{4} - 8)$ экземпляров линейного расслоения κ над M, т.е. $\nu(g) = (\frac{n+1}{4} - 8)\kappa$ (в частности, $w_1(M) = 0$, поскольку коразмерность погужения g четна и $w_1(M) = (\frac{n+1}{4} - 8)w_1(\kappa) = 0$). Тогда в предположении $n \geq 63$ (т.е. при $l \geq 6$) справедливо равенство $\langle w_1(\kappa)^{\dim(M)}; [M]\rangle = 0$, где w_1 – первый характеристический класс Штифеля-Уитни.

Новое в доказательстве Основной Теоремы состоит в применении принципа геометрического контроля, который позволяет в классе кобордизма погружения находить погружение, у которого подмногообразие кратных точек самопересечения имеет более простую структурную группу нормального расслоения. Напомню, что структурная группа нормального расслоения к многообразию кратных точек самопересечения отвечает за перестановку листов исходного многообразия и изменение векторов скошенного оснащения при обходе по замкнутому пути на многообразии кратных точек.

При помощи стандартных рассуждений теории погружений из Основной Теоремы можно вывести следующее.

Основное Следствие

Пусть $g : M^{n-1} \looparrowright \mathbb{R}^n$ – произвольное гладкое погружение замкнутого многообразия M^{n-1} (которое, вообще говоря, ориентируемым и связным не предполагается). Тогда в предположении $n = 2^l - 1$, $n \geq 63$ (т.е. при $l \geq 6$), справедливо равенство $\langle w_1(M)^{n-1}; [M] \rangle = 0$.

Замечание. Эквивалентность предыдущего утверждения и теоремы Адамса (при $l \geq 4$) доказана в [E1,La].

Отметим, что в топологии существуют теоремы, близкие по формулировке к Теореме Адамса. Как правило, эти теоремы являются следствиями Теоремы Адамса. Иногда сами эти теоремы могут быть доказаны альтернативными и более простыми методами. Как замечает С.П.Новиков в обзоре [N], к таким теоремам относится Теорема Милнора-Ботта о том, что касательное n-мерное расслоение к стандартной сфере S^n тривиально тогда и только тогда, когда $n = 1, 3, 7$. Это теорема была открыта в работе [B-M]. Элегантная модификация известного доказательства была недавно получена в [F].

Остановимся на структуре работы. В разделе 1 напоминаются основные определения и конструкции теории погружений. Результаты этого раздела формально являются новыми, но легко получаются известными методами. В разделе 2 Основная Теорема переформулирована с использованием обозначений из раздела 1 (Теорема 5) и представлены основные этапы ее доказательства. В разделе 3 проводится основной этап доказательства, а именно, доказывается первая Основная Лемма 24, которая была высказана С.А.Мелиховым как гипотеза и обсуждалась на семинаре проф. О.Саеки в 2006 году, а также аналогичная ей вторая Основная Лемма 25.

Работа была написана при неоднократных обсуждениях на семинаре по алгебраической топологии под руководством проф. М.М.Постникова. В настоящей версии работы исправлена ошибка в формулировке Основной Леммы 3 из [Akh], которая приводилась без доказательства.

Автор благодарит за многочисленные обсуждения проф. В.М.Бухштабера, проф. В.А.Васильева, проф. П. Ландвебера, проф. А.С.Мищенко, проф. О.Саеки, проф. А.Б.Скопенкова, проф. Ю.П.Соловьёва, проф. А.В.Чернавского, проф. Е.В.Щепина, проф. П.Дж.Экклза, Н.Бродского, С.А.Мелихова, Р.Р.Садыкова, М.Б.Скопенкова.

1 Предварительные редукции

Напомним определения групп кобордизма оснащенных погружений в евклидово пространство, которые являются частными случаями более общей конструкции, изложенной в книге [K1] на стр. 55 и в разделе 10. Связь с конструкцией Понтрягина-Тома объясняется в [A-E].

Пусть $f : M^{n-1} \looparrowright \mathbb{R}^n$– гладкое погружение, причем $(n-1)$-мерное многообразие M^{n-1} замкнуто но, вообще говоря, неориентировано и несвязно. На пространстве таких погружений введем отношение кобордантности. Скажем, что два погружения f_0, f_1 связаны кобордизмом, $f_0 \sim f_1$, если существует погружение $\Phi : (W^n, \partial W = M_0^{n-1} \cup M_1^{n-1}) \looparrowright (\mathbb{R}^n \times [0;1]; \mathbb{R}^n \times \{0,1\})$ такое, что выполнены граничные условия $f_i = \Phi|_{M_i^{n-1}} : M_i^{n-1} \looparrowright \mathbb{R}^n \times \{i\}$, $i = 0,1$ и, кроме того, требуется, чтобы погружение Φ было ортогонально к $\mathbb{R} \times \{0,1\}$.

Множество классов кобордантности погружений образует абелеву группу относительно операции дизъюнктного объединения погружений. Например, нулевой элемент этой группы представляется пустым погружением, а элемент, обратный к данному погружению f_0 представлен композицией $S \circ f_0$, где S–зеркальная симметрия пространства $\mathbb{R}^n$. Эту группу обозначим через $Imm^{sf}(n-1,1)$. По теореме Уоллеса [Wa] указанная группа изоморфна стабильной гомотопической группе $\lim_{k\to\infty} \pi_{k+n}(\Sigma^k \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty)$.

Погружение f определяет изоморфизм нормального расслоения многообразия M^{n-1} и ориентирующего линейного расслоения κ, т.е. изоморфизм $D(f) : T(M^{n-1}) \oplus \kappa = n\varepsilon$, где ε–тривиальное линейное расслоение над M^{n-1}. В похожих конструкциях теории хирургии гладких многообразий всегда рассматривается стабильный изоморфизм нормального расслоения многообразия M^{n-1} и ориентирующего линейного расслоения κ, т.е. изоморфизм $T(M^{n-1}) \oplus \kappa \oplus N\varepsilon = (n+N)\varepsilon$, где $N >> n$. Пользуясь теоремой Хирша, легко проверить, что если двум погружениям f_1, f_2 отвечают изоморфизмы $D(f_1)$, $D(f_2)$, которые при стабилизации принадлежат одному классу (стабильного) изоморфизма, то рассматриваемые погружения f_1, f_2 оказываются регулярно кобордантными и даже регулярно конкордантными (но, вообще говоря, могут оказаться не регулярно гомотопными).

Нам потребуется также группа $Imm^{sf}(n-k,k)$. Элемент этой группы представлен тройкой (f, κ, Ξ), где $f : M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ – погружение замкнутого многообразия, $\kappa : E(\kappa) \to M^{n-k}$ линейное расслоение (для сокращения обозначений далее линейное (одномерное) расслоение и его характеристический класс в $H^1(M^{n-k};\mathbb{Z}/2)$ мы обозначаем той же буквой), Ξ скошенное оснащение нормального расслоения погружения при помощи расслоения κ, т.е. изоморфизм нормального расслоения погружения f и расслоения $k\kappa$. Тройка (f, κ, Ξ) будет называться скошенно-оснащенным погружением. В случае нечетного k линейное расслоение κ оказывается ориентирующим над M^{n-k}, и обязательно $\kappa = w_1(M^{n-k})$.

Два элемента группы кобордизма, представленные тройками (f_1, κ_1, Ξ_1) (f_2, κ_2, Ξ_2), равны, если погружения f_1, f_2 кобордантны, при этом требуется, чтобы погружение кобордизма было скошенно-оснащено и требуется согласование скошенного оснащения на кобордизме с заданными скошенными оснащениями на компонентах границы. Заметим, что при $k = 1$ новое определение групп $Imm^{sf}(n-k, k)$ совпадает с первоначальным.

Определим гомоморфизм:

$$J^{sf} : Imm^{sf}(n-1, 1) \to Imm^{sf}(n-k, k),$$

который называется гомоморфизмом перехода в коразмерность k. Рассмотрим многообразие M'^{n-1}, погружение которого $f : M'^{n-1} \looparrowright \mathbb{R}^n$ представляет элемент первой группы, и рассмотрим классифицирующее отображение $\kappa' : M'^{n-1} \to \mathbb{RP}^a$ в вещественное проективное пространство высокой размерности ($a = n$ достаточно), представляющее когомологический класс $w_1(M'^{n-1})$. Рассмотрим стандартное подпространство $\mathbb{RP}^{a-k+1} \subset \mathbb{RP}^a$ коразмерности $k-1$. Предположим, что отображение κ' трансверсально вдоль выбранного подпространства и определим подмногообразие $M^{n-k} \subset M'^{n-1}$ как полный прообраз этого подпространства при нашем отображении, $M^{n-k} = \kappa'^{-1}(\mathbb{RP}^{a-k+1})$. Определим погружение $f : M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ как ограничение погружения f' на заданное подмногообразие. Заметим, что погружение $f : M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ допускает естественное скошенное оснащение. Действительно, нормальное расслоения подмногообразия $M^{n-k} \subset M'^{n-1}$ естественно изоморфно расслоению $(k-1)\kappa$, где $\kappa = \kappa'|_M$ (здесь и далее, если обозначение многообразия используется в нижнем индексе, то верхний индекс размерности многообразия опускается). Указанный изоморфизм Ξ определяется стандартным скошенным оснащением нормального расслоения к подмногообразию $\mathbb{RP}^{a-k+1}$ в многообразии $\mathbb{RP}^a$, которое переносится на подмногообразие $M^{n-k} \subset M'^{n-1}$, поскольку предполагалось, что κ' регулярно вдоль $\mathbb{RP}^{a-k+1}$. Еще одно прямое слагаемое в скошенном оснащении Ξ нормального расслоения погружения f соответствует нормальному одномерному расслоению погружения f'. Это расслоение служит ориентирующим расслоением для M'^{n-1}, поэтому его ограничение на M^{n-k} совпадает с κ. Гомоморфизм

J^{sf} переводит элемент, представленный погружением f' в элемент, представленный тройкой (f, κ, Ξ). Из элементарных геометрических соображений, использующих лишь понятие трансверсальности вытекает, что гомоморфизм J^{sf} корректно определен, поскольку произвол в его конструкции приводит к тройке из того же класса нормального кобордизма.

При условии, что погружение $f : M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ общего положения, подмножество в $\mathbb{R}^n$ точек самопересечения погружения f обозначается через $\Delta = \Delta(f)$, $\dim(\Delta) = n - 2k$. Это подмножество определяется по формуле:

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists x_1, x_2 \in M^{n-k}, x_1 \neq x_2, f(x_1) = f(x_2) = x\}, \qquad (1)$$

оно является замкнутым. Определим $\bar{\Delta} \subset M^{n-k}$ по формуле $\bar{\Delta} = f^{-1}(\Delta)$.

Напомним стандартное определение многообразия двукратных точек самопересечения данного погружения общего положения и параметризующего погружения многообразия двукратных точек самопересечения. Пространство N определяется формулой

$$N = \{[(x_1, x_2)] \in (M^{n-k} \times M^{n-k})/T' : x_1 \neq x_2, f(x_1) = f(x_2)\} \qquad (2)$$

(T' – инволюция, переставляющая координаты сомножителей), а его каноническое накрывающее определяется формулой

$$\bar{N} = \{(x_1, x_2) \in M^{n-k} \times M^{n-k} : x_1 \neq x_2, f(x_1) = f(x_2)\}. \qquad (3)$$

В предположении о том, что погружение f общего положения, пространство N является гладким многообразием размерности $\dim(N) = n - 2k$. Это многообразие обозначается через N^{n-2k}.

Погружение $\bar{g} : \bar{N}^{n-2k} \looparrowright M^{n-k}$, параметризующее $\bar{\Delta}$, определяется формулой $\bar{g} = \pi|_{\bar{N}}$, где $\pi : M^{n-k} \times M^{n-k} \to M^{n-k}$ – стандартная проекция на первый сомножитель. Погружение $g : N^{n-2k} \looparrowright \mathbb{R}^n$, параметризующее Δ, определяется формулой $g([x_1, x_2]) = f(x_1)$. Заметим, что параметризующие погружения $g, \bar{g}$ не являются, вообще говоря, погружениями общего положения. Определено двулистное накрытие $p : \bar{N}^{n-2k} \to N^{n-2k}$, при этом $g \circ p = f \circ \bar{g}$. Это накрытие назовем каноническим накрытием над многообразием точек самопересечения.

Определение 1. Пусть (f, κ, Ξ) представляет элемент из $Imm^{sf}(n - k, k)$. Определим гомоморфизм:

$$h_k : Imm^{sf}(n - k, k) \to \mathbb{Z}/2,$$

называемый инвариантом Хопфа, по формуле:

$$h_k([f, \kappa, \Xi]) = \langle \kappa^{n-k}; [\bar{M}^{n-k}] \rangle.$$

Определения стабильного инварианта Хопфа (в смысле Определения 1) при различных значениях k согласованы между собой. Сформулируем это в виде отдельного утверждения.

Предложение 2. *При гомоморфизме* $J^{sf} : Imm^{sf}(n-1,1) \to Imm^{sf}(n-k,k)$ *стабильный инвариант Хопфа сохраняется, т.е. инвариант* $h_1 : Imm^{sf}(n-1,1) \to \mathbb{Z}/2$ *и инвариант* $h_k : Imm^{sf}(n-k,k) \to \mathbb{Z}/2$ *связаны между собой по формуле:*

$$h_1 = h_k \circ J^{sf}. \tag{4}$$

Доказательство Предложения 2

Пусть $f : M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ – погружение со скошенным оснащением Ξ и с характеристическим классом $\kappa \in H^1(M^{n-k};\mathbb{Z}/2)$, представляющее элемент из $Imm^{sf}(n-k,k)$, причем $J^{sf}([f']) = [f,\kappa,\Xi]$ для некоторого элемента $[f'] \in Imm^{sf}(n-1,1)$. По определению $h_k([f,\kappa,\Xi]) = \langle \kappa^{n-k}; [M^{n-k}] \rangle$.

С другой стороны, $M^{n-k} \subset M'^{n-1}$ представляет цикл, двойственный в смысле Пуанкаре коциклу $\kappa'^{k-1} \in H^{k-1}(M'^{n-1};\mathbb{Z}/2)$. Формула 4 справедлива, поскольку $\langle \kappa'^{n-1}; [M'^{n-1}] \rangle = \langle \kappa^{n-k}; [M^{n-k}] \rangle$. Действительно, образ характеристического отображения $\kappa' : M'^{n-1} \to \mathbb{RP}^\infty$ ($\kappa : M^{n-k} \to \mathbb{RP}^\infty$), не ограничивая общности, лежит в остове классифицирующего пространства размерности $n-1$ ($n-k$). Характеристическое число $\langle \kappa'^{n-1}; [M'^{n-1}] \rangle$ ($\langle \kappa^{n-k}; [M^{n-k}] \rangle$) совпадает со степенью $\deg(\kappa')$ ($\deg(\kappa)$) классифицирующего отображения $\kappa' : M'^{n-1} \to \mathbb{RP}^{n-1}$ ($\kappa : M^{n-k} \to \mathbb{RP}^{n-k}$), которая рассматривается по модулю 2 и определяется как четность числа прообразов регулярного значения отображения. При этом значение $\deg(\kappa')$ ($\deg(\kappa)$) не зависит от выбора отображения κ' (κ) в указанный остов. (Напомню, что классы когомологий и их характеристические отображения обозначаются одинаково.) Степени $\deg(\kappa')$ и $\deg(\kappa)$ совпадают, поскольку регулярное значение можно выбрать общим для рассматриваемых отображений. Предложение 2 доказано.

Сформулируем другое (эквивалентное) определение инварианта Хопфа (в предположении $n-2k>0$).

Определение 3. Пусть (f,κ,Ξ) представляет элемент из $Imm^{sf}(n-k,k)$, $n-2k>0$. Пусть N^{n-2k} – многообразие двукратных точек погружения $f : M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$, $\bar{N}$–каноническое двулистное накрытие над

N, $\kappa_{\bar{N}} \in H^1(\bar{N};\mathbb{Z}/2)$ индуцирован из $\kappa \in H^1(M^{n-k};\mathbb{Z}/2)$ погружением $\bar{g} : \bar{N}^{n-2k} \looparrowright M^{n-k}$.

Определим значение гомоморфизма $h_k : Imm^{sf}(n-k,k) \to \mathbb{Z}/2$ по формуле:

$$h_k([f,\kappa,\Xi]) = \langle \kappa_{\bar{N}}^{n-2k}; [\bar{N}^{n-2k}] \rangle.$$

Следующее утверждение устанавливает эквивалентность Определений 1 и 3.

Предложение 4. *В условиях Определения 3 справедлива формула:*

$$\langle \kappa_{\bar{N}}^{n-2k}; [\bar{N}^{n-2k}] \rangle = \langle \kappa^{n-k}; [M^{n-k}] \rangle. \tag{5}$$

Доказательство Предложения 4

Пусть $f : M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ – погружение со скошенным оснащением Ξ и с характеристическим классом $\kappa \in H^1(M^{n-k};\mathbb{Z}/2)$, представляющее элемент из $Imm^{sf}(n-k,k)$. Пусть N^{n-2k}–многообразие двукратных точек самопересечения погружения f, $g : N^{n-2k} \looparrowright \mathbb{R}^n$–параметризующее погружение, $\bar{N}^{n-2k} \to N^{n-2k}$–каноническое двулистное накрытие. Рассмотрим образ фундаментального класса $\bar{g}_*([\bar{N}^{n-2k}]) \in H_{n-2k}(M^{n-k};\mathbb{Z}/2)$ при погружении $\bar{g} : \bar{N}^{n-2k} \looparrowright M^{n-k}$ и обозначим через $m \in H^k(M^{n-k};\mathbb{Z}/2)$–когомологический класс, двойственный в смысле Пуанкаре классу гомологий $\bar{g}_*([\bar{N}^{n-2k}])$. Рассмотрим также когомологический эйлеров класс нормального расслоения погружения f, который обозначим через $e \in H^k(M^{n-k};\mathbb{Z}/2)$.

По Теореме Герберта (см. [E-G], Теорема 1.1) справедлива формула:

$$e = m. \tag{6}$$

Поскольку эйлеров класс e нормального расслоения $k\kappa$ погружения f равен κ^k (классы когомологий и соответствующие линейные расслоения обозначаются одинаково), то цикл $\bar{g}_*([\bar{N}]) \in H_{n-2k}(M^{n-k};\mathbb{Z}/2)$, двойственен в смысле Пуанкаре коциклу $\kappa^k \in H^k(M^{n-k};\mathbb{Z}/2)$. Поэтому формула (5) и Предложение 4 доказано.

Более удобно переформулировать Предложение 4 (в несколько более общей форме) на языке коммутативных диаграмм. Приступим к формулировке соответствующих определений.

Пусть $g : N^{n-2} \looparrowright \mathbb{R}^n$– погружение многообразия точек самопересечения погружения $f : M^{n-1} \looparrowright \mathbb{R}^n$ коразмерности 1. Определено нормальное двумерное расслоение погружения g, которое мы будем обозначать через $\nu_N : E(\nu_N) \to N^{n-2}$. (Пространство дискового расслоения, ассоциированного с векторным расслоением ν_N, диффеоморфно регулярной замкнутой трубчатой окрестности погруженния g.)

Это расслоение снабжено дополнительной структурой по сравнению с произвольным векторным расслоением, а именно, его структурная группа как $O(2)$-расслоения допускает редукцию к дискретной группе диэдра, которую мы обозначим через $\mathbf{D}_4$. Это группа восьмого порядка, она определяется как группа перемещений плоскости, которые переводят стандартную пару координатных осей в себя (возможно, с изменением ориентации и порядка).

В стандартном копредставлении группа $\mathbf{D}_4$ задается двумя образующими a, b, которые связаны между собой соотношениями $\{a^4 = b^2 = 1, [a;b] = a^2\}$. Образующая a представлена поворотом плоскости на угол $\frac{\pi}{2}$, образующая b представлена симметрией относительно биссектрисы первого координатного угла. Заметим, что элементу ba (произведение будем записывать по правилу композиции $b \circ a$ преобразований из $O(2)$) соответствует симметрия относительно первой координатной оси.

Замечание

В книге [A-M] описана структура когомологий по модулю 2 классифицирующего пространства группы $\mathbf{D}_4$ как модуля над алгеброй Стинрода. Инвариант Хопфа, который определяется ниже как характеристическое число на многообразии точек самопересечения скошенно-оснащенного погружения, это вычисление не использует.

Структурная группа нормального расслоения многообразия точек самопересечения для погружения $f : M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$, при $k = 1$.

Используем условие трансверсальности самопересечения погружения $f : M^{n-1} \looparrowright \mathbb{R}^n$. Пусть N^{n-2}–многообразие самопересечения погружения f, $g : N^{n-2} \looparrowright \mathbb{R}^n$–параметризующее погружение. В слое $E(\nu_N)_x$ нормального расслоения ν_N над точкой $x \in N$ фиксирована неупорядоченная пара координатных осей. Эти оси образованы касательными к кривым пересечения слоя $E(\nu_N)_x$ с двумя вложенными листами погруженного многообразия, пересекающимися трансверсально в окрестности этой точки. По построению расслоение ν_N имеет структурную группу $\mathbf{D}_4 \subset O(2)$.

Над пространством $K(\mathbf{D}_4, 1)$ определено универсальное 2-мерное $\mathbf{D}_4$–расслоение, которое обозначим через $\psi : E(\psi) \to K(\mathbf{D}_4, 1)$. Скажем, что отображение $\eta : N \to K(\mathbf{D}_4, 1)$ является классифицирующим для расслоения ν_N, если определен изоморфизм $\Xi : \eta^*(\psi) = \nu_N$ обратного образа $\eta^*(\psi)$ расслоения ψ и расслоения нормального расслоения ν_N погружения g. В дальнейшем само расслоение и его классифицирующее отображение будут обозначаться одинаково и в рассматриваемом случае можно записать $\eta = \nu_N$. Изоморфизм Ξ будем называть $\mathbf{D}_4$–оснащением погружения g, а отображение η будем называть характеристическим классом $\mathbf{D}_4$–оснащения Ξ.

Замечание. В действительности, мы описали лишь часть более общей конструкции. Структурная группа s-мерного нормального расслоения к подмногообразию N_s точек самопересечения кратности s погружения f допускает редукцию к структурной группе $\mathbb{Z}/2 \int \Sigma(s)$ – сплетению циклической группы $\mathbb{Z}/2$ с группой подстановок множества из s элементов (см., например, [E1]).

Пусть тройка (f, κ, Ξ), где $f : M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ – погружение, Ξ – скошенное оснащение нормального расслоения погружения f с характеристическим классом $\kappa \in H^1(M; \mathbb{Z}/2)$, представляет элемент группы $Imm^{sf}(n-k, k)$. Нам потребуется обобщение предыдущего построения, которое относилось к случаю $k = 1$. Напомним описание (см., например, [E1], [E-G]) структурной группы нормального расслоения ν_N над многообразием точек самопересечения произвольного погружения общего положения произвольной коразмерности k, $k \le [\frac{n}{2}]$.

Предложение 5. *Нормальное $2k$-мерное расслоение ν_N погружения g представимо в виде прямой суммы k изоморфных копий двумерного расслоения η над N^{n-2k}, причем каждое двумерное расслоение имеет структурную группу $\mathbf{D}_4$ и классифицируется отображением $\eta : N^{n-2k} \to K(\mathbf{D}_4, 1)$ (аналогичное предложение доказано в* [Sz2]*).*

Доказательство Предложения 5

Пусть $x \in N^{n-2k}$ точка на многообразии двукратных точек погружения $f : M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$. Обозначим через $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \bar{N}^{n-2k} \looparrowright M^{n-k}$ два прообраза этой точки на каноническом накрывающем многообразии. Ортогональное дополнение в пространстве $T_(g(x))(\mathbb{R}^n)$ к подпространству $g_*(T_x(N^{n-2k}))$ является слоем нормального расслоения $E(\nu_N)$ погружения g над точкой $x \in N^{n-2k}$. Этот слой представлен как прямая сумма двух линейных пространств $E(\nu_N)_x = \bar{E}_{x,1} \oplus \bar{E}_{x,2}$, где подпространство $\bar{E}_{x,i} \subset E(\nu_N)_x$ является слоем нормального расслоения погружения f в точке $\bar{x}_i$.

Подпространство $\bar{E}_{x,i}$ слоя канонически представлено в виде прямой суммы k упорядоченных линейных подпространств $\bar{E}(\kappa_{x,j,i})$, $j = 1, \dots, k$, $i = 1, 2$, причем фиксировано семейство попарных изоморфизмов между этими пространствами, поскольку нормальное расслоение погружения f было снабжено скошенным оснащением в коразмерности k. Сгруппируем слои с одинаковыми номерами j в двумерный подслой слоя $E(\nu_N)_x$. Получим разложение слоя $E(\nu_N)_x$ над каждой точкой $x \in N^{n-2k}$ в прямую сумму k экземпляров попарно изоморфных двумерных подпространств. Проведенная конструкция непрерывно зависит от выбора точки x и может быть проведена одновременно для каждой точки базы N^{n-2k}. В результате получится требуемое разложение расслоения ν_N в сумму Уитни некоторого числа канонически изоморфных между собой двумерных подрасслоений. Каждое двумерное прямое слагаемое классифицируется отображением $\eta : N \to K(\mathbf{D}_4, 1)$, что доказывает Предложение 5.

Определение 6. Определим группу кобордизма погружений $Imm^{\mathbf{D}_4}(n-2k, 2k)$, в предположении $n > 2k$. Пусть (g, Ψ, η)– тройка, определяющая $\mathbf{D}_4$–оснащенное погружение в коразмерности $2k$. Здесь $g : N^{n-2k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ – погружение, $\eta : N^{n-2k} \to K(\mathbf{D}_4, 1)$– характеристический класс $\mathbf{D}_4$–оснащения Ψ. Отношение кобордизма троек стандартно.

Лемма 7. *В предположении $k_1 < k$, $2k < n$, определена коммутативная диаграмма гомоморфизмов групп:*

$$\begin{array}{ccccc} Imm^{sf}(n-k_1, k_1) & \stackrel{J^{sf}}{\longrightarrow} & Imm^{sf}(n-k, k) & \stackrel{h_k}{\longrightarrow} & \mathbb{Z}/2 \\ \downarrow \delta_{k_1} & & \downarrow \delta_k & & \| \\ Imm^{\mathbf{D}_4}(n-2k_1, 2k_1) & \stackrel{J^{\mathbf{D}_4}}{\longrightarrow} & Imm^{\mathbf{D}_4}(n-2k, 2k) & \stackrel{h_k^{\mathbf{D}_4}}{\longrightarrow} & \mathbb{Z}/2. \end{array} \qquad (7)$$

Доказательство Леммы 7

Определим гомоморфизмы в диаграмме (7). Гомоморфизм

$$Imm^{sf}(n-k_1, k_1) \stackrel{J^{sf}}{\longrightarrow} Imm^{sf}(n-k, k)$$

определяется дословно также, как был определен гомоморфизм перехода в коразмерность k для случая $k_1 = 1$. Гомоморфизм

$$Imm^{sf}(n-k,k) \xrightarrow{\delta_k} Imm^{\mathbf{D}_4}(n-2k,2k)$$

переводит класс кобордизма тройки (f,κ,Ξ) в класс кобордизма тройки (g,η,Ψ), где $g : N^{n-2k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ – параметризующее погружение многообразия точек самопересечения погружения f (предполагается, что погружение f самопересекается трансверсально), Ψ–это $\mathbf{D}_4$–оснащение нормального расслоения погружения g, η–характеристический класс $\mathbf{D}_4$–оснащения Ψ.

Приступим к определению гомоморфизма

$$Imm^{\mathbf{D}_4}(n-2k,2k) \xrightarrow{h_k^{\mathbf{D}_4}} \mathbb{Z}/2,$$

который назовем диэдральным инвариантом Хопфа. Определим подгруппу

$$\mathbf{I}_c \subset \mathbf{D}_4, \tag{8}$$

порожденную преобразованиями плоскости, сохраняющими собственное подпространство каждого базисного вектора. Группа $\mathbf{I}_c$ является элементарной абелевой группой ранга 2. Определим гомоморфизм

$$l^{[2]} : \mathbf{I}_c \to \mathbb{Z}/2, \tag{9}$$

отвечающий за преобразование в собственном пространстве первого базисного вектора. Подгруппа (8) имеет индекс 2 и определено 2-листное накрытие:

$$K(\mathbf{I}_c,1) \to K(\mathbf{D}_4,1), \tag{10}$$

индуцированное этой подгруппой.

Обозначим через

$$\bar{N}^{n-2k} \to N^{n-2k} \tag{11}$$

2-листное накрытие, индуцированное характеристическим классом $\eta : N^{n-2k} \to K(\mathbf{D}_4,1)$ из накрытия (10). Определен характеристический класс:

$$\bar{\eta}^{sf} = l \circ \bar{\eta}^{\mathbf{I}_c} : \bar{N}^{n-2k} \to K(\mathbb{Z}/2,1),$$

где $\bar{\eta}^{\mathbf{I}_c} : \bar{N}^{n-2k} \to K(\mathbf{I}_c,1)$– двулистное накрытие над классифицирующим отображением $\eta : N^{n-2k} \to K(\mathbf{D}_4,1)$, индуцированное накрытиями (10), (11) над пространствами обаза и прообраза отображения η соответственно.

Определим значение гомоморфизма $Imm^{\mathbf{D}_4}(n-2k,2k) \xrightarrow{h_k^{\mathbf{D}_4}} \mathbb{Z}/2$ по формуле:

$$h_k^{\mathbf{D}_4}([g,\eta,\Psi]) = \left\langle (\bar{\eta}^{sf})^{n-2k}; [\bar{N}^{n-2k}] \right\rangle. \qquad (12)$$

Диаграмма (7) определена. Коммутативность правого квадрата диаграммы вытекает из прямых геометрических рассуждений. Коммутативность правого квадрата диаграммы вытекает при $k_1 = 1$ из Предложения 5, а при произвольном k_1 доказательство аналогично. Лемма 7 доказана.

Нам потребуется эквивалентное определение диэдрального инварианта Хопфа. Рассмотрим подгруппу в группе $O(4)$ преобразований, переводящих множество векторов $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4)$ стандартного базиса в себя, быть может, изменяя направления некоторых векторов и, кроме того, сохраняющих пару 2-мерных подпространств, порожденных базисными векторами $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$, $(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4)$. При этом указанные 2-мерные подпространства могут, вообще говоря, переставляться между собой. Обозначим подгруппу таких преобразований через $\mathbb{Z}/2^{[3]}$. Определим цепочку подгрупп индекса 2:

$$\mathbf{H}_{\bar{c}} \subset \mathbf{H}_c \subset \mathbb{Z}/2^{[3]}. \qquad (13)$$

Подгруппа $\mathbf{H}_c$ определена как подгруппа преобразований, инвариантных на каждом 2-мерном подпространстве, порожденном парами векторов $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$, $(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4)$. Эта подгруппа изоморфна прямой сумме двух экземпляров группы $\mathbf{D}_4$, каждое прямое слагаемое инвариантно действует в соответствующем 2-мерном подпространстве. Подгруппа $\mathbf{H}_{\bar{c}} \subset \mathbf{H}_c$ определена как подгруппа преобразований, инвариантных на каждом линейном подпространстве, порожденных векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$.

Пусть (g,η,Ψ) представляет элемент из $Imm^{\mathbf{D}_4}(n-2k,2k)$ в предположении, что $n-4k>0$ и что g является погружением общего положения. Пусть L^{n-4k} – многообразие двукратных точек погружения $g : N^{n-2k} \looparrowright \mathbb{R}^n$. Определена башня 2-листных накрытий:

$$L^{n-4k}_{\mathbf{H}_{\bar{c}}} \to L^{n-4k}_{\mathbf{H}_c} \to L^{n-4k} \qquad (14)$$

в результате следующей конструкции. Определено параметризующее погружение $h : L^{n-4k} \looparrowright \mathbb{R}^n$. Нормальное расслоение погружения h

обозначим через ν_L. Это расслоение крассифицируется отображением $\zeta : L^{n-4k} \to K(\mathbb{Z}/3^{[3]}, 1)$. Цепочка подгрупп (13) индуцирует башню 2-листных накрытий классифицирующих пространств:

$$K(\mathbf{H}_{\bar{c}}, 1) \subset K(\mathbf{H}_c, 1) \subset K(\mathbb{Z}/2^{[3]}, 1) \qquad (15)$$

над пространством-образом классифицирующего отображения ζ и башню 2-листных накрытий (14) над пространством-прообразом отображения ζ. Накрытие $L_{\mathbf{H}_{\bar{c}}} \to L^{n-4k}$, определенное формулой (14), будем называть каноническим 4-листным накрытием над многообразием точек самопересечения погружения g.

Определено отображение классифицирующих пространств:

$$K(\mathbf{H}_{\bar{c}}, 1) \to K(\mathbb{Z}/2, 1), \qquad (16)$$

индуцированное гомоморфизмом

$$l^{[3]} : \mathbf{H}_{\bar{c}} \to \mathbb{Z}/2, \qquad (17)$$

который отвечает за преобразование линейного собственного подпространства вектора $\mathbf{e}_1$. Определены классифицирующее отображение $\bar{\zeta}^{\mathbf{H}_{\bar{c}}} : \bar{L}^{n-4k}_{\mathbf{H}_{\bar{c}}} \to K(\mathbf{H}_{\bar{c}}, 1)$ в результате перехода к 4-листному накрытию над отображением ζ и характеристическое отображение $\bar{\zeta}^{sf} : L^{n-4k}_{\mathbf{H}_{\bar{c}}} \to K(\mathbb{Z}/2, 1)$ в результате композиции классифицирующего отображение $\bar{\zeta}^{\mathbf{H}_{\bar{c}}}$ с отображением (16).

Предложение 8. *Предположим, что $\mathbf{D}_4$–оснащенное погружение (g, η, Ψ), представляющее элемент из группы $Imm^{\mathbf{D}_4}(n-2k, 2k)$, лежит в образе гомоморфизма*

$$\delta_k : Imm^{sf}(n-k, k) \to Imm^{\mathbf{D}_4}(n-2k, 2k).$$

Тогда справедлива формула:

$$\langle (\bar{\zeta}^{sf})^{n-4k}; [\bar{L}^{n-4k}_{\mathbf{H}_{\bar{c}}}] \rangle = \langle (\bar{\eta}^{sf})^{n-2k}; [\bar{N}^{n-2k}] \rangle. \qquad (18)$$

Доказательство Предложения 8

Пусть $g : N^{n-2k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ – погружение с $\mathbf{D}_4$–оснащением Ψ и с характеристическим классом $\eta : N^{n-2k} \to K(\mathbf{D}_4, 1)$, представляющее элемент из $Imm^{\mathbf{D}_4}(n-2k, 2k)$ из образа δ_k. Пусть L^{n-4k}–многообразие двукратных точек самопересечения погружения g, $h : L^{n-4k} \looparrowright \mathbb{R}^n$–параметризующее погружение, $\bar{L}^{n-4k} \to L^{n-4k}$–каноническое двулистное накрытие. Рассмотрим образ фундаментального класса $\bar{h}_*([\bar{L}^{n-4k}]) \in H_{n-4k}(N^{n-2k};\mathbb{Z}/2)$ при погружении $\bar{h} : \bar{L}^{n-4k} \looparrowright N^{n-2k}$ и обозначим через $m \in H^{2k}(N^{n-2k};\mathbb{Z}/2)$–когомологический класс, двойственный в смысле Пуанкаре классу гомологий $\bar{h}_*([\bar{L}^{n-4k}])$. Рассмотрим также когомологический эйлеров класс нормального расслоения погружения g, который обозначим через $e \in H^{2k}(N^{n-2k};\mathbb{Z}/2)$.

По Теореме Герберта (см. [E-G], Теорема 1.1) справедлива формула (6). Обозначим через $\bar{e} \in H^{2k}(\bar{N}^{n-2k}_{sf};\mathbb{Z}/2)$, $\bar{m} \in H^{2k}(\bar{N}^{n-2k}_{sf};\mathbb{Z}/2)$ – образы коциклов e, m соответственно при каноническом двулистном накрытии $\bar{N}^{n-2k}_{sf} \to N^{n-2k}$. Справедлива также формула:

$$\bar{e} = \bar{m},$$

в частности, справедлива формула:

$$\langle(\bar{\eta}^{sf})^{n-4k}\bar{m};[\bar{N}^{n-2k}_{sf}]\rangle = \langle(\bar{\eta}^{sf})^{n-4k}\bar{e};[\bar{N}^{n-2k}_{sf}]\rangle. \tag{19}$$

Правая часть формулы (19) равна $h^{\mathbf{D}_4}_{2k}(J^{\mathbf{D}_4}([g,\eta,\Psi]))$. Это характеристическое число в силу коммутативности диаграммы (7) совпадает с $h^{\mathbf{D}_4}_k([g,\eta,\Psi]) = \langle(\bar{\eta}^{sf})^{n-2k};[\bar{N}^{n-2k}]\rangle$ в правой части формулы (18). Поскольку характеристические классы $\bar{\zeta}^{sf} : \bar{L}^{n-4k}_{sf} \to K(\mathbb{Z}/2,1)$ и $\bar{\eta}^{sf}|_{\bar{L}_{sf}}$ совпадают, левая часть формулы (19) равна характеристическому числу $\langle(\bar{\zeta}^{sf})^{n-4k};[\bar{L}^{n-4k}_{\mathbf{H}_{\bar{c}}}]\rangle$ из левой части формулы (18). Предложение 8 доказано.

2 Доказательство основной теоремы

Переформулируем Основную Теорему.

Теорема 9. *При $l \geq 6$ гомоморфизм $h_{2^{l-2}-8} : Imm^{sf}(3\cdot 2^{l-2}+7, 2^{l-2}-8) \to \mathbb{Z}/2$, заданный Определением 3, тривиален.*

Вывод Основного Следствия из Теоремы 9

Рассмотрим гомоморфизм $J^{sf} : Imm^{sf}(n-1,1) \to Imm^{sf}(3\cdot 2^{l-2}+7, 2^{l-2}-8)$. Согласно Предложению 4, $h_1 = h_{2^{l-2}-8} \circ J^{sf}$. Пусть элемент в группе $Imm^{sf}(n-1,1)$ представлен погружением $f : M^{n-1} \looparrowright \mathbb{R}^n$, $w_1(M) = \kappa$. Значение $h_k(J^{sf}(f))$, где $k = 2^{l-2}-8$, совпадает с характеристическим числом $\langle\kappa^{n-1};[M^{n-1}]\rangle$. Используя Теорему 9, получаем требуемое.

Для доказательства Теоремы 9 потребуются ввести дополнительные определения и обозначения.

Определение подгрупп $\mathbf{I}_d \subset \mathbf{I}_a \subset \mathbf{D}_4$, $\mathbf{I}_b \subset \mathbf{D}_4$

Обозначим через $\mathbf{I}_a \; = \subset \; \mathbf{D}_4$ циклическую подгруппу порядка 4 индекса 2, содержащую нетривиальные элементы $a, a^2, a^3 \in \mathbf{D}_4$ (т.е. порожденную преобразованием поворота, меняющим координатные оси). Обозначим через $\mathbf{I}_d \subset \mathbf{I}_a$ – подгруппу с нетривиальным элементом a^2 (преобразование центральной симметрии). Обозначим через $\mathbf{I}_b \subset \mathbf{D}_4$ – подгруппу с образующими a^2, ab (преобразование симметрии относительно биссектриссы первой координатной четверти).

Определены гомоморфизмы включения подгрупп: $i_{d,a} : \mathbf{I}_d \subset \mathbf{I}_a$ $i_{d,b} : \mathbf{I}_d \subset \mathbf{I}_b$. В случае, если образ совпадает со всей группой $\mathbf{D}_4$ соответствующий индекс при гомоморфизмах включений опускается: $i_d : \mathbf{I}_d \subset \mathbf{D}_4$, $i_a : \mathbf{I}_a \subset \mathbf{D}_4$, $i_b : \mathbf{I}_b \subset \mathbf{D}_4$.

Определение подгруппы $i_{\mathbf{Q}_a} : \mathbf{Q}_a \subset \mathbb{Z}/2^{[3]}$

Обозначим через $\mathbf{Q}_a$ – группу кватернионов порядка 8. Эта группа задана копредставлением $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k} | \mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji}, \mathbf{jk} = \mathbf{i} = -\mathbf{kj}, \mathbf{ki} = \mathbf{j} = -\mathbf{ik}, \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1\}$. Определено стандартное представление $\chi_+ : \mathbf{Q}_a \to SO(4)$. Представление χ_+ (матрица действует слева на вектор-столбец) переводит единичные кватернионы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ в матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (20)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (21)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (22)$$

Указанное представление определяет подгруппу $i_{\mathbf{Q}_a} : \mathbf{Q}_a \subset \mathbb{Z}/2^{[3]} \subset O(4)$.

Определение подгрупп $\mathbf{I}_d \subset \mathbf{I}_a \subset \mathbf{Q}_a$

Обозначим через $i_{\mathbf{I}_d,\mathbf{Q}_a} : \mathbf{I}_d \subset \mathbf{Q}_a$ – центральную подгруппу в кватернионной группе, которая оказывается также центральной и во всей группе $\mathbb{Z}/2^{[3]}$.

Обозначим через $i_{\mathbf{I}_a,\mathbf{Q}_a} : \mathbf{I}_a \subset \mathbf{Q}_a$ – подгруппу в кватернионной группе, порожденную комплексным кватернионом $\mathbf{i}$.

Определены также гомоморфизмы включения $i_{\mathbf{I}_d} : \mathbf{I}_d \subset \mathbb{Z}/2^{[3]}$, $i_{\mathbf{Q}_a} : \mathbf{Q}_a \subset \mathbb{Z}/2^{[3]}$

Определение 10. Структурное отображение $\eta : N^{n-2k} \to K(\mathbf{D}_4, 1)$ называется циклическим, если оно является композицией некоторого отображения $\mu_a : N^{n-2k} \to K(\mathbf{I}_a, 1)$ и включения $i_a : K(\mathbf{I}_a, 1) \subset K(\mathbf{D}_4, 1)$.

Определение 11. Структурное отображение $\zeta : L^{n-4k} \to K(\mathbb{Z}/2^{[3]}, 1)$ называется кватернионным, если оно является композицией некоторого отображения $\lambda_a : L^{n-4k} \to K(\mathbf{Q}_a, 1)$ и включения $K(\mathbf{Q}_a, 1) \subset K(\mathbb{Z}/2^{[3]}, 1)$.

Ниже нам потребуется конструкция пространств Эйленберга-Маклейна $K(\mathbf{I}_a, 1)$, $K(\mathbf{Q}_a, 1)$ и описание конечномерных остовов этих пространств, которое мы напомним. Рассмотрим бесконечномерную сферу S^∞ (это стягиваемое пространство), которая определяется как прямой предел бесконечной цепочки вложений стандартных сфер нечетной размерности,

$$S^\infty = \varinjlim \quad (S^1 \subset S^3 \subset \dots \subset S^{2j-1} \subset S^{2j+1} \subset \dots \quad).$$

При этом S^{2j-1} определяется по формуле $S^{2j-1} = \{(z_1, \dots, z_j) \in \mathbb{C}^j | |z_1|^2 + \dots + |z_j|^2 = 1\}$. Пусть $\mathbf{i}(z_1, \dots, z_j) = (\mathbf{i}z_1, \dots, \mathbf{i}z_j)$. Тем самым, пространство $S^{2j-1}/\mathbf{i}$ служит $(2j-1)$-мерным остовом пространства S^∞/i, который называется $(2j-1)$-мерным линзовым пространством над $\mathbb{Z}/4$. Само пространство $S^\infty/\mathbf{i}$ является пространством Эйленберга-Маклейна $K(\mathbf{I}_a, 1)$.

Определим пространство $K(\mathbf{Q}_a, 1)$. Рассмотрим бесконечномерную сферу S^∞ (это стягиваемое пространство), которая определяется как прямой предел бесконечной цепочки вложений стандартных сфер:

$$S^\infty = \varinjlim \quad (S^3 \subset S^7 \subset \dots \subset S^{4j-1} \subset S^{4j+3} \subset \dots \quad).$$

Определено покоординатное действие $\mathbf{Q}_a \times (\mathbb{C}^2)^j \to (\mathbb{C}^2)^j$ на каждом прямом слагаемом $\mathbb{C}^2$ в соответствии с формулами $20, 21, 22$. Тем самым, пространство $S^{4j-1}/\mathbf{Q}_a$ служит $(4j-1)$-мерным остовом пространства

$S^\infty/\mathbf{Q}_a$ и называется $(4j-1)$-мерным линзовым пространством над $\mathbf{Q}_a$. Само пространство $S^\infty/\mathbf{Q}_a$ является пространством Эйленберга-Маклейна $K(\mathbf{Q}_a,1)$.

Определение характеристического числа $h_{\mu_a,k}$

Пусть в предположении $n>2k$ на многообразии точек самопересечения N^{n-2k} скошенно-оснащенного погружения определено произвольное отображение $\mu_a : N^{n-2k} \to K(\mathbf{I}_a,1)$. Определим характеристическое число $h_{\mu_a,k}$ по формуле:

$$h_{\mu_a,k} = \langle \bar{\mu}_a^* x; [\bar{N}_a^{n-2k}]\rangle, \tag{23}$$

где $\bar{\mu}_a : \bar{N}_a^{n-2k} \to K(\mathbf{I}_d,1)$ – двулистное накрывающее над отображением $\mu_a : N_a^{n-2k} \to K(\mathbf{I}_a,1)$, индуцированное накрытием $K(\mathbf{I}_d,1) \to K(\mathbf{I}_a,1)$, $x \in H^{n-2k}(K(\mathbf{I}_d,1);\mathbb{Z}/2)$ – образующая, $[\bar{N}_a^{n-2k}]$ – фундаментальный класс многообразия $\bar{N}_a^{n-2k}$. (Многообразие $\bar{N}_a^{n-2k}$ совпадает с каноническим 2-листным накрывающим $\bar{N}^{n-2k}$, если структурное отображение $\eta : N^{n-2k} \to K(\mathbf{D}_4,1)$ является циклическим.)

Определение характеристического числа $h_{\lambda_a,k}$

Пусть в предположении $n>4k$ на многообразии точек самопересечения L^{n-4k} $\mathbf{D}_4$–оснащенного погружения определено произвольное отображение $\lambda_a : L^{n-4k} \to K(\mathbf{Q}_a,1)$. Определим характеристическое число $h_{\lambda_a,k}$ по формуле:

$$h_{\lambda_a,k} = \langle \bar{\lambda}_a^* y; [\bar{L}_a]\rangle, \tag{24}$$

где $y \in H^{n-4k}(K(\mathbf{H}_e,1);\mathbb{Z}/2)$ – образующая, $\bar{\lambda}_a : \bar{L}_a^{n-4k} \to K(\mathbf{H}_e,1)$ – 4-листное накрытие над отображением λ_a, индуцированное из накрытия $K(\mathbf{H}_e,1) \to K(\mathbf{Q}_a,1)$, $[\bar{L}_a]$– фундаментальный класс многообразия $\bar{L}_a^{n-4k}$. (Многообразие $\bar{L}_a^{n-4k}$ не совпадает с каноническим 4-листным накрывающим $\bar{L}^{n-4k}$, если структурное отображение ζ не является кватернионным.) где $\bar{\lambda}_a : \bar{L}_a^{n-4k} \to K(\mathbf{H}_e,1)$ – 4-листное накрытие над отображением $\lambda_a : L_a^{n-4k} \to K(\mathbf{Q}_a,1)$, индуцированное накрытием $K(\mathbf{Q}_e,1) \to K(\mathbf{Q}_a,1)$, $y \in H^{n-4k}(K(\mathbf{H}_e,1);\mathbb{Z}/2)$ – образующая, $[\bar{L}_a^{n-4k}]$ – фундаментальный класс многообразия $\bar{L}_a^{n-4k}$. (Многообразие $\bar{L}_a^{n-4k}$ совпадает с каноническим 4-листным накрывающим $L_{\mathbf{H}_{\bar{c}}}^{n-4k}$, если структурное отображение $\zeta : L^{n-4k} \to K(\mathbb{Z}/2^{[3]},1)$ является кватернионным.)

Лемма 12. *Для произвольного скошенно-оснащенного погружения* $(f : M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n, \kappa, \Xi)$ *с многообразием самопересечения* N^{n-2k}, *для которого классифицирующее отображение* η *нормального расслоения оказывается циклическим, справедливо равенство*

$$h_k(f, \kappa, \Xi) = h_{\mu_a,k},$$

где характеристическое число в правой части вычислено для такого отображения μ_a, *что* $\eta = i_a \circ \mu_a$, $i_a : \mathbf{I}_a \subset \mathbf{D}_4$.

Доказательство Леммы 12

Рассмотрим двулистное накрытие $\bar{\mu}_a : \bar{N}_a^{n-2k} \to K(\mathbf{I}_d, 1)$ над отображением $\mu_a : N^{n-2k} \to K(\mathbf{I}_a, 1)$, индуцированное двулистным накрытием $K(\mathbf{I}_d, 1) \to K(\mathbf{I}_a, 1)$ над пространством–образом отображения. Поскольку структурное отображение η является циклическим, многообразие $\bar{N}_a^{n-2k}$ совпадает с каноническим двулистным накрывающим $\bar{N}^{n-2k}$ над многообразием самопересечения N^{n-2k} погружения f. Доказательство леммы вытекает из Леммы 7, поскольку отображения $\bar{\mu}_a$ и $\bar{\eta}$ совпадают и характеристическое число $h_{\mu_a,k}$ вычисляется как в левой части равенства (12).

Лемма 13. *Для произвольного* $\mathbf{D}_4$*–оснащенного погружения* $(g : N^{n-2k} \looparrowright \mathbb{R}^n, \eta, \Psi)$ *с многообразием самопересечения* L^{n-4k}, *для которого классифицирующее отображение* ζ *нормального расслоения оказывается кватернионным, справедливо равенство*

$$h_k(g, \eta, \Psi) = h_{\lambda_a,k},$$

где характеристическое число в правой части вычислено для такого отображения λ_a, *что* $\zeta = i_a \circ \lambda_a$, $i_a : \mathbf{Q}_a \subset \mathbb{Z}/2^{[3]}$.

Доказательство Леммы 13

Рассмотрим 4-листное накрытие $\bar{\lambda}_a : \bar{L}_a^{n-4k} \to K(\mathbf{H}_d, 1)$ над отображением $\lambda_a : L^{n-4k} \to K(\mathbf{Q}_a, 1)$, индуцированное 4-листным накрытием $K(\mathbf{Q}_e, 1) \to K(\mathbf{Q}_a, 1)$ над пространством–образом отображения. Поскольку структурное отображение ζ является кватернионным, многообразие $\bar{L}_a^{n-4k}$ совпадает с каноническим 4-листным накрывающим $\bar{L}_{sf}^{n-4k}$ над многообразием точек самопересечения L^{n-4k} погружения g. Доказательство леммы вытекает из Предложения 8, поскольку отображения $\bar{\lambda}_a$ и $\bar{\zeta}^{sf}$ совпадают и характеристическое число $h_{\lambda_a,k}$ вычисляется по отображению $\bar{\lambda}_a$ как в правой части равенства (18).

Определение 14. Пусть N^{n-2k} – многообразие двукратных точек самопересечения скошенно-оснащенного погружения (f, Ξ, κ) в предположении, что $f : M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ – погружение общего положения. Скажем, что это скошенно-оснащенное погружение допускает циклическую структуру, если существует отображение $\mu_a : N^{n-2k} \to K(\mathbf{I}_a, 1)$ (при этом, вообще говоря, классифицирующее отображение η циклическим не предполагается) такое, что $h_{\mu_a,k} = h_k(f, \Xi, \kappa)$.

Пример 15. Из Леммы 10 вытекает, что если классифицирующее отображение η является циклическим, то циклическую структуру можно задать отображением $\mu_a : N^{n-2k} \to K(\mathbf{I}_a, 1)$, где $i_a \circ \mu_a = \eta$, $i_a : K(\mathbf{I}_a, 1) \subset K(\mathbf{D}_4, 1)$.

Определение 16. Пусть L^{n-4k}–многообразие двукратных точек самопересечения $\mathbf{D}_4$-оснащенного погружения (g, Ψ, η) в предположении, что $g : N^{n-2k} \looparrowright \mathbb{R}^n$–погружение общего положения. Скажем, что это $\mathbf{D}_4$–оснащенное погружение допускает кватернионную структуру, если существует отображение $\lambda_a : L^{n-4k} \to K(\mathbf{Q}_a, 1)$ (при этом, вообще говоря, классифицирующее отображение ζ циклическим не предполагается) такое, что $h_{\lambda_a,k} = h_k(g, \Psi, \eta)$.

Пример 17. Из Леммы 11 вытекает, что если структурное отображение ζ является кватернионным, то кватернионную структуру можно задать отображением $\lambda_a : L^{n-4k} \to K(\mathbf{Q}_a, 1)$, где $i_{Q_a} \circ \lambda_a = \zeta$, $i_{Q_a} : K(\mathbf{Q}_a, 1) \subset K(\mathbb{Z}/2^{[3]}, 1)$.

Нам потребуется сформулировать понятие циклической и кватернионной структур без предположения о том, что отображения $f : M^{n-k} \to \mathbb{R}^n$, $g : N^{n-2k} \to \mathbb{R}^n$ являются погружениями. Мы сформулируем необходимое определение в минимальной общности в предположении $M^{n-k} = \mathbb{RP}^{n-k}$, $N^{n-2k} = S^{n-2k}/\mathbf{i}$. Итак, пусть $d : \mathbb{RP}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ является гладким отображением общего положения.

Рассмотрим конфигурационное пространство

$$(\mathbb{RP}^{n-k} \times \mathbb{RP}^{n-k} \setminus \Delta_{\mathbb{RP}^{n-k}})/T', \tag{25}$$

которое также называется "взрезанный квадрат" пространства $\mathbb{RP}^{n-k}$. Это пространство получено путем факторизации прямого произведения без диагонали по инволюции $T' : \mathbb{RP}^{n-k} \times \mathbb{RP}^{n-k} \to \mathbb{RP}^{n-k} \times \mathbb{RP}^{n-k}$, переставляющей координаты. Построенное пространство является открытым многообразием.

Определим пространство $\bar{\Gamma}_0$ как сферическое раздутие пространства $\mathbb{RP}^{n-k} \times \mathbb{RP}^{n-k} \setminus \Sigma_{diag}$ в окрестности диагонали. Сферическим раздутием называется многообразие с краем, которое определено в результате компактификации открытого многообразия $\mathbb{RP}^{n-k} \times \mathbb{RP}^{n-k} \setminus \Sigma_{diag}$ посредством послойного вклеивания слоев сферизации $ST\Sigma_{diag}$ касательного расслоения $T\Sigma_{diag}$ в окрестности нулей слоев нормального расслоения диагонали $\Sigma_{diag} \subset \mathbb{RP}^{n-k} \times \mathbb{RP}^{n-k}$. Определены естественные включения:

$$\mathbb{RP}^{n-k} \times \mathbb{RP}^{n-k} \setminus \Sigma_{diag} \subset \bar{\Gamma}_0,$$

$$ST\Sigma_{diag} \subset \bar{\Gamma}_0.$$

На пространстве $\bar{\Gamma}_0$ определена свободная инволюция $\bar{T}' : \bar{\Gamma}_0 \to \bar{\Gamma}_0$, которая определена как продолжение инволюции T'. Факторпространство $\bar{\Gamma}_0/\bar{T}'$ обозначается через Γ_0, а соответствующее двулистное накрытие через

$$p_{\Gamma_0} : \bar{\Gamma}_0/\bar{T}' \to \Gamma_0.$$

Пространство Γ_0 является многообразием с краем и оно называется пространством раздутия конфигурационного пространства (25). Определена проекция $p_{\partial\Gamma_0} : \partial\Gamma_0 \to \mathbb{RP}^{n-k}$, это отображение отображение называется разрешением диагонали.

Для произвольного отображения d определено пространство $N(d)$ точек самопересечения отображения d по формуле:

$$N(d) = Cl\{([x,y]) \in int(\Gamma_0) : y \neq x, d(y) = d(x)\}. \qquad (26)$$

По теореме Портеуса [Por] в предположении о том, что отображение d общего положения, пространство $N(d)$ является многообразием с краем размерности $n - 2k$. Это многообразие обозначим через $N^{n-2k}(d)$ и назовем многообразием точек самопересечения отображения d. При этом формула (26) определяет вложение многообразий с краем:

$$i_{N(d)} : (N^{n-2k}(d), \partial N^{n-2k}(d)) \subset (\Gamma_0, \partial\Gamma_0).$$

Край $\partial N^{n-2k}(d)$ многообразия $N^{n-2k}(d)$ называется многообразием разрешений критических точек отображения d. Отображение $p_{\partial\Gamma_0} \circ$

$i_{\partial N(d)}|_{\partial N(d)} : \partial N^{n-2k}(d) \subset \partial\bar{\Gamma}_0 \to \mathbb{RP}^{n-k}$ называется отображением разрешения особенностей отображения d, обозначим это отображение через $res_d : \partial N(d) \to \mathbb{RP}^{n-k}$. Определено каноническое двулистное накрытие

$$p_{N(d)} : \bar{N}(d)^{n-2k} \to N(d)^{n-2k}, \qquad (27)$$

разветвленное над краем $\partial N(d)^{n-2k}$ (над этим краем накрытие является диффеоморфизмом). При этом следующая диаграмма является коммутативной:

$$\begin{array}{ccc}
i_{\bar{N}(d)} : (\bar{N}^{n-2k}(d), \partial N^{n-2k}(d)) & \subset & (\bar{\Gamma}_0, \partial\Gamma_0) \\
\downarrow p_{N(d)} & & \downarrow p_{\Gamma_0} \\
i_{N(d)} : (N^{n-2k}(d), \partial N^{n-2k}(d)) & \subset & (\Gamma_0, \partial\Gamma_0).
\end{array}$$

Определение структурного отображения $\eta_N : N^{n-k}(d) \to K(\mathbf{D}_4, 1)$

Определим отображение $\eta_{\Gamma_0} : \Gamma_0 \to K(\mathbf{D}_4, 1)$, которое назовем структурным отображением "взрезанного квадрата". Заметим, что включение $\bar{\Gamma}_0 \subset \mathbb{RP}^{n-k} \times \mathbb{RP}^{n-k}$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп, т.к. коразмерность диагонали $\Delta_{\mathbb{RP}^{n-k}} \subset \mathbb{RP}^{n-k} \times \mathbb{RP}^{n-k}$ равна $n-k \ge 3$. Следовательно, справедливо равенство

$$\pi_1(\bar{\Gamma}_0) = H_1(\bar{\Gamma}_0; \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2. \qquad (28)$$

Рассмотрим индуцированный автоморфизм $T'_* : H_1(\bar{\Gamma}_0; \mathbb{Z}/2) \to H_1(\bar{\Gamma}_0; \mathbb{Z}/2)$. Заметим, что этот автоморфизм не является тождественным. Зафиксируем изоморфизм групп $H_1(\bar{\Gamma}_0; \mathbb{Z}/2)$ и $\mathbf{I}_c$, при котором образующая первого (соответственно, второго) слагаемого группы $H_1(\bar{\Gamma}_0; \mathbb{Z}/2)$ (см. (28)) переходит в образующую $ab \in \mathbf{I}_c \subset \mathbf{D}_4$ (соответственно, $ba \in \mathbf{I}_c \subset \mathbf{D}_4$), которая в стандартном представлении $\mathbf{D}_4$ определена преобразованием симметрии относительно второй (соответственно, первой) координатной оси.

Легко проверить, что автоморфизм внешнего сопряжения подгруппы $\mathbf{I}_c \subset \mathbf{D}_4$ на элемент $b \in \mathbf{D}_4 \setminus \mathbf{I}_c$ (в этой формуле элемент b можно выбрать произвольным), определенный формулой $x \mapsto bxb^{-1}$ переходит при построенном изоморфизме в автоморфизм T'_*. Фундаментальная группа $\pi_1(\Gamma_0)$ является квадратичным расширением группы $\pi_1(\bar{\Gamma}_0)$ посредством элемента b, и это расширение однозначно с точностью до изоморфизма определяется автоморфизмом T'_*. Поэтому $\pi_1(\Gamma_0) \simeq \mathbf{D}_4$ и, значит, определено отображение $\eta_{\Gamma_0} : \Gamma_0 \to K(\mathbf{D}_4, 1)$.

Нетрудно проверить, что отображение $\eta_{\Gamma_0}|_{\partial\Gamma_0}$ принимает значения в подпространстве $K(\mathbf{I}_b, 1) \subset K(\mathbf{D}_4, 1)$. Отображение η_{Γ_0} индуцирует отображение $\eta_N : (N(d), \partial N(d)) \to (K(\mathbf{D}_4, 1), K(\mathbf{I}_b, 1))$, которое назовем структурным отображением. Также нетрудно проверить, что гомотопический класс композиции $\partial N(d) \xrightarrow{\eta} K(\mathbf{I}_b, 1) \xrightarrow{p_b} K(\mathbf{I}_d, 1)$ совпадает с характеристическим отображением $\kappa \circ res_d : \partial N(d) \to \mathbb{RP}^{n-k} \to K(\mathbf{I}_d, 1)$, которое является композиции отображения разрешения особенностей $res_d : \partial N(d)^{n-2k} \to \mathbb{RP}^{n-k}$ и вложения остова $\mathbb{RP}^{n-k} \subset K(\mathbf{I}_d, 1)$ в классифицирующее пространство.

Определение циклической структуры для отображения $d : \mathbb{RP}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ с особенностью

Пусть $d : \mathbb{RP}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$– кусочно-линейное отображение общего положения, вообще говоря, имеющее критические точки, $k \equiv 0 \pmod 2$. Пусть многообразие $N^{n-2k}(d)$, вообще говоря, с непустым краем $\partial N^{n-2k}(d)$, служит многообразием точек самопересечения отображения d. Отображение $\mu_{a,N(d)} : (N^{n-2k}(d), \partial N^{n-2k}(d)) \to (K(\mathbf{I}_a, 1), K(\mathbf{I}_d, 1))$ называется циклической структурой отображения d, если $\mu_{a,N(d)}$ удовлетворяет краевому условию:

$$\mu_{a,N(d)}|_{\partial N^{n-2k}(d)} = (i_a \circ \kappa)|_{\partial N(d)}, \tag{29}$$

где $\kappa : \mathbb{RP}^{n-k} \to K(\mathbf{I}_d, 1)$ – классифицирующее отображение для образующего класса когомологий, $i_a : K(\mathbf{I}_d, 1) \subset K(\mathbf{I}_a, 1)$ – отображение классифицирующих пространств, индуцированное включением подгрупп $i_{d,a} : \mathbf{I}_d \subset \mathbf{I}_a$, и, кроме того, выполнено условие

$$\langle \mu^*_{a,N(d)}(t); [N^{n-2k}(d), \partial N^{n-2k}(d)] \rangle = 1, \tag{30}$$

где $t \in H^{n-2k}(K(\mathbf{I}_a, 1), K(\mathbf{I}_d, 1); \mathbb{Z}/2)$ – произвольный класс когомологий, который переходит в образующий класс когомологий в группе $H^{n-2k}(K(\mathbf{I}_a, 1); \mathbb{Z}/2)$ при индуцированном гомоморфизме $j^* : H^{n-2k}(K(\mathbf{I}_a, 1), K(\mathbf{I}_d, 1); \mathbb{Z}/2) \to H^{n-2k}(K(\mathbf{I}_a, 1); \mathbb{Z}/2)$, $[N^{n-2k}(d), \partial N^{n-2k}(d)]$ – относительный фундаментальный цикл многообразия.

Пусть $c : S^{n-2k}/\mathbf{i} \to \mathbb{R}^n$ является гладким отображением общего положения.

Рассмотрим конфигурационное пространство

$$(S^{n-2k}/\mathbf{i} \times S^{n-2k}/\mathbf{i} \setminus \Delta_{S^{n-2k}})/T', \tag{31}$$

которое также называется "взрезанный квадрат" линзового пространства $S^{n-2k}/\mathbf{i}$. Это пространство получено путем факторизации прямого произведения без диагонали по инволюции $T' : S^{n-2k}/\mathbf{i} \times S^{n-2k}/\mathbf{i} \to S^{n-2k}/\mathbf{i} \times S^{n-2k}/\mathbf{i}$, переставляющей координаты. Построенное пространство является открытым многообразием.

Определим пространство $\bar{\Gamma}_1$ как сферическое раздутие пространства $S^{n-2k}/\mathbf{i} \times S^{n-2k}/\mathbf{i} \setminus \Delta_{S^{n-2k}}$ в окрестности диагонали. Сферическим раздутием называется многообразие с краем, которое определено в результате компактификации открытого многообразия $S^{n-2k}/\mathbf{i} \times S^{n-2k}/\mathbf{i} \setminus \Sigma_{diag}$ посредством послойного вклеивания слоев сферизации $ST\Sigma_{diag}$ касательного расслоения $T\Sigma_{diag}$ в окрестности нулей слоев нормального расслоения диагонали $\Sigma_{diag} \subset S^{n-2k} \times S^{n-2k}$. Определены естественные включения:

$$S^{n-2k} \times S^{n-2k} \setminus \Sigma_{diag} \subset \bar{\Gamma}_1,$$

$$ST\Sigma_{diag} \subset \bar{\Gamma}_1.$$

На пространстве $\bar{\Gamma}_1$ определена свободная инволюция $\bar{T}' : \bar{\Gamma}_1 \to \bar{\Gamma}_1$, которая определена как продолжение инволюции T'. Факторпространство $\bar{\Gamma}_1/\bar{T}'$ обозначается через Γ_1, а соответствующее двулистное накрытие через

$$p_{\Gamma_1} : \bar{\Gamma}_1/\bar{T}' \to \Gamma_1.$$

Пространство Γ_1 является многообразием с краем и оно называется пространством раздутия конфигурационного пространства (31). Определена проекция $p_{\partial\Gamma_1} : \partial\Gamma_1 \to S^{n-2k}/\mathbf{i}$, это отображение отображение называется разрешением диагонали.

Для произвольного отображения c определено пространство $L(c)$ точек самопересечения отображения c по формуле:

$$L(c) = Cl\{([x,y]) \in int(\Gamma_1) : y \neq x, c(y) = c(x)\}. \tag{32}$$

По теореме Портеуса [Por] в предположении о том, что отображение c общего положения, пространство $L(c)$ является многообразием с краем размерности $n - 4k$. Это многообразие обозначим через $L^{n-4k}(c)$ и назовем многообразием точек самопересечения отображения c. При этом формула (32) определяет вложение многообразий с краем:

$$i_{L(c)} : (L^{n-4k}(c), \partial L^{n-4k}(c)) \subset (\Gamma_1, \partial\Gamma_1).$$

Край $\partial L^{n-4k}(c)$ многообразия $L^{n-4k}(c)$ называется многообразием разрешений критических точек отображения c. Отображение $p_{\partial\Gamma_1} \circ i_{\partial L(c)}|_{\partial L(c)} : \partial L^{n-4k}(c) \subset \partial\bar{\Gamma}_1 \to S^{n-2k}/\mathbf{i}$ называется отображением разрешения особенностей отображения c, обозначим это отображение через $res_{L(c)} : \partial L(c) \to S^{n-2k}/\mathbf{i}$. Определено каноническое двулистное накрытие

$$p_{L(c)} : \bar{L}(c)^{n-4k} \to L(c)^{n-4k}, \tag{33}$$

разветвленное над краем $\partial L(c)^{n-4k}$; над этим краем накрытие является диффеоморфизмом. При этом следующая диаграмма является коммутативной:

$$\begin{array}{ccc}
i_{\bar{L}(c)} : (\bar{L}^{n-4k}(c), \partial L^{n-4k}(c)) & \subset & (\bar{\Gamma}_1, \partial\Gamma_1) \\
\downarrow p_{L(c)} & & \downarrow p_{\Gamma_1} \\
i_{L(c)} : (L^{n-4k}(c), \partial L^{n-4k}(c)) & \subset & (\Gamma_1, \partial\Gamma_1).
\end{array}$$

Определение подгруппы $\mathbf{H} \subset \mathbb{Z}/2^{[3]}$

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^4$ с базисом $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$. Вектора базиса удобно отождествить с базисными единичными кватернионами $(\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, что иногда будет использоваться, т.к. позволит упростить формулы некоторых преобразований. Определим подгруппу

$$\mathbf{H} \subset \mathbb{Z}/2^{[3]} \tag{34}$$

как подгруппу преобразований, преобразований следующих двух типов:

– в каждой плоскости $(\mathbf{e}_1 = \mathbf{1}, \mathbf{e}_2 = \mathbf{i})$, $(\mathbf{e}_3 = \mathbf{j}, \mathbf{e}_4 = \mathbf{k})$ допускается (взаимно независимые) преобразования, кратные умножению на кватернион $\mathbf{i}$. Подгруппу всех таких преобразований обозначим через $\mathbf{H}_c$, это подгруппа изоморфна $\mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/4$.

– преобразование, переставляющее между собой одновременно пару базисных векторов $\mathbf{e}_1 = \mathbf{1}$ и $\mathbf{e}_3 = \mathbf{j}$ и пару базисных векторов $\mathbf{e}_2 = \mathbf{i}$ и $\mathbf{e}_4 = \mathbf{k}$, сохраняя их направления. Обозначим это преобразование через $t \in \mathbf{H}_c$.

Легко проверить, что сама группа $\mathbf{H}$ имеет порядок 32 и является подгруппой $\mathbf{H} \subset \mathbb{Z}/2^{[3]}$ индекса 4.

Определение подгруппы $\mathbf{H}_b \subset \mathbf{H}$ и мономорфизма $i_{\mathbf{I}_a,\mathbf{H}} : \mathbf{I}_a \subset \mathbf{H}$.

Определим гомоморфизм включения $i_{\mathbf{I}_a,\mathbf{H}} : \mathbf{I}_a \subset \mathbf{H}$, который переводит образующую группы $\mathbf{I}_a$ в преобразование умножения на кватернион $\mathbf{i}$, действующее одновременно в каждой плоскости $(\mathbf{e}_1 = \mathbf{1}, \mathbf{e}_2 = \mathbf{i})$, $(\mathbf{e}_3 = \mathbf{j}, \mathbf{e}_4 = \mathbf{k})$. Определим подгруппу $\mathbf{H}_b \subset \mathbf{H}$ как сумму подгруппы $i_{\mathbf{I}_a,\mathbf{H}} : \mathbf{I}_a \subset \mathbf{H}$ и подгруппы, порожденной образующей $t \in \mathbf{H}$. Легко проверить, что сама группа $\mathbf{H}_b$ имеет порядок 16 и изоморфна группе $\mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2$. Подгруппа $\mathbf{H}_b \subset \mathbf{H}$ имеет индекс 2. Определены также гомоморфизм включения $i_{\mathbf{I}_a,\mathbf{H}_b} : \mathbf{I}_a \subset \mathbf{H}_b$ подгрупп и гомоморфизм проекции $p_{\mathbf{H}_b,\mathbf{I}_a} : \mathbf{H}_b \to \mathbf{I}_a$, такие, что гомоморфизм композиции $\mathbf{I}_a \stackrel{i_{\mathbf{I}_a,\mathbf{H}_b}}{\longrightarrow} \mathbf{H}_b \stackrel{p_{\mathbf{H}_a,\mathbf{I}_a}}{\longrightarrow} \mathbf{I}_a$ является тождественным.

Определение структурного отображения $\zeta : L^{n-4k}(c) \to K(\mathbf{H}, 1)$

Определим отображение $\zeta_{\Gamma_1} : \Gamma_1 \to K(\mathbf{H}, 1)$, которое назовем структурным отображением "взрезанного квадрата". Заметим, что включение $\bar{\Gamma}_1 \subset S^{n-2k}/\mathbf{i} \times S^{n-2k}/\mathbf{i}$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп, т.к. коразмерность диагонали $\Delta_{S^{n-2k}/\mathbf{i}} \subset S^{n-2k}/\mathbf{i} \times S^{n-2k}/\mathbf{i}$ равна $n - 2k \geq 3$. Справедливо равенство:

$$\pi_1(\bar{\Gamma}_1) = H_1(\bar{\Gamma}_1; \mathbb{Z}/4) = \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/4. \qquad (35)$$

Рассмотрим индуцированный автоморфизм $T'_* : H_1(\bar{\Gamma}_1; \mathbb{Z}/4) \to H_1(\bar{\Gamma}_1; \mathbb{Z}/4)$. Заметим, что этот автоморфизм не является тождественным. Зафиксируем мономорфизм групп $H_1(\bar{\Gamma}_1; \mathbb{Z}/4)$ в группу $\mathbf{H}_c$, при котором образующая первого (соответственно, второго) слагаемого группы $H_1(\bar{\Gamma}_1; \mathbb{Z}/2)$ (см. (35)) переходит в образующую, которая в стандартном представлении подгруппы $\mathbf{H}_c \subset \mathbf{H} \subset \mathbb{Z}/2^{[3]}$ определена умножением на кватернион $\mathbf{i}$ в двумерной плоскости $(\mathbf{1}, \mathbf{i})$ (соответственно, в плоскости $(\mathbf{j}, \mathbf{k})$) и неподвижно в дополнительной плоскости.

Легко проверить, что автоморфизм внешнего сопряжения подгруппы $\mathbf{H}_c \subset \mathbf{H}$ на произвольный элемент $b \in \mathbf{H} \setminus \mathbf{H}_c$, определенный формулой $x \mapsto bxb^{-1}$, переходит при построенном изоморфизме 35 в автоморфизм T'_*. Фундаментальная группа $\pi_1(\Gamma_1)$ является квадратичным расширением группы $\pi_1(\bar{\Gamma}_1)$ посредством элемента b, и это расширение однозначно с точностью до изоморфизма определяется автоморфизмом T'_*. Поэтому $\pi_1(\Gamma_1) \simeq \mathbf{H}$ и, значит, определено отображение $\zeta_{\Gamma_1} : \Gamma_1 \to K(\mathbf{H}, 1)$.

Нетрудно проверить, что отображение $\zeta_{\Gamma_1}|_{\partial\Gamma_1}$ принимает значения в подпространстве $K(\mathbf{H}_b, 1) \subset K(\mathbf{H}, 1)$. Отображение ζ_{Γ_1} индуцирует отображение $\zeta : (L^{n-4k}(c), \partial L^{n-4k}(c)) \to (K(\mathbf{H}, 1), K(\mathbf{H}_b, 1))$, которое назовем структурным отображением. Также нетрудно проверить, что гомотопический класс композиции $\partial L^{n-4k}(c) \stackrel{\zeta}{\longrightarrow} K(\mathbf{H}_b, 1) \stackrel{p_{\mathbf{H}_b,\mathbf{I}_d}}{\longrightarrow} K(\mathbf{I}_a, 1)$ совпадает с отображением $\eta \circ res_c : \partial L^{n-4k}(c) \to S^{n-2k}/\mathbf{i} \to K(\mathbf{I}_a, 1)$, которое определяется как композиция отображения разрешения особенностей $res_c : \partial L(c)^{n-2k} \to S^{n-2k}/\mathbf{i}$ и вложения остова $\eta : S^{n-2k}/i \subset K(\mathbf{I}_a, 1)$ в классифицирующее пространство.

Определение кватернионной структуры для отображения $c : S^{n-2k}/\mathbf{i} \to \mathbb{R}^n$ с особенностью

Пусть $c : S^{n-2k}/\mathbf{i} \to \mathbb{R}^n$– кусочно-линейное отображение общего положения, вообще говоря, имеющее критические точки, $k \equiv 0 \pmod 2$. Пусть многообразие $L^{n-4k}(c)$, вообще говоря, с непустым краем $\partial L^{n-4k}(c)$ является многообразием точек самопересечения отображения c. Отображение $\lambda_{a,L(c)} : (L^{n-4k}(c), \partial L^{n-4k}(c)) \to (K(\mathbf{H}, 1), K(\mathbf{H}_b, 1))$ называется циклической структурой отображения c, если $\lambda_{a,L(c)}$ удовлетворяет краевому условию:

$$\lambda_{a,L(c)}|_{\partial L^{n-4k}(c)} = (i_{\mathbf{H}_b,\mathbf{I}_a} \circ \lambda_{a,L(c)})|_{\partial L^{n-4k}(c)}, \tag{36}$$

где $\eta : S^{n-2k} \to K(\mathbf{I}_a, 1)$ – характеристическое отображение образующего класса когомологий (включение остова в классифицирующее пространство), $i_{\mathbf{I}_a,\mathbf{H}_b} : K(\mathbf{I}_a, 1) \subset K(\mathbf{H}_b, 1)$– отображение классифицирующих пространств, индуцированное гомоморфизмом включения $i_{\mathbf{I}_a,\mathbf{H}_b} : \mathbf{I}_a \subset \mathbf{H}_b$ и, кроме того, выполнено условие:

$$\langle \lambda^*_{a,L(c)}(t); [L^{n-4k}(c), \partial L^{n-4k}(c)] \rangle = 1, \tag{37}$$

где $t \in H^{n-4k}(K(\mathbf{Q}_a, 1), K(\mathbf{I}_a, 1); \mathbb{Z}/2)$ – произвольный класс когомологий, который переходит в образующий класс когомологий в группе $H^{n-4k}(K(\mathbf{Q}_a, 1); \mathbb{Z}/2)$ при индуцированном гомоморфизме $j^* : H^{n-4k}(K(\mathbf{Q}_a, 1), K(\mathbf{I}_a, 1); \mathbb{Z}/2) \to H^{n-4k}(K(\mathbf{Q}_a, 1); \mathbb{Z}/2)$, $[L^{n-4k}(c), \partial L^{n-4k}(c)]$ – относительный фундаментальный цикл многообразия.

Следующие две леммы необходимы для проверки корректности определений циклической и кватернионной структуры.

Лемма 18. *Характеристическое число, определенное левой частью формулы* (30)*, не зависит от выбора класса когомологий* $t \in H^{n-2k}(K(\mathbf{I}_a,1),K(\mathbf{I}_d,1);\mathbb{Z}/2)$*, для которого* $j^*(t) \in H^{n-2k}(K(\mathbf{I}_a,1);\mathbb{Z}/2)$ *является образующим классом.*

Лемма 19. *Характеристическое число, определенное левой частью формулы* (37)*, не зависит от выбора класса когомологий* $t \in H^{n-4k}(K(\mathbf{Q}_a,1),K(\mathbf{I}_a,1);\mathbb{Z}/2)$*, для которого* $j^*(t) \in H^{n-4k}(K(\mathbf{Q}_a,1);\mathbb{Z}/2)$ *является образующим классом.*

Доказательство Леммы 18

Действительно, при другом выборе t' получим, что $t - t' \in \mathrm{Im}\delta^* : H^{n-2k-1}(K(\mathbf{I}_d,1);\mathbb{Z}/2) \to H^{n-2k}(K(\mathbf{I}_a,1),K(\mathbf{I}_d,1);\mathbb{Z}/2))$. Следовательно, класс $\mu^*_{a,N(d)}(t) - \mu^*_{a,N(d)}(t') \in H^{n-2k}(N^{n-2k}(d),\partial N^{n-2k}(d);\mathbb{Z}/2))$ получен в результате применения кограничного гомоморфизма $\delta^* : H^{n-2k-1}(\partial N^{n-2k}(d);\mathbb{Z}/2) \to H^{n-2k}(N^{n-2k}(d),\partial N^{n-2k}(d);\mathbb{Z}/2)$ к некоторому элементу $x = \mu^*_a(q)$, где $q \in H^{n-2k-1}(K(\mathbf{I}_d,1);\mathbb{Z}/2)$ – образующий класс когомологий. Теперь заметим, что гомоморфизм

$$(\mu_{a,N(d)}|_{\partial N(d)})^* : H^{n-2k-1}(K(\mathbf{I}_d,1);\mathbb{Z}/2) \to H^{n-2k-1}(\partial N^{n-2k}(d);\mathbb{Z}/2)$$

является тривиальным. Для этого докажем, что подмногообразие $\partial N^{n-2k}(d) \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k}$ представляет нулевой гомологический класс. Исходя из геометрического смысла характеристических классов Штифеля-Уитни (см. [M-S], параграф 12), класс $[\partial N^{n-2k}(d)] \in H_{n-2k-1}(\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k};\mathbb{Z}/2)$ двойственнен в смысле Пуанкаре характеристическому классу $\bar{w}_{k+1}(\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k})$ Штифеля-Уитни нормального расслоения над $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k}$, поскольку является классом гомологий, препятствующим к построению редукции стабильного нормального расслоения этого многообразия до нормального расслоения размерности k. Вспомним, что $n = 2^l - 1$, поэтому самый старший характеристический класс $\bar{w}_*(\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k})$ (нормального расслоения) имеет размерность k и $\bar{w}_{k+1}(\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k}) = 0$ (Например, в простейшем случае $n = 4$, $k = 1$ получим $\bar{w}_2(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) = 0$.) Лемма 18 доказана.

Доказательство Леммы 19 аналогично и опускается.

Пусть $d : \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ – кусочно-линейное отображение общего положения, $(N^{n-2k}(d),\partial N^{n-2k}(d))$ – многообразие с краем двойных точек самопересечения отображения d. Пусть заданно отображение $\mu_{a,N(d)} : (N^{n-2k}(d), \partial N^{n-2k}(d)) \to (K(\mathbf{I}_a,1), K(\mathbf{I}_d,1))$, удовлетворяющее граничному условию (29). Нам потребуется критерий проверки того, что отображение $\mu_{a,N(d)}$ удовлетворяет условию (30).

Рассмотрим двулистное накрытие

$$p_a : \bar{N}_a^{n-2k}(d) \to N^{n-2k}(d), \tag{38}$$

индуцированное из универсального двулистного накрытия

$$K(\mathbf{I}_d,1) \to K(\mathbf{I}_a,1) \tag{39}$$

классифицирующих пространств отображением $\mu_{a,N(d)} : N^{n-2k}(d) \to K(\mathbf{I}_a,1)$. Поскольку выполнено граничное условие (29), ограничение накрытия (38) на край $\partial N^{n-2k}(d)$ оказывается тривиальным двулистным накрытием. Заметим, что в случае, когда структурное отображение $\eta : N^{n-2k}(d) \to K(\mathbf{D}_4,1)$ является циклическим, накрытие (38) совпадает с каноническим двулистным накрытием, определенным формулой (27).

Рассмотрим отображение $\bar{\mu}_{a,N(d)} : \bar{N}^{n-2k}(d)_a \to K(\mathbf{I}_d,1)$ накрывающих пространств, которое двулистно накрывает отображение $\mu_{a,N(d)} : N^{n-2k}(d) \to K(\mathbf{I}_a,1)$ при двулистных накрытиях (38), (39) над прообразом и образом отображения $\mu_{a,N(d)}$. Определим замкнутое многообразие $\bar{R}^{n-2k}$ как результат подклейки к многообразию $\bar{N}^{n-2k}(d)_a$ цилиндра C^{n-2k} двулистного накрытия $\partial\bar{N}^{n-2k}(d)_a \to \partial N^{n-2k}(d)$ вдоль общего края $\partial\bar{N}^{n-2k}(d)_a = \partial C^{n-2k}$. Определим отображение $\mu_{\bar{R}} : \bar{R}^{n-2k} \to K(\mathbf{I}_d,1)$ как результат склейки отображения $\bar{\mu}_a : \bar{N}^{n-2k}(d)_a \to K(\mathbf{I}_d,1)$ с отображением

$$C^{n-2k} \stackrel{p_C}{\longrightarrow} \partial\bar{N}^{n-2k}(d)_a \stackrel{\mu_a|_{\partial\bar{N}^{n-2k}(d)_a}}{\longrightarrow} K(\mathbf{I}_d,1),$$

где $p_C : C^{n-2k} \to \partial N^{n-2k}(d)_a$ – проекция цилиндра на основание. Фундаментальный цикл многообразия $\bar{R}^{n-2k}$ обозначим через $[\bar{R}]$.

Лемма 20. *Для отображения* $\mu_{a,N(d)} : (N^{n-2k}(d), \partial N^{n-2k}(d)) \to (K(\mathbf{I}_a,1), K(\mathbf{I}_d,1))$ *равенство* (30) *эквивалентно тому, класс гомологий*

$$\mu_{\bar{R},*}([\bar{R}^{n-2k}]) \in H_{n-2k}(K(\mathbf{I}_d,1);\mathbb{Z}/2)$$

является образующим.

Доказательство Леммы 20

Из граничного условия (29) вытекает, что класс гомологий $\mu_{a,N(d);*}([\partial N^{n-2k}(d)])$ в группе $H_{n-2k-1}(K(\mathbf{I}_d,1);\mathbb{Z}/2)$ равен нулю (см. эквивалентное утверждение для классов когомологий в Лемме 18). Пусть W^{n-2k} многообразие с краем $\partial W^{n-2k} = \partial N^{n-2k}(d)$. Обозначим через

$$\varphi : W^{n-2k} \to K(\mathbf{I}_d,1) \tag{40}$$

сингулярный относительный цикл, осуществляющий гомологию нулю сингулярного цикла $\varphi|_{\partial W^{n-2k}} = \mu_{a,N(d)}|_{\partial N^{n-2k}(d)}$ в подпространстве $K(\mathbf{I}_d,1) \subset K(\mathbf{I}_a,1)$.

Образ фундаментального класса при отображении $(\mu_{a,N(d)} \cup_\partial \varphi) : N^{n-2k}(d) \cup_\partial W^{n-2k} \to K(\mathbf{I}_a,1)$ обозначим через $x \in H_{n-2k}(K(\mathbf{I}_a,1);\mathbb{Z}/2)$. Очевидно, что при любом выборе относительного цикла (40) условие (30), переформулированное для соответствующих абсолютных классов гомологий, состоит в том, что класс гомологий $x \in H_{n-2k}(K(\mathbf{I}_a,1);\mathbb{Z}/2)$ является образующим.

Рассмотрим двулистное накрытие $\bar{\mu}_{a,N(d)} \cup_\partial \bar{\varphi} : \bar{N}^{n-2k}(d)_a \cup_\partial \bar{W}^{n-2k} \to K(\mathbf{I}_d,1)$ над отображением $\mu_{a,N(d)} \cup_\partial \varphi$, индуцированное из накрытия $K(\mathbf{I}_d,1) \to K(\mathbf{I}_a,1)$ над пространством-образом отображения $\mu_{a,N(d)} \cup_\partial \varphi$. Образ фундаментального класса при этом отображении обозначим через $\bar{x} \in H_{n-2k}(K(\mathbf{I}_d,1);\mathbb{Z}/2)$. Элемент $\bar{x}$ является образующей, тогда и только тогда, когда x является образующей.

С другой стороны, класс гомологий $\bar{x}$ представлен образом фундаментального класса при отображении $\mu_{\bar{R}} : \bar{R}^{n-2k} \to K(\mathbf{I}_d,1)$. Лемма 20 доказана.

Пусть $c : S^{n-2k}/\mathbf{i} \to \mathbb{R}^n$ – кусочно-линейное отображение общего положения, $(L^{n-4k}(c), \partial L^{n-4k}(c))$ – многообразие с краем двойных точек самопересечения отображения c. Пусть заданно отображение $\lambda_{a,L(c)} : (L^{n-4k}(c), \partial L^{n-4k}(c)) \to (K(\mathbf{Q}_a,1), K(\mathbf{I}_a,1))$, удовлетворяющее граничному условию (36). Нам потребуется критерий проверки того, что отображение $\lambda_{a,L(c)}$ удовлетворяет уравнению (37).

Рассмотрим двулистное накрытие

$$p_a : \bar{L}_a^{n-4k}(c) \to L^{n-4k}(c), \tag{41}$$

индуцированное из универсального двулистного накрытия

$$K(\mathbf{I}_a,1) \to K(\mathbf{Q}_a,1) \tag{42}$$

классифицирующих пространств отображением $\lambda_{a,L(c)} : L^{n-4k}(c) \to K(\mathbf{Q}_a, 1)$. Поскольку выполнено граничное условие (29), ограничение накрытия (41) на край $\partial L^{n-4k}(c)$ оказывается тривиальным двулистным накрытием. Заметим, что в случае, когда структурное отображение $\zeta : L^{n-4k}(c) \to K(\mathbb{Z}/2^{[3]}, 1)$ является циклическим, накрытие (41) совпадает с каноническим двулистным накрытием, определенным формулой (33).

Рассмотрим отображение $\bar{\lambda}_{a,L(c)} : \bar{L}^{n-4k}(c)_a \to K(\mathbf{I}_a, 1)$ накрывающих пространств, которое двулистно накрывает отображение $\lambda_{a,L(c)} : L^{n-4k}(c) \to K(\mathbf{Q}_a, 1)$ при двулистных накрытиях (41), (42) над прообразом и образом отображения $\lambda_{a,L(c)}$. Определим замкнутое многообразие $\bar{R}^{n-4k}$ как результат подклейки к многообразию $\bar{L}^{n-4k}(c)_a$ цилиндра C^{n-4k} двулистного накрытия $\partial \bar{L}^{n-4k}(c)_a \to \partial L^{n-4k}(c)$ вдоль общего края $\partial \bar{L}^{n-4k}(c)_a = \partial C^{n-4k}$. Определим отображение $\lambda_{\bar{R}} : \bar{R}^{n-4k} \to K(\mathbf{I}_d, 1)$ как результат склейки отображения $\bar{\lambda}_{a,L(c)} : \bar{L}^{n-4k}(c)_a \to K(\mathbf{I}_a, 1)$ с отображением

$$C^{n-4k} \xrightarrow{p_C} \partial \bar{L}^{n-4k}(c)_a \xrightarrow{\lambda_a|_{\partial \bar{L}^{n-4k}(c)_a}} K(\mathbf{I}_a, 1),$$

где $p_C : C^{n-4k} \to \partial L^{n-4k}(c)_a$ – проекция цилиндра на основание. Фундаментальный цикл многообразия $\bar{R}^{n-4k}$ обозначим через $[\bar{R}]$.

Лемма 21. *Для отображения* $\lambda_{a,L(c)} : (L^{n-4k}(c), \partial L^{n-4k}(c)) \to (K(\mathbf{Q}_a, 1), K(\mathbf{I}_a, 1))$ *равенство (37) эквивалентно тому, класс гомологий*

$$\lambda_{\bar{R},*}([\bar{R}]) \in H_{n-4k}(K(\mathbf{Q}_a, 1); \mathbb{Z}/2)$$

является образующим.

Доказательство Леммы 21 аналогично доказательству Леммы 20 и опускается.

Предложение 22. *При* $k \equiv 0 \pmod 2$, $k \geq 8$, *произвольный элемент группы* $Imm^{sf}(n-k, k)$ *представлен скошенно–оснащенным погружением* (f, κ, Ξ), *допускающим циклическую структуру в смысле Определения* 10.

Предложение 23. *При* $k \equiv 0 \pmod 2$, $10k - 1 > n$, $k \geq 8$, *произвольный элемент группы* $Imm^{\mathbf{D}_4}(n-2k, 2k)$, *лежащий в образе гомоморфизма* $\delta : Imm^{sf}(n-k, k) \to Imm^{\mathbf{D}_4}(n-2k, 2k)$, *представлен* $\mathbf{D}_4$*–оснащенным погружением* (g, η, Ψ), *допускающим кватернионную структуру в смысле Определения* 11.

Доказательство Предложений 22, 23 основывается на следствии следующего принципа плотности подпространства погружений в пространстве непрерывных отображений с компактно-открытой топологией, см. [Gr, предложение 1.2.2].

Предложение 24. *Пусть $f_0 : M \looparrowright N$ гладкое погружение между замкнутыми многообразиями, причем многообразие N снабжено метрикой b и $\dim(M) < \dim(N)$. Пусть $g : M \to N$ непрерывное отображение, гомотопное погружению f_0. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ найдется погружение $f : M \looparrowright N$, регулярно гомотопное погружению f_0, для которого $\mathrm{dist}(g; f)_{C^0} < \varepsilon$ в метрике пространства отображений, индуцированной метрикой b.*

Нам потребуется следующее следствие Предложения 24.

Следствие 25. *Пусть (f', κ, Ξ') – произвольное скошенно-оснащенное погружение, где $f' : M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$, представляющее элемент $[(f', \kappa, \Xi')] \in Imm^{sf}(n-k, k)$ и пусть $f_1 : M^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ – произвольное непрерывное отображение. Тогда для произвольного (сколь угодно малого) $\varepsilon > 0$ существует скошенно-оснащенное погружение (f, κ, Ξ), где $f : M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ – погружение того же многообразия, представляющая тот же элемент $[(f', \kappa, \Xi')] \in Imm^{sf}(n-k, k)$, причем выполнено условие*

$$\mathrm{dist}(f_1; f) < \varepsilon. \tag{43}$$

Доказательство Следствия 25

По предложению 24 существует погружение f, регулярно-гомотопное f' для которого выполнено условие (43). Регулярная гомотопия скошенно-оснащенного погружения продолжается до регулярной гомотопии в классе скошенно-оснащенных погружений. Поэтому f является скошенно-оснащенным и элементы $[(f', \kappa, \Xi')]$, $[(f, \kappa, \Xi)]$ равны. Следствие 25 доказано.

Нам также потребуется следующая лемма (Основная Лемма), доказательство которой проводится в разделе 3.

Лемма 26. *При $k \equiv 0 \pmod 2$, $k \geq 8$, существует кусочно-линейное отображение $d : \mathbb{RP}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ (с особенностью) общего положения, допускающее циклическую структуру.*

Вывод Предложения 22 из Леммы 26

Рассмотрим отображение $d : \mathbb{RP}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$, построенное в Лемме 26. Рассмотрим произвольный элемент группы $Imm^{sf}(n-k,k)$, представленный погружением $f' : M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ со скошенным оснащением (κ, Ξ'). Рассмотрим характеристический класс $\kappa : M^{n-k} \to \mathbb{RP}^{n-k}$ этого скошенного оснащения и рассмотрим отображение $f_1 : M^{n-k} \to \mathbb{R}^n$, определенное как композиция $f_1 = d \circ \kappa$. Обозначим через ε положительное число, много меньшее радиуса некоторой регулярной окрестности $U_{N(d)}$ полиэдра $N(d)$ (подмногообразия с особенностями) точек самопересечения отображения d. Обозначим через $g_{N(d)} : N(d) \looparrowright \mathbb{R}^n$ параметризующее погружение полиэдра точек самопересечения. Воспользуемся Следствием 25 и определим скошенно-оснащенное погружение $f : M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$, представляющее исходный элемент $[(f', \kappa, \Xi')]$ и при этом такое, что выполнено условие (43).

Рассмотрим многообразие N^{n-2k} точек самопересечения погружения f, определенное по формуле (2). Определено погружение $g : N^{n-2k} \looparrowright \mathbb{R}^n$. Многообразие N^{n-2k} представим в виде объединения двух подмногообразий $N^{n-2k} = N^{n-2k}_{cycl} \cup N^{n-2k}_{\mathbf{I}_b}$ по общей части границы $\partial N^{n-2k}_{cycl} = \partial N^{n-2k}_{\mathbf{I}_b}$. Все эти многообразия с краем определим далее.

Для простоты обозначений предположим, что радиус регулярной погруженной окрестности погружения многообразия с краем $N^{n-2k}(d)$ точек самопересечения отображения d (вдали от критических значений этого отображения т.е. края $\partial N^{n-2k}(d)$), радиус регулярной погруженной окрестности погружения, полученного ограничением отображения d вне регулярной окрестности критических точек и радиус самой регулярной вложенной окрестности критических значений отображения d равны ε. Обозначим указанные окрестности через $U_{N(d)}$ U_d, $U_{\partial N(d)}$ соответственно.

Определим N^{n-2k}_{cycl} как максимальное подмногообразие с краем, чтобы образ $g(N^{n-2k}_{cycl})$ лежал в регулярной погруженной ε-окрестности точек самопересечения отображения d. Это означает, что существует вложение $N^{n-2k}_{cycl} \subset U_{N(d)}$, которое при композиции с параметризующим погружением окрестности переходит в ограничение погружения многообразия самопересечения на это подмногообразие. Легко определить отображение $(N^{n-2k}_{cycl}, \partial N^{n-2k}_{cycl}) \to (N^{n-2k}(d), \partial N^{n-2k}(d))$, при котором прообраз каждой точки состоит из пары точек, образы которых при отображении κ ε-близки на $\mathbb{RP}^{n-k}$.

Определим $N^{n-2k}_{\mathbf{I}_b}$ как оставшуюся часть многообразия N^{n-2k}, образ которой при отображении g расположен в окрестности U_d (погруженной) множества регулярных значений отображения d (выше мы привели определение для аналогичного случая) или во вложенной окрестности

$U_{\partial N(d)}$.

Предположим, что погружение $g : N^{n-2k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ трансверсально вдоль $\partial U_{N(d)}$. Тогда общая граница $\partial N^{n-2k}_{cycl} = \partial N^{n-2k}_{\mathbf{I}_b}$ погружена в границу регулярной окрестности $U_{\partial N(d)}$.

Многообразие N^{n-2k} снабжено характеристическим отображением $\eta_N : N^{n-2k} \to K(\mathbf{D}_4, 1)$. Легко проверить, что характеристическое отображение η_N, ограниченное на подмногообразие $N^{n-2k}_{\mathbf{I}_b} \subset N^{n-2k}$, гомотопно отображению в подпространство $K(\mathbf{I}_b, 1) \subset K(\mathbf{D}_4, 1)$.

Структурное отображение $\eta_{N(d)} : N^{n-2k}(d) \to K(\mathbf{D}_4, 1)$ продолжается с $N^{n-2k}(d)$ до отображения $\eta_{U_{N(d)}} : U_{N(d} \to K(\mathbf{D}_4, 1)$. При этом ограничение $\eta_{U_{\partial N(d)}} : U_{\partial N(d)} \to K(\mathbf{D}_4, 1)$ гомотопно отображению в подпространство $K(\mathbf{I}_b, 1) \subset K(\mathbf{D}_4, 1)$.

Нетрудно проверить, что характеристическое отображение $\eta_N : N^{n-2k} \to K(\mathbf{D}_4, 1)$, ограниченное на подмногообразие N^{n-2k}_{cycl} определено как ограничение структурного отображения $\eta_{U_N(d)} : U_{N(d)} \to K(\mathbf{D}_4, 1)$, поскольку $g(N^{n-2k}_{cycl})$ лежит в $U_{N(d)}$.

По условию определена циклическая структура отображения d. Эта структура определена отображением $\mu_{a,N(d)} : (N^{n-2k}(d), \partial N^{n-2k}(d)) \to (K(\mathbf{I}_a, 1), K(\mathbf{I}_d, 1))$. Отображение $\mu_{a,N(d)}$ продолжается до отображения $\mu_{a,U_{N(d)}} : (U_{N(d)}, U_{\partial N(d)}) \to (K(\mathbf{I}_a, 1), K(\mathbf{I}_d, 1))$. При этом из условия (30) вытекает, что отображения $\mu_{a,U_{N(d)}}|_{U_{\partial N(d)}}$ и $\eta|_{U_{\partial N(d)}}$ гомотопны. Характеристическое отображение $\eta_{N(f)}|_{N_{cycl} \subset N(f)} : N^{n-2k}_{cycl} \to K(\mathbf{D}_4, 1)$ индуцировано структурным отображением $\eta_{U_{N(d)}}$ при включениии $N^{n-2k}_{cycl} \subset U_{N(d)}$. Следовательно, отображения $\mu_{N_{cycl}}$ и $\eta_{N_{\mathbf{I}_b}}$ можно склеить в одно отображение $\mu_a : N^{n-2k} \to K(\mathbf{I}_a, 1)$.

Докажем, что отображение μ_a определяет циклическую структуру для (f, κ, Ξ) в смысле Определения 10. Рассмотрим отображение многообразий с краем, которое определяется композицией включения и проекции регулярной окрестности на центральное подмногообразие: $F : (N_{cycl}, \partial N_{cycl}) \overset{g}{\subset} (U_{N(d)}, U_{\partial N(d)}) \longrightarrow (N^{n-2k}(d), \partial N^{n-2k}(d))$. Из элементарных геометрических соображений вытекает, что эта степень этого отображения совпадает со степенью отображения $\kappa : M^{n-k} \to \mathbb{RP}^{n-k}$ т.е. с $h(f, \Xi, \kappa)$. С другой стороны, характеристическое число $h_{\mu_a,k}$, посчитанное по формуле (23), вычисляется как степень $deg(F)$ отображения F. Доказательство вытекает из Леммы 20 и равенства (30).

Предложение 22 доказано.

Лемма 27. *При $k \equiv 0 \pmod 2$, $n < 10k - 1$, $k \geq 8$, существует кусочно-линейное отображение $: S^{n-2k}/\mathbf{i} \to \mathbb{R}^n$ (с особенностью) общего положения, допускающее кватернионную структуру.*

Доказательство Леммы (27) аналогично доказательству Леммы (26), оно также проводится в разделе 3.

Вывод Предложения 23 **из Леммы** 27

Рассмотрим скошенно-оснащенное погружение (f,κ,Ξ), такое, что $\delta([(f,\kappa,\Xi)]) = [(g_1 : N^{n-2k} \looparrowright \mathbb{R}^n, \eta, \Psi)]$ представляет данный элемент из группы $Imm^{\mathbf{D}_4}(n-2k,2k)$. По Предложению 22, не ограничивая общности, можно считать, что погружение $f : M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ допускает циклическую структуру. Рассмотрим отображение $c : S^{n-2k}/\mathbf{i} \to \mathbb{R}^n$, построенное в Лемме (27) и рассмотрим погружение $g : N^{n-2k} \looparrowright \mathbb{R}^n$, определенное в результате применения Предложения 22 к отображению композиции $c \circ \mu_a : N^{n-2k} \to S^{n-2k}/\mathbf{i} \to \mathbb{R}^n$.

Рассуждая по аналогии с доказательством Предложения 22, заключаем, что определена кватернионная структура $\mathbf{D}_4$–оснащенного погружения $[(g,\eta,\Psi)]$. Предложение 23 доказано.

Доказательство Теоремы 9

Рассмотрим скошенно-оснащенное погружение (f,κ,Ξ), такое, что $\delta([(f,\kappa,\Xi)]) = [(g : N^{n-2k} \looparrowright \mathbb{R}^n, \eta, \Psi)]$ представляет данный элемент из группы $Imm^{\mathbf{D}_4}(n-2k,2k)$. Воспользуемся Предложением 23 и представим элемент $[(g,\eta,\Psi)]$ $\mathbf{D}_4$–оснащенным погружением, допускающим кватернионную структуру.

Выберем натуральное значение k таким, что $n-4k=31$, $k \geq 8$, что возможно в предположении $n \geq 63$. Обозначим через L^{31} – многообразие самопересечения погружения g. Рассмотрим отображение $\lambda_a : L^{31} \to S^{31}/\mathbf{Q}_a$, которое задает кватернионную структуру для (g,η,Ψ) и построено в Предложении 23. Предположим, что λ_a является трансверсальным вдоль подмногообразия $S^7/\mathbf{Q}_a \subset S^{31}/\mathbf{Q}_a$. Рассмотрим в многообразии L^{31} подмногообразие $K^7 \subset L^{31}$, определенное по формуле $K^7 = \lambda_a^{-1}(S^7/i)$. Определим $\varphi = \lambda_a|_{K^7}$.

Докажем, что многообразие K^7 имеет нормальное расслоение $6\varphi^*\chi_+$. Расслоение χ_+ над $K(\mathbf{Q}_a,1)$ имеет размерность 4 и определено в начале раздела 4. Нормальное расслоение ν_L изоморфно расслоению $k\zeta^*\omega$, где $\omega : E(\omega) \to K(\mathbb{Z}/2^{[3]},1)$– каноническое 4-мерное расслоение, определенное в разделе 4 перед Предложением 42, $\zeta : L^{31} \to K(\mathbb{Z}/2^{[3]},1)$ – характеристическое отображение, классифицирующее нормальное расслоение многообразия L^{31}.

Легко проверить, что $k = \frac{n-1}{4} - 7$ и $k \equiv 0 \pmod 8$. По Предложению 42 заключаем, что расслоение $\nu_N|_K$ тривиально. Нормальное расслоение многообразия K^7 изоморфно сумме Уитни расслоений $6\varphi^*\chi \oplus \nu_N|_K$. Из-за тривиальности второго слагаемого получим требуемый изоморфизм $\nu_K = 6\varphi^*\chi$.

По размерностным соображениям, не ограничивая общности, образ отображения $\lambda_a|_K$ лежит в остове $S^7/\mathbf{Q}_a \subset S^{31}/\mathbf{Q}_a$. По Предложению 41 степень $\deg(\lambda_a|_K)$ четна. Поскольку $\deg(\varphi) = \deg(\lambda_a|_K) = \deg(\lambda_a) = h_a$ и $h_a = h(f,\kappa,\Xi)$, получим $h(f,\kappa,\Xi) = 0$. Теорема 9 доказана.

3 Основной этап доказательства

В этом разделе все отображения и многообразия предполагаются кусочно-линейными, если специально не оговорено условие гладкости.

Определение отображения $d : \mathbb{RP}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$

Обозначим через J_0 стандартную $(n-k)$–мерную сферу коразмерности k, $k \equiv 0 \pmod 8$, $k > 0$, которая получена в результате джойна $\frac{n-k+1}{2} = r_0$ копий окружности S^1. Обозначим стандартное вложение J_0 в $\mathbb{R}^n$ через $i_{J_0} : J_0 \subset \mathbb{R}^n$.

Определено отображение $p' : S^{n-k} \to J_0$, которое получается в результате взятия джойна r копий стандартных накрытий $S^1 \to S^1/\mathbf{i}$. Стандартное действие $\mathbb{Z}/4 \times S^{n-k} \to S^{n-k}$ коммутирует с отображением p'. Тем самым, определено отображение $\hat{p} : S^{n-k}/\mathbf{i} \to J_0$ и отображение $p : \mathbb{RP}^{n-k} \to J_0$ как композиция стандартного двулистного накрытия $\pi : \mathbb{RP}^{n-k} \to S^{n-k}/\mathbf{i}$ с отображением $\hat{p}$.

Рассмотрим композицию $i_{J_0} \circ \hat{p} : S^{n-k}/i \to J_0 \to \mathbb{R}^n$, которую мы обозначим через $\hat{g}$, и приведем это отображение в отображение $\hat{d}$ общего положения малой δ-деформацией $(i_{J_0} \circ \hat{p}) \to \hat{d}$ (какую именно деформацию и насколько малым следует выбирать положительное число δ, задащее калибр этой деформации, выяснится при доказательстве Леммы 30). Искомое отображение $d : \mathbb{RP}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ определим как гладкое отображение общего положения, полученное в результате C^0–деформации калибра δ', где $\delta' << \delta$, отображения, представленного композицией стандартного двулистного накрытия π и отображения $\hat{d}$. В Лемме 26 доказывается, что что для отображения d (с особенностью) существует циклическая структура.

Определение отображения $c : S^{n-2k}/\mathbf{i} \to \mathbb{R}^n$

Обозначим через J_1 $(n-2k)$–мерный полиэдр, $k \equiv 0 \pmod 8$, $k > 0$, который полученый в результате джойна $\frac{n-2k+1}{4} = r_1$ копий кватернионного линзового пространства $S^3/\mathbf{Q}_a$. Согласно теореме Масси [Ma] (см. также [Me]) определено вложение $S^3/\mathbf{Q}_a \subset \mathbb{R}^4$ коразмерности 1 и в предположении $n \ge 4r-1$ определено стандартное вложение J_1 в $\mathbb{R}^n$, которое обозначим через $i_{J_1} : J_1 \subset \mathbb{R}^n$.

Определено отображение $p' : S^{n-2k} \to J_1$, которое получается в результате взятия джойна r копий стандартных накрытий $S^3 \to S^3/\mathbf{Q}_a$. Стандартное действие $\mathbf{Q}_a \times S^{n-2k} \to S^{n-2k}$, определенное прямой суммой r экземпляров стандартного действия на S^3, заданного формулами (20), (21), (22), коммутирует с отображением p'. Тем самым, определено отображение $\hat{p} : S^{n-2k}/\mathbf{Q}_a \to J_1$ и отображение $p : S^{n-2k}/\mathbf{i} \to J_1$ как композиция стандартного двулистного накрытия $\pi : S^{n-2k}/\mathbf{i} \to S^{n-2k}/\mathbf{Q}_a$ с отображением $\hat{p}$.

Рассмотрим композицию $i_{J_1} \circ \hat{p} : S^{n-2k}/\mathbf{Q}_a \to J_1 \to \mathbb{R}^n$, которую обозначим через $\hat{h}$. Приведем это отображение в отображение $\hat{c}$ общего положения малой δ-деформацией (какую именно следует выбрать деформацию и насколько малым следует выбирать положительное число δ, задащее калибр этой деформации выяснится при доказательстве Леммы 31). Искомое отображение $c : S^{n-2k}/\mathbf{i} \to \mathbb{R}^n$ определим как гладкое отображение общего положения, полученное в результате C^0–деформации калибра δ', где $\delta' << \delta$, отображения, представленного композицией стандартного двулистного накрытия π и отображения $\hat{c}$. В Лемме 27 доказывается, что что для отображения c (с особенностью) существует кватернионная структура.

Подпространства и факторподпространства пополненного конфигурационного пространства для $\mathbb{RP}^{n-k}$

В разделе 2 было определено пространство Γ_0, его двулистное накрытие $\bar{\Gamma}_0$ и структурное отображение $\eta_{\Gamma_0} : \Gamma_0 \to K(\mathbf{D}_4, 1)$. Пространство Γ_0 является многообразием с краем. Обозначим внутренность этого многообразия через $\Gamma_{0\circ}$. Ограничение структурного отображения η_{Γ_0} на $\Gamma_{0\circ}$ обозначим через $\eta_{\Gamma_{0\circ}} : \Gamma_{0\circ} \to K(\mathbf{D}_4, 1)$.

Обозначим через $\Sigma_{0\circ} \subset \Gamma_{0\circ}$ полиэдр двукратных особых точек отображения $p : \mathbb{RP}^{n-k} \to J_0$, полученный раздутием полиэдра $\{[(x,y)] \in \Gamma_{0\circ}, p(x) = p(y), x \ne y\}$. Этот полиэдр снабжён структурным отображением $\eta_{\Sigma_{0\circ}} : \Sigma_{0\circ} \to K(\mathbf{D}_4, 1)$, которое индуцировано ограничением структурного отображения $\eta_{\Gamma_{0\circ}}$ на $\Sigma_{0\circ}$.

Определена свободная инволюция $T_{\mathbb{RP}} : \mathbb{RP}^{n-k} \to \mathbb{RP}^{n-k}$, переставляющая точки в каждом слое стандартного двулистного накрытия $\mathbb{RP}^{n-k} \to S^{n-k}/\mathbf{i}$. На пространстве $\bar{\Gamma}_{0\circ}$ действует инволюция $T_{\bar{\Gamma}_0} : \bar{\Gamma}_{0\circ} \to \bar{\Gamma}_{0\circ}$, которая определена как ограничение инволюции на

$\mathbb{RP}^{n-k} \times \mathbb{RP}^{n-k}$, построенной по инволюции $T_{\mathbb{RP}}$ на каждом сомножителе, на подпространство $\bar{\Gamma}_{0\circ} \subset \mathbb{RP}^{n-k} \times \mathbb{RP}^{n-k}$. На факторпространстве $\Gamma_{0\circ}$ инволюции T' определена факторинволюция $T_{\Gamma_{0\circ}} : \Gamma_{0\circ} \to \Gamma_{0\circ}$.

Обозначим через $\Sigma_{antidiag} \subset \Gamma_{0\circ}$ подпространство, называемое антидиагональю, которое образовано всеми антиподальными парами $\{[(x,y)] \in \Gamma_0 : x, y \in \mathbb{RP}^{n-k}, x \neq y, T_{\mathbb{RP}}(x) = y\}$. Здесь и далее в обозначении диагональных и антидиагональных пространств индекс 0 опускается. Нетрудно проверить, что антидиагональ $\Sigma_{antidiag} \subset \Gamma_0$ является множеством неподвижных точек для инволюции T_{Γ_0}. Нормальное расслоение антидиагонали в Γ_0 изоморфно касательному расслоению $T(\Sigma_{antidiag})$.

Определим пространство $\Gamma_{K_{0\circ}}$ на котором инволюция $T_{\Gamma_{0\circ}}$ действует свободно. Определим $\Gamma_{K_{0\circ}} = \Gamma_{0\circ} \setminus \Sigma_{antidiag}$. Определена свободная инволюция $T_{\Gamma_{K_{0\circ}}} : \Gamma_{K_{0\circ}} \to \Gamma_{K_{0\circ}}$. Факторпространство $\Gamma_{K_{0\circ}}/T_{\Gamma_{K_{0\circ}}}$ обозначим через $\hat{\Gamma}_{K_{0\circ}}$.

Подполиэдр $\Sigma_{0\circ} \subset \Gamma_{0\circ}$ кратных точек отображения p представляется в виде объединения $\Sigma_{0\circ} = \Sigma_{antidiag} \cup K'_{0\circ}$, где $K'_{0\circ}$–открытый подполиэдр, в который входят все точки из $\Sigma_{0\circ}$, не попавшие на антидиагональ. Подполиэдр $K_{0\circ} \subset \Gamma_{K_{0\circ}}$ инвариантен при инволюции $T_{\Gamma_{K_{0\circ}}}$. Обозначим $T_{\Gamma_{K_{0\circ}}}|_{K_{0\circ}}$ через $T_{K_{0\circ}}$. Обозначим факторпространство $K_{0\circ}/T_{K_{0\circ}}$ через $\hat{K}_{0\circ}$. Ограничение структурного отображение $\eta_{\Gamma_{0\circ}} : \Gamma_{0\circ} \to K(\mathbf{D}_4, 1)$ на $\Gamma_{K_{0\circ}}$ и $K_{0\circ}$ обозначим через $\eta_{\Gamma_{0\circ}}$ и $\eta_{K_{0\circ}}$ соответственно.

Рассмотрим многообразие с особенностями, которое определено в результате замыкания открытого многообразия $\Gamma_{0\circ}$ и получено в результате присоединения к этому открытому многообразию диагональной и антидиагональной компонент Σ_{diag} и $\Sigma_{antidiag}$. Обозначим замыкание $Cl(K_{0\circ})$ полиэдра $K_{0\circ}$ (соответственно замыкание $Cl(\hat{K}_{0\circ})$ полиэдра $\hat{K}_{0\circ}$) в этом многообразии с особенностями через $K_{(0)}$ (соответственно через $\hat{K}_{(0)}$). Обозначим через $Q_{antidiag} = \Sigma_{antidiag} \cap K_{(0)}$, $Q_{diag} = \partial\Gamma_{diag} \cap K_{(0)}$, $Q_{diag} \subset K_{(0)}$, $Q_{antidiag} \subset K_{(0)}$. Назовем эти подпространства компонентами границы полиэдра $K_{(0)}$. Аналогично определим $\hat{Q}_{diag}$, $\hat{Q}_{antidiag}$ компоненты границы полиэдра $\hat{K}_{(0)}$.

Заметим, что структурное отображение $\eta_{K_{0\circ}}$ продолжается с $K_{0\circ}$ на компоненту границы $Q_{antidiag}$. Обозначим это продолжение через $\eta_{Q_{antidiag}} : Q_{antidiag} \to K(\mathbf{D}_4, 1)$. Отображение $\eta_{Q_{antidiag}}$ представляется в виде композиции отображения $\eta_{antidiag} : Q_{antidiag} \to K(\mathbf{I}_a, 1)$ и отображения включения $i_{\mathbf{I}_a,\mathbf{D}_4} : K(\mathbf{I}_a, 1) \subset K(\mathbf{D}_4, 1)$.

Структурное отображение $\eta_{K_{(0)}}$ на компоненту Q_{diag} не продолжается. Определено отображение $\eta_{diag} : Q_{antidiag} \to K(\mathbf{I}_d, 1)$. Обозначим через $U(Q_{diag}) \subset K_{0\circ}$ малую регулярную взрезанную окрестность открытого конца, примыкающего к Q_{diag}. Определена проекция $proj_{diag}: U(Q_{diag}) \to Q_{diag}$ регулярной взрезанной окрестности на центальное подмногообразие. Ограничение структурного отображения $\eta_{K_{0\circ}}$ на окрестность $U(Q_{diag})$ представлено композицией отображения $\eta_{U(Q_{diag})}: U(Q_{diag}) \to K(\mathbf{I}_b, 1)$ и отображения $i_{\mathbf{I}_b,\mathbf{D}_4} : K(\mathbf{I}_b, 1) \to K(\mathbf{D}_4, 1)$. Гомотопические классы отображений $\eta_{K_{(0)}}$ и $\eta_{U(Q_{diag})}$ связаны равенством $\eta_{diag} \circ proj_{diag} = p_{\mathbf{I}_b,\mathbf{I}_d} \circ \eta_{K_{(0)}}$.

Определим следующую коммутативную диаграмму мономорфизмов групп, каждая из которых представлена в группе $O(4)$:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \mathbf{I}_b & & & & \\ & & \nearrow & & \cap & & & & \\ \mathbf{I}_d & \subset & \mathbf{I}_a & \subset & \mathbf{D}_4 & \subset & \mathbf{E} & \subset & \mathbf{H}. \\ & & \searrow & & \cap & & & & \\ & & & & \mathbf{I}_c & & & & \end{array} \qquad (44)$$

В этой диаграмме группа $\mathbf{H}$ имеет порядок 32 и является подгруппой в группе $O(4)$ и была ранее определена (см. (34)) при помощи преобразований, записанных в стандартном базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$. Подгруппа $\mathbf{E} \subset \mathbf{H}$ имеет порядок 16 и определяется как группа, порожденная преобразованиями из $\mathbf{H}$, сохраняющими неупорядоченную пару плоскостей $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$, $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4)$ (напимер, элемент из $\mathbf{H}$, заданный преобразованием $\mathbf{e}_1 \to \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2 \to -\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3 \to \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4 \to \mathbf{e}_4$, не лежит в подгруппе $\mathbf{E} \subset \mathbf{H}$). Включение $\mathbf{D}_4 \subset \mathbf{E}$ является центральным квадратичным расширением группы $\mathbf{D}_4$ посредством элемента c такого, что c^2 совпадает с образующей подгруппы $\mathbf{I}_d \subset \mathbf{D}_4$. Подгруппа $\mathbf{D}_4$ представлена диагональными преобразованиями $O(2) \subset O(2) \oplus O(2) \subset O(4)$ стандартного вида в каждой паре плоскостей $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$, $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4)$. Остальные подгруппы в диаграмме (44) были определены ранее.

Определены абелевы подгруппы $\mathbf{E}_a, \mathbf{E}_b, \mathbf{E}_c, \mathbf{E}_d$ в группе $\mathbf{E}$, которые являются квадратичными расширениями соответствующих подгрупп $\mathbf{I}_a, \mathbf{I}_b, \mathbf{I}_c, \mathbf{I}_d$ в группе $\mathbf{D}_4$. Нетрудно проверить, что определено естественное отображение $\eta_{\hat{K}_{0\circ}} : \check{\hat{K}}_{0\circ} \to K(\mathbf{E}, 1)$, которое индуцирует отображение диаграмм 2-листных накрытий:

$$\begin{array}{ccccccc} \bar{K}_{0\circ} & \xrightarrow{\bar{r}} & \tilde{K}_{0\circ} & & K(\mathbf{I}_c, 1) & \longrightarrow & K(\mathbf{E}_c, 1) \\ \downarrow & & \downarrow & \longrightarrow & \downarrow & & \downarrow \\ K_{0\circ} & \xrightarrow{r} & \hat{K}_{0\circ} & & K(\mathbf{D}_4, 1) & \longrightarrow & K(\mathbf{E}, 1). \end{array} \qquad (45)$$

Горизонтальные отображения между соответствующими пространствами диаграмм мы переобозначим для краткости через $\bar{\eta}, \tilde{\eta}, \eta, \hat{\eta}$ соответственно.

Включения подгрупп $\mathbf{I}_b \subset \mathbf{E}_b$, $\mathbf{I}_d \subset \mathbf{E}_d$, $\mathbf{I}_a \subset \mathbf{E}_a$ входят в коммутативные диаграммы гомоморфизмов групп:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{I}_b & \longrightarrow & \mathbf{E}_b \\ p_{b,d}\downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{I}_d & \xrightarrow{i_{d,a}} & \mathbf{I}_a \end{array} \tag{46}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{I}_d & \longrightarrow & \mathbf{E}_d \\ i_{d,a}\downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{I}_a & \xrightarrow{id} & \mathbf{I}_a \end{array} \tag{47}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{I}_a & \longrightarrow & \mathbf{E}_a \\ id\downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{I}_a & \xrightarrow{id} & \mathbf{I}_a \end{array} \tag{48}$$

На пространстве $\hat{\Gamma}_{K_{0\circ}}$ определена, в свою очередь, свободная инволюция $T_{\hat{\Gamma}_{K_{0\circ}}} : \hat{\Gamma}_{K_{0\circ}} \to \hat{\Gamma}_{K_{0\circ}}$ по формуле $T_{\hat{\Gamma}_{0\circ}}([(x,y)]) = [(T(x),y)]$. (Заметим, что $[(T(x),y)] = [(x,T(y)]$.) Пространства, полученные из $\hat{\Gamma}_{K_{0\circ}}$, $\hat{K}_{0\circ}$, $\bar{\Gamma}_{K_{0\circ}}$, $\bar{K}_{0\circ}$ после факторизации по инволюции $T_{\hat{\Gamma}_{K_{0\circ}}}$ обозначим через $\hat{\Gamma}^{\downarrow}_{K_{0\circ}}$, $\hat{K}^{\downarrow}_{0\circ}$ $\bar{\Gamma}^{\downarrow}_{K_{0\circ}}$, $\bar{K}^{\downarrow}_{0\circ}$ соответственно. Определено 2-листное накрытие $\hat{\Gamma}_{K_{0\circ}} \to \hat{\Gamma}^{\downarrow}_{K_{0\circ}}$, которое индуцирует двулистное накрытие $\hat{K}_{0\circ} \to \hat{K}^{\downarrow}_{0\circ}$. При этом определена коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \hat{\Gamma}_{K_{0\circ}} & \longrightarrow & K(\mathbf{E},1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{\Gamma}^{\downarrow}_{K_{0\circ}} & \longrightarrow & K(\mathbf{H},1). \end{array} \tag{49}$$

Подпространства и факторподпространства пополненного конфигурационного пространства для $S^{n-2k}/\mathbf{i}$

В разделе 2 было определено пространство Γ_1, его двулистное накрытие $\bar{\Gamma}_1$ и структурное отображение $\zeta_{\Gamma_1} : \Gamma_1 \to K(\mathbf{H},1)$. Пространство Γ_1 является многообразием с краем. Обозначим внутренность этого многообразия через $\Gamma_{1\circ}$. Ограничение структурного отображения ζ_{Γ_1} на $\Gamma_{1\circ}$ обозначим через $\zeta_{\Gamma_{1\circ}} : \Gamma_{1\circ} \to K(\mathbf{H},1)$.

Обозначим через $\Sigma_{1\circ} \subset \Gamma_{1\circ}$ полиэдр двукратных особых точек отображения $p : S^{n-2k}/\mathbf{i} \to J_1$, определенный формулой $\{[(x,y)] \in \Gamma_{1\circ}, p(x) = p(y), x \neq y\}$. Этот полиэдр снабжён структурным отображением $\zeta_{\Sigma_{1\circ}} : \Sigma_{1\circ} \to K(\mathbf{H}, 1)$, которое индуцировано ограничением структурного отображения $\zeta_{\Gamma_{1\circ}}$ на $\Sigma_{1\circ}$.

Определена свободная инволюция $T_{S^{n-2k}/\mathbf{i}} : S^{n-2k}/\mathbf{i} \to S^{n-2k}/\mathbf{i}$, переставляющая точки в каждом слое стандартного двулистного накрытия $S^{n-2k}/\mathbf{i} \to S^{n-2k}/\mathbf{i}$. На пространстве $\bar{\Gamma}_{1\circ}$ действует инволюция $T_{\bar{\Gamma}_{1\circ}} : \bar{\Gamma}_{1\circ} \to \bar{\Gamma}_{1\circ}$, которая определена как ограничение инволюции на $S^{n-2k} \times S^{n-2k}$, построенной по инволюции $T_{S^{n-2k}/\mathbf{i}}$ на каждом сомножителе, на подпространство $\bar{\Gamma}_{1\circ} \subset S^{n-2k}/\mathbf{i} \times S^{n-2k}/\mathbf{i}$. На факторпространстве $\Gamma_{1\circ}$ инволюции T' определена факторинволюция $T_{\Gamma_{1\circ}} : \Gamma_{1\circ} \to \Gamma_{1\circ}$.

Обозначим через $\Sigma_{antidiag} \subset \Gamma_{1\circ}$ подпространство, называемое антидиагональю, которое образовано всеми антиподальными парами $\{[(x,y)] \in \Gamma_{1\circ} : x, y \in S^{n-2k}/\mathbf{i}, x \neq y, T_{S^{n-2k}}(x) = y\}$. Здесь и далее в обозначении диагональных и антидиагональных пространств индекс 1 опускается. Нетрудно проверить, что антидиагональ $\Sigma_{antidiag} \subset \Gamma_{1\circ}$ является множеством неподвижных точек для инволюции $T_{\Gamma_{1\circ}}$. Нормальное расслоение антидиагонали в $\Gamma_{1\circ}$ изоморфно касательному расслоению $T(\Sigma_{antidiag})$.

Определим пространство $\Gamma_{K_{1\circ}}$ на котором инволюция $T_{\Gamma_{1\circ}}$ действует свободно. Определим $\Gamma_{K_{1\circ}} = \Gamma_{1\circ} \setminus \Sigma_{antidiag}$. Определена свободная инволюция $T_{\Gamma_{K_{1\circ}}} : \Gamma_{K_{1\circ}} \to \Gamma_{K_{1\circ}}$. Факторпространство $\Gamma_{K_{1\circ}}/T_{\Gamma_{K_{1\circ}}}$ обозначим через $\hat{\Gamma}_{K_{1\circ}}$.

Подполиэдр $\Sigma_{1\circ} \subset \Gamma_{1\circ}$ кратных точек отображения p представляется в виде объединения $\Sigma_{1\circ} = \Sigma_{antidiag} \cup K'_{1\circ}$, где $K'_{1\circ}$–открытый подполиэдр, в который входят все точки из $\Sigma_{1\circ}$, не попавшие на антидиагональ. Подполиэдр $K_{1\circ} \subset \Gamma_{K_{1\circ}}$ инвариантен при инволюции $T_{\Gamma_{K_{1\circ}}}$. Обозначим $T_{\Gamma_{K_{1\circ}}}|_{K_{1\circ}}$ через $T_{K_{1\circ}}$. Обозначим факторпространство $K_{1\circ}/T_{K_{1\circ}}$ через $\hat{K}_{1\circ}$. Ограничение структурного отображение $\zeta_{\Gamma_{1\circ}} : \Gamma_{1\circ} \to K(\mathbf{H}, 1)$ на $\Gamma_{K_{1\circ}}$ и $K_{1\circ}$ обозначим через $\zeta_{\Gamma_{1\circ}}$ и $\zeta_{K_{1\circ}}$ соответственно.

Рассмотрим многообразие с особенностями, которое определено в результате замыкания открытого многообразия $\Gamma_{1\circ}$ и получено в результате присоединения к этому открытому многообразию диагональной и антидиагональной компонент Σ_{diag} и $\Sigma_{antidiag}$. Обозначим замыкание $Cl(K_{1\circ})$ полиэдра $K_{1\circ}$ (соответственно замыкание $Cl(\hat{K}_{1\circ})$ полиэдра $\hat{K}_{1\circ}$) в этом многообразии с особенностями через $K_{(1)}$ (соответственно через $\hat{K}_{(1)}$). Обозначим через $Q_{antidiag} = \Sigma_{antidiag} \cap K_{(1)}$, $Q_{diag} = \partial\Gamma_{diag} \cap K_{(1)}$, $Q_{diag} \subset K_{(1)}$, $Q_{antidiag} \subset K_{(1)}$. Назовем эти подпространства компонентами границы полиэдра $K_{(1)}$. Аналогично определим $\hat{Q}_{diag}$, $\hat{Q}_{antidiag}$ компоненты границы полиэдра $\hat{K}_{(1)}$.

Заметим, что структурное отображение $\zeta_{K_{1\circ}}$ продолжается с $K_{1\circ}$ на компоненту границы $Q_{antidiag}$. Обозначим это продолжение через $\zeta_{Q_{antidiag}} : Q_{antidiag} \to K(\mathbf{H}, 1)$. Отображение $\zeta_{Q_{antidiag}}$ представляется в виде композиции отображения $\zeta_{antidiag} : Q_{antidiag} \to K(\mathbf{Q}_a, 1)$ и отображения включения $i_{\mathbf{Q}_a,\mathbf{H}} : K(\mathbf{Q}_a, 1) \subset K(\mathbf{D}_4, 1)$.

Структурное отображение $\zeta_{K_{(1)}}$ на компоненту Q_{diag} не продолжается. Определено отображение $\zeta_{diag} : Q_{antidiag} \to K(\mathbf{I}_a, 1)$. Обозначим через $U(Q_{diag}) \subset K_{1\circ}$ малую регулярную взрезанную окрестность открытого конца, примыкающего к Q_{diag}. Определена проекция $proj_{diag} : U(Q_{diag}) \to Q_{diag}$ регулярной взрезанной окрестности на центальное подмногообразие. Ограничение структурного отображения $\zeta_{K_{1\circ}}$ на окрестность $U(Q_{diag})$ представлено композицией отображения $\zeta_{U(Q_{diag})} : U(Q_{diag}) \to K(\mathbf{I}_a, 1)$ и отображения $i_{\mathbf{I}_a,\mathbf{H}} : K(\mathbf{I}_a, 1) \to K(\mathbf{H}, 1)$. Гомотопические классы отображений $\zeta_{K_{(1)}}$ и $\zeta_{U(Q_{diag})}$ связаны равенством $\eta_{diag} \circ proj_{diag} = p_{\mathbf{H}_b,\mathbf{I}_a} \circ \eta_{K_{(1)}}$.

Определим следующую коммутативную диаграмму мономорфизмов групп, каждая из которых представлена в группе $O(8)$:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & & \mathbf{E}_b & & & & \\ & & & & & & \cap & & & & \\ \mathbf{I}_d & \subset & \mathbf{I}_a & \subset & \mathbf{Q}_a & \subset & \mathbf{H} & \subset & \mathbf{G} & \subset & \mathbf{G}^{\downarrow}. \\ & & & & & \searrow & \cap & & & & \\ & & & & & & \mathbf{H}_c & & & & \end{array} \qquad (50)$$

В этой диаграмме группа $\mathbf{G}^{\downarrow}$ определяется как подгруппа порядка 128 в группе $O(8)$, которая порождена при помощи преобразований, записанных в стандартном базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8\}$, следущего вида:

—1 преобразование в упорядоченной паре подпространств $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$, $(\mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8)$ произвольной парой элементов из подгруппы $\mathbf{Q}_a \subset O(4)$.

—2 преобразование одновременно переставляющее пары векторов $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_5)$, $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_6)$, $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_7)$, $(\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_8)$.

Подгруппа $\mathbf{G} \subset \mathbf{G}^{\downarrow}$ имеет порядок 64 и определяется как группа, порожденная преобразованиями из $\mathbf{G}^{\downarrow}$, сохраняющими неупорядоченную пару подпространств $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6)$, $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8)$ (напимер, элемент из $\mathbf{G}^{\downarrow}$, заданный преобразованием $\mathbf{j} \in \mathbf{Q}_a$ в подпространстве $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ и тождественным преобразованием в подпространстве $(\mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8)$ не лежит в подгруппе $\mathbf{G} \subset \mathbf{G}^{\downarrow}$).

Включение $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$ является центральным квадратичным расширением группы $\mathbf{H}$ посредством элемента $\mathbf{d_j}$ такого, что $\mathbf{d_j}^2$ совпадает с образующей центра $\mathbf{I}_d \subset \mathbf{Q}_a \subset \mathbf{H}$. Подгруппа $\mathbf{Q}_a$ представлена диагональными преобразованиями $SO(4) \subset SO(4) \oplus SO(4) \subset O(8)$ стандартного вида в каждой паре пространств $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6)$, $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8)$. Подгруппа $\mathbf{E}_b \subset \mathbf{G}$ порождена двумя коммутирующими преобразованиями. Первое преобразование имеент порядок 4 и совпадает с преобразованием $\mathbf{i} \in \mathbf{I}_a \subset \mathbf{Q}_a$. Второе преобразование имеет порядок 2, оно одновременно переставляют пары базисных векторов $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_5)$, $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_6)$, $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_7)$, $(\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_8)$.

Подгруппа $\mathbf{H}_c \subset \mathbf{G}$ порождена собственными преобразованиями в паре подпространств $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$, $(\mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8)$ на произвольную пару элементов из $\mathbf{Q}_a$. Остальные подгруппы в диаграмме (50) были определены ранее в разделе 2.

Нетрудно проверить, что определено естественное отображение $\hat{\zeta} : \hat{K}_{1\circ} \to K(\mathbf{G}, 1)$, которое индуцирует отображение диаграмм 2-листных накрытий:

$$\begin{array}{ccccccc} \bar{K}_{1\circ} & \xrightarrow{\bar{r}} & \tilde{K}_{1\circ} & & K(\mathbf{H}_c, 1) & \longrightarrow & K(\mathbf{G}_c, 1) \\ \downarrow & & \downarrow & \longrightarrow & \downarrow & & \downarrow \\ K_{1\circ} & \xrightarrow{r} & \hat{K}_{1\circ} & & K(\mathbf{H}, 1) & \longrightarrow & K(\mathbf{G}, 1), \end{array} \tag{51}$$

где подгруппа $\mathbf{G}_c \subset \mathbf{G}$ является квадратичным расширением группы $\mathbf{H}_c$. Горизонтальные отображения между соответствующими пространствами диаграмм мы обозначим через $\bar{\zeta}, \tilde{\zeta}, \zeta, \hat{\zeta}$ соответственно.

На пространстве $\hat{\Gamma}_{K_{1\circ}}$ определена, в свою очередь, свободная инволюция $T_{\hat{\Gamma}_{K_{1\circ}}} : \hat{\Gamma}_{K_{1\circ}} \to \hat{\Gamma}_{K_{1\circ}}$ по формуле $T_{\hat{\Gamma}_{K_{1\circ}}}([(x,y)]) = [(T_{S/i}(x), y)]$. (Заметим, что $[(T_{S/i}(x), y)] = [(x, T_{S/i}(y)]$.) Пространства, полученные из $\hat{\Gamma}_{K_{1\circ}}$, $\hat{K}_{1\circ}$, $\bar{\Gamma}_{K_{1\circ}}$, $\bar{K}_{1\circ}$ после факторизации по инволюции $T_{\hat{\Gamma}_{K_{1\circ}}}$ обозначим через $\hat{\Gamma}^{\downarrow}_{K_{1\circ}}$, $\hat{K}^{\downarrow}_{1\circ}$ $\bar{\Gamma}^{\downarrow}_{K_{1\circ}}$, $\bar{K}^{\downarrow}_{1\circ}$ соответственно. Определено 2-листное накрытие $\hat{\Gamma}_{K_{1\circ}} \to \hat{\Gamma}^{\downarrow}_{K_{1\circ}}$, которое индуцирует двулистное накрытие $\hat{K}_{1\circ} \to \hat{K}^{\downarrow}_{1\circ}$. При этом определена коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \hat{\Gamma}_{K_{1\circ}} & \longrightarrow & K(\mathbf{G}, 1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{\Gamma}^{\downarrow}_{K_{1\circ}} & \longrightarrow & K(\mathbf{G}^{\downarrow}, 1). \end{array} \tag{52}$$

Полиэдры $K_0, \hat{K}_0$

Введем обозначение:

$$r_{min,0} = \frac{n-7}{4}; \quad i_{max,0} = r_0 - r_{min,0}. \tag{53}$$

Определим подпространство $\hat{K}^{(i)}_{0\circ} \subset \hat{K}_{0\circ}$ по формуле:

$$\hat{K}^{(i)}_{0\circ} = p^{-1}_{\hat{K}_{0\circ}}(J^{(i)}_0 \setminus J^{(i+1)}_0),$$

где $p_{\hat{K}_{0\circ}} : K_{0\circ} \to J_0$–естественная проекция особенности на свой образ. Определим подпространство $\hat{K}_{[0]\circ} \subset K_{0\circ}$ по формуле:

$$\hat{K}_{[0]\circ} = p^{-1}_{\hat{K}_{0\circ}}(J_0 \setminus J^{(i_{max,0})+1}_0).$$

При этом справедлива формула:

$$\hat{K}_{[0]\circ} = \cup_{i=0}^{i=i_{max,0}} \hat{K}^{(i)}_{0\circ}.$$

Топология на пространстве $\hat{K}_{[0]\circ}$ индуцирована из топологии локально-связного пространства в правой части формулы, полученного при склейке дизъюнктного объединения пространств. Определено двулистное накрывающее $K^{(i)}_{0\circ}$, (соответственно $K_{[0]\circ}$) над пространством $\hat{K}^{(i)}_{0\circ}$ (соответственно $\hat{K}_{[0]\circ}$).

Определим пространство K_0 (соответственно $\hat{K}_0$) как пространство, полученное замыканием пространства $K_{[0]\circ}$ (соответственно $\hat{K}_{[0]\circ}$). Определим естественные отображения $\hat{K}_0 \to \hat{K}_{(0)}$, $K_0 \to K_{(0)}$. Эти отображения будут PL–вложениями всюду, за исключением прообразов диагонали и антидиагонали, где имеются особенности.

Разрешение особенностей полиэдра K_0

Для каждого i, $0 \le i \le i_{max,0}$, мы построим полиэдр $K^{(i)}_0$ и пространство $RK^{(i)}_0$, которое назовем пространством, разрешающим особенности полиэдра $K^{(i)}_0$. Параметр i назовем глубиной. Пространства $K^{(i)}_0$, $RK^{(i)}_0$ кроме того, являются накрывающими пространствами при 2-листных накрытиях $r : K^{(i)}_0 \to \hat{K}^{(i)}_0$, $Rr : RK^{(i)}_0 \to R\hat{K}^{(i)}_0$, эти накрытия включены в следующую коммутативную диаграмму отображений:

$$\begin{array}{ccccc} & & RK^{(i)}_0 & \xrightarrow{pr} & K^{(i)}_0 \\ & \phi_0 \swarrow & \downarrow Rr & & \downarrow r \\ K(\mathbf{I}_a, 1) & \xleftarrow{\hat{\phi}_0} & R\hat{K}^{(i)}_0 & \xrightarrow{p\hat{r}} & \hat{K}^{(i)}_0. \end{array} \tag{54}$$

Введем обозначения $R\hat{Q}^{(i)}_{diag} = (p\hat{r})^{-1}(\hat{Q}^{(i)}_{diag})$, $R\hat{Q}^{(i)}_{antidiag} = (p\hat{r})^{-1}(\hat{Q}^{(i)}_{antidiag})$. Аналогичные обозначения $RQ^{(i)}_{diag}$, $RQ^{(i)}_{antidiag}$ введем для соответствующих двулистных накрывающих. Рассматриваемые пространства включены в следующие коммутативные диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} RQ^{(i)}_{antidiag} & \xrightarrow{pr} & Q^{(i)}_{antidiag} \\ \phi_0 \searrow & & \swarrow \eta_{antidiag} \\ & K(\mathbf{I}_a, 1), & \end{array} \qquad (55)$$

$$\begin{array}{ccc} RQ^{(i)}_{diag} & \xrightarrow{pr} & Q^{(i)}_{diag} \\ \phi_0 \searrow & & \swarrow \eta_{diag} \\ & K(\mathbf{I}_d, 1), & \end{array} \qquad (56)$$

Для доказательства основного результата раздела нам потребуется следующая лемма.

Лемма 28. *–1. Для каждого i, $0 \le i \le i_{max,0}$, существует пространство $\hat{K}^{(i)}_0$, его двулистное накрывающее $K^{(i)}_0$ и база двулистного накрытия $\hat{K}^{(i),\downarrow}_0$. Пространства $\hat{K}^{(i)}_0$, $K^{(i)}_0$, $\hat{K}^{(i),\downarrow}_0$ являются подпространствами пространств $\hat{K}_0$, K_0, $\hat{K}^{\downarrow}_0$ соответственно. Существует пространство $R\hat{K}^{(i)}_0$ и его двулистное накрывающее $RK^{(i)}_0$ и база 2-листного накрытия $R\hat{K}^{(i),\downarrow}_0$, которые включаются в коммутативную диаграмму* (54). *На двулистном накрывающем выполняются граничные условия, которые определены диаграммами* (55), (56).

–2. Существует пространство $R\hat{K}_0$ и его двулистное накрывающее RK_0 и база 2-листного накрытия $R\hat{K}^{\downarrow}_0$, которые включаются в нижеследующую коммутативную диаграмму (57), *аналогичную диаграмме* (54). *На двулистном накрывающем выполняются граничные условия, которые определены нижеследующими диаграммами* (58), (59), *аналогичными диаграммам* (55), (56).

$$\begin{array}{ccccc} & & RK_0 & \xrightarrow{pr} & K_0 \\ & \phi_0 \swarrow & \downarrow Rr & & \downarrow r \\ K(\mathbf{I}_a, 1) & \xleftarrow{\hat{\phi}_0} & R\hat{K}_0 & \xrightarrow{p\hat{r}} & \hat{K}_0. \end{array} \qquad (57)$$

$$
\begin{array}{ccc}
RQ_{antidiag} & \xrightarrow{pr} & Q_{antidiag} \\
\phi_0 \searrow & & \swarrow \eta_{antidiag} \\
& K(\mathbf{I}_a, 1), &
\end{array}
\qquad (58)
$$

$$
\begin{array}{ccc}
RQ_{diag} & \xrightarrow{pr} & Q_{diag} \\
\phi_0 \searrow & & \swarrow \eta_{diag} \\
& K(\mathbf{I}_d, 1), &
\end{array}
\qquad (59)
$$

Полиэдры $K_1, \hat{K}_1$

Введем обозначение:

$$
r_{min,1} = \frac{n-15}{8}; \quad i_{max,1} = r_1 - r_{min,1}. \qquad (60)
$$

Определим подпространство $\hat{K}_{1\circ}^{(i)} \subset \hat{K}_{1\circ}$ по формуле:

$$
\hat{K}_{1\circ}^{(i)} = p_{\hat{K}_{1\circ}}^{-1}(J_1^{(i)} \setminus J_1^{(i+1)}),
$$

где $p_{\hat{K}_{1\circ}} : K_{1\circ} \to J_1$–естественная проекция особенности на свой образ. Определим подпространство $\hat{K}_{[1]\circ} \subset K_{1\circ}$ по формуле:

$$
\hat{K}_{[1]\circ} = p_{\hat{K}_{1\circ}}^{-1}(J_1 \setminus J_1^{(i_{max,1})+1}).
$$

При этом справедлива формула:

$$
\hat{K}_{[1]\circ} = \cup_{i=0}^{i=i_{max,1}} \hat{K}_{1\circ}^{(i)}.
$$

Топология на пространстве $\hat{K}_{[1]\circ}$ индуцирована из топологии локально-связного пространства в правой части формулы, полученного при склейке дизъюнктного объединения пространств. Определено двулистное накрывающее $K_{1\circ}^{(i)}$, (соответственно $K_{[1]\circ}$) над пространством $\hat{K}_{1\circ}^{(i)}$ (соответственно $\hat{K}_{[1]\circ}$).

Определим пространство K_1 (соответственно $\hat{K}_1$) как пространство, полученное замыканием пространства $K_{[1]\circ}$ (соответственно $\hat{K}_{[1]\circ}$). Определим естественные отображения $\hat{K}_1 \to \hat{K}_{(1)}$, $K_1 \to K_{(1)}$. Эти отображения будут PL–вложениями всюду, за исключением прообразов диагонали и антидиагонали, где имеются особенности.

Разрешение особенностей полиэдра K_1

Для каждого i, $0 \le i \le i_{max,1}$, мы построим полиэдр $K_1^{(i)}$ и пространство $RK_1^{(i)}$, которое назовем пространством, разрешающим особенности полиэдра $K_1^{(i)}$. Параметр i назовем глубиной. Пространства $K_1^{(i)}$, $RK_1^{(i)}$ кроме того, являются накрывающими пространствами при 2-листных накрытиях $r : K_1^{(i)} \to \hat{K}_1^{(i)}$, $Rr : RK_1^{(i)} \to R\hat{K}_1^{(i)}$, эти накрытия включены в следующую коммутативную диаграмму отображений:

$$\begin{array}{ccccc} & & RK_1^{(i)} & \xrightarrow{pr} & K_1^{(i)} \\ & \phi_1 \swarrow & \downarrow Rr & & \downarrow r \\ K(\mathbf{Q}_a, 1) & \xleftarrow{\hat{\phi}_1} & R\hat{K}_1^{(i)} & \xrightarrow{p\hat{r}} & \hat{K}_1^{(i)}. \end{array} \qquad (61)$$

Введем обозначения $R\hat{Q}_{diag}^{(i)} = (p\hat{r})^{-1}(\hat{Q}_{diag}^{(i)})$, $R\hat{Q}_{antidiag}^{(i)} = (p\hat{r})^{-1}(\hat{Q}_{antidiag}^{(i)})$. Аналогичные обозначения $RQ_{diag}^{(i)}$, $RQ_{antidiag}^{(i)}$ введем для соответствующих двулистных накрывающих. Рассматриваемые пространства включены в следующие коммутативные диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} RQ_{antidiag}^{(i)} & \xrightarrow{pr} & Q_{antidiag}^{(i)} \\ \phi_1 \searrow & & \swarrow \eta_{antidiag} \\ & K(\mathbf{Q}_a, 1), & \end{array} \qquad (62)$$

$$\begin{array}{ccc} RQ_{diag}^{(i)} & \xrightarrow{pr} & Q_{diag}^{(i)} \\ \phi_1 \searrow & & \swarrow \eta_{diag} \\ & K(\mathbf{I}_a, 1), & \end{array} \qquad (63)$$

Для доказательства основного результата раздела нам потребуется следующая лемма.

Лемма 29. *–1. Для каждого i, $0 \le i \le i_{max,1}$, существует пространство $\hat{K}_1^{(i)}$ и его двулистное накрывающее $K_1^{(i)}$. Пространства $\hat{K}_1^{(i)}$, $K_1^{(i)}$ являются подпространствами пространств $\hat{K}_1$, K_1 соответственно. Существует пространство $R\hat{K}_1^{(i)}$ и его двулистное накрывающее $RK_1^{(i)}$, которые включаются в коммутативную диаграмму* (61). *На двулистном накрывающем выполняются граничные условия, которые определены диаграммами* (62), (63).

–2. Существует пространство $R\hat{K}_1$ и его двулистное накрывающее RK_1, которые включаются в нижеследующую коммутативную диаграмму (64), аналогичную диаграмме (61). На двулистном накрывающем выполняются граничные условия, которые определены нижеследующими диаграммами (65), (66), которые аналогичны диаграммам (62), (63).

$$\begin{array}{ccccc} & & RK_1 & \xrightarrow{pr} & K_1 \\ & \phi_1 \swarrow & \downarrow Rr & & \downarrow r \\ K(\mathbf{Q}_a,1) & \xleftarrow{\hat{\phi}_1} & R\hat{K}_1 & \xrightarrow{p\hat{r}} & \hat{K}_1. \end{array} \qquad (64)$$

$$\begin{array}{ccc} RQ_{antidiag} & \xrightarrow{pr} & Q_{antidiag} \\ \phi_1 \searrow & & \swarrow \eta_{antidiag} \\ & K(\mathbf{Q}_a,1), & \end{array} \qquad (65)$$

$$\begin{array}{ccc} RQ_{diag} & \xrightarrow{pr} & Q_{diag} \\ \phi_1 \searrow & & \swarrow \eta_{diag} \\ & K(\mathbf{I}_a,1), & \end{array} \qquad (66)$$

Полиэдры $K_1, \hat{K}_1$

Введем обозначение:

$$r_{min,1} = \frac{n-15}{8}; \quad i_{max,1} = r_1 - r_{min,1}. \qquad (67)$$

Определим пространство $\hat{K}^{(i)}_{(1)}$ по формуле:

$$\hat{K}^{(i)}_{(1)} = p^{-1}_{\hat{K}_{(1)}}(J_1^{(i)} \setminus J_1^{(i+1)}).$$

Определим пространство $\hat{K}_{(1)}$ по формуле:

$$\hat{K}_{(1)} = p^{-1}_{\hat{K}_{(1)}}(J_1 \setminus J_1^{(i_{max,1})+1}) = \cup_{i=0}^{i=i_{max,1}} \hat{K}^{(i)}_{(1)}.$$

Определено двулистное накрывающее $K^{(i)}_{(1)}$, (соответственно $K_{(1)}$) над пространством $\hat{K}^{(i)}_{(1)}$ (соответственно $\hat{K}_{(1)}$).

Для каждого i, $0 \le i \le i_{max,1}$, ниже определим пространство $\hat{K}_1^{(i)}$ и пространство $\hat{K}_1$. Определим также естественные отображения $\hat{K}_{(1)}^{(i)} \to \hat{K}_1^{(i)}$, $\hat{K}_{(1)} \to \hat{K}_{(1)}$. Эти отображения будут PL–гомеоморфизмами всюду, за исключением участков раздутой диагонали и антидиагонали, где имеется вырождение. Аналогично определим двулистные накрывающие $K_1^{(i)}$ и пространство K_1 и естественные отображения $K_{(1)}^{(i)} \to K_1^{(i)}$, $K_{(1)} \to K_1$.

Начало доказательства Леммы 26

При определении отображения d определялось также отображение $\hat{g} : S^{n-k}/\mathbf{i} \to \mathbb{R}^n$, которое получено малой PL-деформацией общего положения калибра δ из отображения $i_{J_0} \circ p : S^{n-k}/\mathbf{i} \to J_0 \subset \mathbb{R}^n$. (Сама эта деформация и её калибр δ будут явно указаны при доказательстве Леммы 30). Рассмотрим также отображение $g = \pi \circ \hat{d} : \mathbb{RP}^{n-k} \to S^{n-k}/\mathbf{i} \to \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим полиэдр $\hat{N}^{\downarrow}_{K_0}$ точек самопересечения отображения $\hat{g}$ и двулистное накрывающее над этим полиэдром $\hat{N}_{K_0}$, определенное в соответствии с правым нижним пространством в диаграмме (45). Чтобы подчеркнуть аналогию со случаем гладких отображений, далее все рассматриваемые полиэдры (раздутие особенностей на диагонали и антидиагонали в полиэдрах не определяется) точек самопересечения будет называться PL-многообразием с особенностями. Эти многообразия с особенностями имеют особый край, состоящий из точек диагонали и антидиагонали. Полиэдры без точек диагонали и антидиагонали обозначаются $\hat{N}^{\downarrow}_{K_0\circ}$, $\hat{N}_{K_0\circ}$ соответственно. Каждый такой полиэдр назовем открытым многообразием с особенностями. Открытое многообразие с особенностями $\hat{N}_{K_0\circ}$ естественно вложено в открытое многообразие $\hat{\Gamma}_{0\circ}$.

Многообразие с особенностями $\hat{N}_{K_0}$, в свою очередь, само служит базой двулистного накрытия $r : N_{K_0} \to \hat{N}_{K_0}$. Накрытия определены в соответствии с обозначениями в диаграмме (45). Определено открытое многообразие с особенностями $N_{K_{0\circ}}$ с краем, которое естественно вкладывается во взрезанный квадрат Γ_0. При этом вложении образ $N_{K_{0\circ}}$ лежит в регулярной окрестности полиэдра $K_{(0)}$ и определена коммутативная диаграмма отображений

$$\begin{array}{ccccc} N_{K_{0\circ}} & \subset & U_\varepsilon & \longrightarrow & K(\mathbf{D}_4, 1) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \hat{N}_{K_{0\circ}} & \subset & \hat{U}_\varepsilon & \longrightarrow & K(\mathbf{E}, 1), \end{array} \qquad (68)$$

в которой через U_ε, $\hat{U}_\varepsilon$ обозначены регулярные ε-окрестности подполиэдров $K_{(0)} \subset \Gamma_0$, $\hat{K}_{(0)} \subset \hat{\Gamma}_0$ соответственно. Правые горизонтальные стрелки этой диаграммы являются продолжениями отображений диаграммы (45) на регулярную окрестность U_ε и на факторпространство $\hat{U}_\varepsilon$ этой окрестности в многообразиях с краем Γ_0, $\hat{\Gamma}_0$ соответственно.

Рассмотрим многообразие с особенностями N_{K_0} и обозначим его компоненты края через $N_{Q,diag} \cup N_{Q,antidiag}$. Переобозначим многообразие с особенностями N_{K_0} через $N^{(0)}_{K_0}$, а его компоненты края через $N^{(0)}_{Q,diag} \cup N^{(0)}_{Q,antidiag}$. Ниже в доказательстве Леммы 30 определена стратификация:

$$N^{i_{max,0}}_{K_0} \subset \dots \subset N^0_{K_0}, \tag{69}$$

(эта стратификация совпадает с каноническим двулистным накрытием стратификации (135)).

Обозначим через

$$W^{(i)}_{K_0} = N^i_{K_0} \setminus N^{i+1}_{K_0}. \tag{70}$$

открытое многообразие с особенностями, содержащее компоненты края (ср. (136)).

Обозначим компоненты его края $N^i_{Q,diag} \setminus N^{i+1}_{Q,diag}$, $N^i_{Q,antidiag} \setminus N^{i+1}_{Q,antidiag}$ через $W^i_{Q,diag}$ и $W^i_{Q,antidiag}$ соответственно. Введем аналогичные обозначения $\hat{N}^i_{K_0} \setminus \hat{N}^{i+1}_{K_0} = \hat{W}^{(i)}_{K_0}$, $\hat{N}^i_{Q,diag} \setminus \hat{N}^{i+1}_{Q,diag} = \hat{W}^{(i)}_{Q,diag}$, $\hat{N}^i_{Q,antidiag} \setminus \hat{N}^{i+1}_{Q,antidiag} = \hat{W}^{(i)}_{Q,antidiag}$. При вложении $W^{(i)}_{K_0} \subset U_\varepsilon \subset \Gamma_0$ подмногообразие с осбенностями $W^{(i)}_{Q,diag}$ вкладывается в компоненту края Γ_{diag}, а подмногообразие с особенностями $W^{(i)}_{Q,antidiag}$ вкладывается в $\Gamma_{antidiag}$. Аналогичные утверждения справедливы для компонент границы $\hat{W}^{(i)}_{\Gamma_0}$.

Для каждого i, $0 \le i \le i_{max,0}$, определена коммутативная диаграмма (71) отображений полиэдров с выписанными под диаграммой граничными условиями. В пространства, стоящие в третьей строке этой диаграммы, отображаются соответственно пространства центральной строки коммутативной диаграммы (72), которая также определена для произвольного i, $0 \le i \le i_{max,0}$, соответствующего номеру страта полиэдра точек самопересечения в стратификации (69).

$$
\begin{array}{ccc@{\qquad}ccc}
K(\mathbf{I}_a,1) & & & K(\mathbf{I}_a,1) & & \\
\uparrow \hat{\phi} & \nwarrow \hat{\phi} & & \uparrow \phi & \nwarrow \phi & \\
R\hat{K}_0^{(i)} & \supset & R\hat{Q}_{diag}^{(i)} \cup R\hat{Q}_{antidiag}^{(i)} & RK_0^{(i)} & \longleftarrow & RQ_{diag}^{(i)} \cup RQ_{antidiag}^{(i)} \\
\downarrow \hat{pr} & & \downarrow & \downarrow pr & & \downarrow \\
\hat{K}_0^{(i)} & \supset & \hat{Q}_{diag}^{(i)} \cup \hat{Q}_{antidiag}^{(i)} & K_0^{(i)} & \supset & Q_{diag}^{(i)} \cup Q_{antidiag}^{(i)} \\
\cup & & \cup & \cup & & \cup \\
\hat{K}_{0\circ}^{(i)} & \supset & \emptyset & K_{0\circ}^{(0)} & \supset & \emptyset \\
\downarrow \hat{\eta} & & & \downarrow \eta & & \\
K(\mathbf{E},1) & & & K(\mathbf{D}_4,1). & &
\end{array}
\tag{71}
$$

Граничные условия в диаграмме (71) на пространстве $Q_{antidiag}^{(i)}$ записываются формулой $\phi = i_a \circ \eta_{Q_{antidiag}^{(i)}} : Q_{antidiag}^{(i)} \longrightarrow K(\mathbf{I}_a,1) \xrightarrow{i_a} K(\mathbf{D}_4,1)$, на пространстве $Q_{diag}^{(i)}$ записываются формулой $\phi = i_{d,a} \circ p_{b,d} \circ \eta_{Q_{diag}^{(i)}} : Q_{diag}^{(i)} \longrightarrow K(\mathbf{I}_b,1) \longrightarrow K(\mathbf{I}_d,1) \longrightarrow K(\mathbf{I}_a,1)$.

$$
\begin{array}{ccc@{\qquad}ccc}
K(\mathbf{I}_a,1) & & & K(\mathbf{I}_a,1) & & \\
\uparrow \hat{\mu}_a & & \nwarrow \hat{\mu}_a & \uparrow \mu_a & & \nwarrow \mu_a \\
\hat{W}_{K_0}^{(i)} & \supset & \hat{W}_{Q,diag}^{(i)} \cup \hat{W}_{Q,antidiag}^{(i)} & W_{K_0}^{(i)} & \supset & W_{Q,diag}^{(i)} \cup W_{Q,antidiag}^{(i)} \\
\cup & & \cup & \cup & & \cup \\
\hat{W}_{K_{0\circ}}^{(i)} & \supset & \emptyset & W_{K_{0\circ}}^{(i)} & \supset & \emptyset \\
\downarrow \hat{\eta} & & & \downarrow \eta & & \\
K(\mathbf{E},1) & & & K(\mathbf{D}_4,1). & &
\end{array}
\tag{72}
$$

Граничные условия в диаграмме (72) на пространстве $W_{Q,antidiag}^{(i)}$

записываются формулой $\phi = i_a \circ \eta_{W^{(i)}_{Q,antidiag}} : W^{(i)}_{Q,antidiag} \longrightarrow K(\mathbf{I}_a, 1) \xrightarrow{i_a} K(\mathbf{D}_4, 1)$, на пространстве $W^{(i)}_{Q,diag}$ записываются формулой $\phi = i_a \circ p_b \circ \eta_{W^{(i)}_{Q,diag}} : W^{(i)}_{Q,diag} \longrightarrow K(\mathbf{I}_b, 1) \longrightarrow K(\mathbf{I}_d, 1) \longrightarrow K(\mathbf{I}_a, 1)$.

Воспользуемся следующей леммой, доказательство которой проводится в конце раздела.

Лемма 30. *Существует малая PL-деформация общего положения $(i_{J_0} \circ \hat{p}) \mapsto \hat{d}$ такая, что для каждого кусочно-линейного страта $W^{(i)}_{K_0}$ полиэдра $N(d)$ в средней строке коммутативной диаграммы* (72) *определены отображения $\hat{t}^{(i)} : W^{(i)}_{\hat{K}_0} \to R\hat{K}^{(i)}_0$, $t^{(i)} : W^{(i)}_{K_0} \to RK^{(i)}_0$, называемые отображениями разрешения особенностей, в соответствующие пространства второй строки диаграммы* (71). *При этом определены отображения $\hat{\mu}^{(i)}_a : W^{(i)}_{\hat{K}_0} \to K(\mathbf{I}_a, 1)$, $\mu^{(i)}_a : W^{(i)}_{K_0} \to K(\mathbf{I}_a, 1)$ в диаграмме* (72) *по формулам $\hat{\mu}^{(i)}_a = \hat{\phi} \circ \hat{t}^{(i)}$, $\mu^{(i)}_a = \phi \circ t^{(i)}$.*

Построенные семейства отображений при различных i в (69) *склеиваются до отображений $\hat{t} : \hat{N}_{K_0} \to R\hat{K}_0$ (соответственно $t : N_{K_0} \to RK_0$) и определены индуцированные отображения $\hat{\mu}_a = \hat{\phi} \circ \hat{t} : \hat{N}_{K_0} \to K(\mathbf{I}_a, 1)$ (соответственно $\mu_a = \phi \circ t : N_{K_0} \to K(\mathbf{I}_a, 1)$). Более того, выполнено соотношение $r \circ \hat{\mu}_a = \mu_a : N_{K_0} \to \hat{N}_{K_0} \to K(\mathbf{I}_a, 1)$ и выполнены граничные условия на компонетах $N_{Q,diag}$, $N_{Q,antidiag}$ границы стратифицированного многообразия с особенностями N_{K_0}, которые аналогичны выписаным под формулой* (72) *граничным условиям для компонент $W^{(i)}_{Q,diag}$, $W^{(i)}_{Q,antidiag}$ соответственно.*

Окончание доказательства Леммы 26

Докажем, что отображение μ_a, определенное из Леммы 30 на многообразии с особенностями с краем N_{K_0}, продолжается до отображения на всем $N(d)$ и указанное продолжение определяет циклическую структуру для отображения d.

Напомню, что $N(d) = N_{antidiag} \cup N_{K_0}$ по общему краю $N_{Q,antidiag}$. Полиэдр N_{K_0} является базой 2-листного накрытия $r : N_{K_0} \to \hat{N}_{K_0}$ и корректно определена диаграмма (68). На компоненте N_{K_0} циклическая структура определена в результате продолжения отображения μ_a с W_{K_0}. В силу выполнения граничных условий для отображения ϕ на $RQ_{antidiag}$, RQ_{diag} следует, что отображение μ_a имеет правильные граничные условия на $N_{Q,diag}$ и на $N_{Q,antidiag}$. В частности, на $N_{Q,antidiag}$ отображение μ_a совпадает со структурным отображением, которое является циклическим.

Проверим условие (30) в определении циклической структуры для отображений с особенностью. Воспользуемся Леммой 18, согласно которой достаточно рассмотреть абсолютный цикл $\mu_{\bar{R}} : \bar{R}^{n-k} \to K(\mathbf{I}_d, 1)$ (напомню, что этот цикл получен при заклейке отображения $\mu_a : N(d) \to K(\mathbf{I}_a, 1)$ вдоль границы двумя одинаковыми копиями относительного цикла, которые выбираются произвольными) и проверить, что цикл $\mu_{\bar{R}}$ определяет образующую группы гомологий $H_{n-k}(K(\mathbf{I}_d, 1); \mathbb{Z}/2)$. Обозначим эту образующую через $x \in H_{n-k}(K(\mathbf{I}_d, 1); \mathbb{Z}/2)$.

Рассмотрим еще один гомологический класс $p_{c,*} \circ \bar{\eta}_*([\bar{N}(d)]) \in H_{n-k}(K(\mathbf{I}_d, 1); \mathbb{Z}/2)$, который определен циклом, полученным при помощи композиции канонического накрытия $\bar{\eta} : \bar{N}(d) \to K(\mathbf{I}_c, 1)$ над структурным отображением $\eta : N(d) \to K(\mathbf{D}_4, 1)$ с отображением $p_c : K(\mathbf{I}_c, 1) \to K(\mathbf{I}_d, 1)$. Многообразие с особенностями $\bar{N}(d)$ рассматривается как замкнутое, т.е. каноническое накрытие берется разветвленным над краем $\partial N(d)$. Обозначим построенный класс гомологий через $y \in H_{n-k}(K(\mathbf{I}_d, 1); \mathbb{Z}/2)$.

Докажем, что y является образующим классом гомологий. Далее проверим, что $x = y$. Действительно, класс когомологий y^{op}, двойственный по Пуанкаре классу гомологий y, вычисляется как нормальный характеристический класс $\bar{w}_k \in H^k(\mathbb{RP}^{n-k}; \mathbb{Z}/2) = H^k(K(\mathbf{I}_d, 1); \mathbb{Z}/2)$. (При $n = 2^l - 1$ когомологический класс $\bar{w}_k$ не равен нулю.)

Вспомним, что $N(d) = N_{antidiag} \cup_{N_{Q,antidiag}} N_{K_0}$. Поэтому двулистное накрывающее $\bar{N}(d)$ также представляется в виде объединения двулистных накрывающих по формуле $\bar{N}(d) = \bar{N}_{antidiag} \cup_{\bar{N}_{Q,antidiag}} \bar{N}_{K_0}$. Справедлива аналогичная формула $\bar{R} = \bar{R}_{Q,antidiag} \cup \bar{R}_{K_0}$. При этом $\bar{R}_{Q,antidiag}$ и $\bar{N}_{Q,antidiag}$ PL-гомеоморфны как многообразия с особенностями с краем, а отображения $\bar{\mu}_a$, $p_c \circ \bar{\eta}$ на указанной общей части совпадают.

Нетрудно проверить, что многообразие с особенностями $\bar{R}_{K_0}$ является двулистным накрывающим над некоторым многообразием с особенностями $\tilde{R}_{K_0}$. Действительно, многообразие с особенностями N_{K_0} служит двулистным накрывающим для $\hat{N}_{K_0}$. Здесь и далее для многообразий с особенностями используются обозначения, соответствующие обозначениям групп в диаграмме (45). При этом отображение $\bar{\mu}_a|_{R_{K_0}} : R_{K_0} \to K(\mathbf{I}_d, 1)$ пропускается через двулистное накрытие $\bar{R}_{K_0} \to \tilde{R}_{K_0}$, поскольку само отображение $\mu_a|_{N_{K_0}}$ накрывает отображение $\hat{\mu}_a|_{\hat{N}_{K_0}}$. Также легко проверить, что многообразие $\bar{N}_{\Gamma_0}$ является двулистным накрывающим над $\bar{N}^{\downarrow}_{K_0}$, при этом отображение $p_c \circ \bar{\eta}|_{\bar{N}_{K_0}}$ пропускается через двулистное накрытие $\bar{N}_{K_0} \to \bar{N}^{\downarrow}_{K_0}$. Поэтому каждый из циклов x, y гомологичен циклу с носителем на общей части $\bar{N}_{antidiag}$.

Лемма 26 доказана.

Начало доказательства Леммы 27

При определении отображения c определялось также отображение $\hat{h}$: $S^{n-2k}/\mathbf{Q}_a \to \mathbb{R}^n$, которое получено малой PL-деформацией общего положения калибра δ из отображения $i_{J_1} \circ p : S^{n-2k}/\mathbf{Q}_a \to J_1 \subset \mathbb{R}^n$. (Сама эта деформация и её калибр δ будут явно указаны при доказательстве Леммы 31 которое полностью аналогично доказательству Леммы 30.) Рассмотрим также отображение $h = \pi \circ \hat{c} : S^{n-2k}/\mathbf{i} \to S^{n-2k}/\mathbf{Q}_a \to \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим полиэдр $\hat{L}^{\downarrow}_{K_1}$ точек самопересечения отображения $\hat{h}$ и двулистное накрывающее над этим полиэдром $\hat{L}_{K_1}$, определенное в соответствии с правым нижним пространством в диаграмме (51). Чтобы подчеркнуть аналогию со случаем гладких отображений, далее все рассматриваемые полиэдр (раздутие особенностей на диагонали и антидиагонали в полиэдрах не рассматривается) точек самопересечения будет называться PL-многообразием с особенностями. Эти многообразия с особенностями имеют особый край, состоящий из точек диагонали и антидиагонали. Полиэдры без точек диагонали и антидиагонали обозначаются $\hat{L}^{\downarrow}_{K_1\circ}$, $\hat{L}_{K_1\circ}$ соответственно. Каждый такой полиэдр назовем открытым многообразием с особенностями. Открытое многообразие с особенностями $\hat{L}_{K_1\circ}$ естественно вложено в открытое многообразие с краем $\hat{\Gamma}_{1\circ}$.

Многообразие с особенностями $\hat{L}_{K_1}$, в свою очередь, само служит базой двулистного накрытия $r : L_{K_1} \to \hat{L}_{K_1}$. Накрытия определены в соответствии с обозначениями в диаграмме (51). Определено открытое многообразие с особенностями $L_{K_{1\circ}}$ с краем, которое естественно вкладывается во взрезанный квадрат Γ_1. При этом вложении образ $L_{K_{1\circ}}$ лежит в регулярной окрестности полиэдра $K_{(1)}$ и определена коммутативная диаграмма отображений:

$$\begin{array}{ccccc} L_{K_{1\circ}} & \subset & U_\varepsilon & \longrightarrow & K(\mathbf{H},1) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \hat{L}_{K_{1\circ}} & \subset & \hat{U}_\varepsilon & \longrightarrow & K(\mathbf{G},1), \end{array} \tag{73}$$

в которой через U_ε, $\hat{U}_\varepsilon$ обозначены регулярные ε-окрестности подполиэдров $K_{1\circ} \subset \Gamma_1$, $\hat{K}_{1\circ} \subset \hat{\Gamma}_1$ соответственно. Правые горизонтальные стрелки этой диаграммы являются продолжениями отображений диаграммы (73) на регулярную окрестность U_ε и на факторпространство $\hat{U}_\varepsilon$ этой окрестности в многообразиях Γ_1, $\hat{\Gamma}_1$ соответственно.

Рассмотрим многообразие с особенностями L_{K_1} и обозначим его компоненты края через $L_{Q,diag} \cup L_{Q,antidiag}$. Переобозначим многообразие L_{K_1} через $L^{(0)}_{K_1}$, а его компоненты края через $L^{(1)}_{Q,diag} \cup L^{(1)}_{Q,antidiag}$. Ниже в доказательстве Леммы 30 по аналогии со стратификацией (69) определена стратификация

$$L^{i_{max,1}}_{K_1} \subset \dots \subset L^0_{K_1}. \tag{74}$$

Обозначим через

$$W^{(i)}_{K_1} = L^i_{K_1} \setminus L^{i+1}_{K_1}. \tag{75}$$

открытое многообразие с особенностями, содержащее компоненты края.

Обозначим компоненту его края $L^i_{Q,diag} \setminus L^{i+1}_{Q,diag}$ через $W^{(i)}_{Q,diag}$, компоненту $L^i_{Q,antidiag} \setminus L^{i+1}_{Q,antidiag}$ через $W^{(i)}_{Q,antidiag}$. Введем аналогичные обозначения $\hat{L}^i_{K_1} \setminus \hat{L}^{i+1}_{K_1} = \hat{W}^{(i)}_{K_1}$, $\hat{L}^i_{Q,diag} \setminus \hat{L}^{i+1}_{Q,diag} = \hat{W}^{(i)}_{Q,diag}$, $\hat{L}^i_{Q,antidiag} \setminus \hat{L}^{i+1}_{Q,antidiag} = \hat{W}^{(i)}_{Q,antidiag}$. При вложении $W^{(i)}_{K_1} \subset U_\varepsilon \subset \Gamma_1$ подмногообразие с осбенностями $W^{(i)}_{Q,diag}$ вкладывается в компоненту края Γ_{diag}, а подмногообразие с особенностями $W^{(i)}_{Q,antidiag}$ вкладывается в $\Gamma_{antidiag}$. Аналогичные утверждения справедливы для компонент границы $\hat{W}^{(i)}_{\Gamma_1}$.

Обозначим открытое многообразие с особенностями с краем $L^{(i)}_{K_1} \setminus L^{i+1}_{K_1}$ через $W^{(i)}_{K_1}$. Обозначим эти компоненты его края через $W^{(i)}_{Q,diag} \cup W^{(i)}_{Q,antidiag}$. При вложении $W^{(i)}_{K_1} \subset U_\varepsilon \subset \Gamma_1$ подмногообразие $W^{(i)}_{Q,diag}$ вкладывается в компоненту края Γ_{diag}, а подмногообразие $W^{(i)}_{Q,antidiag}$ вкладывается в $\Gamma_{antidiag}$. Аналогичные утверждения справедливы для компонент границы $\hat{W}^{(i)}_{\Gamma_1}$.

Для каждого i, $1 \le i \le i_{max,1}$, определена коммутативная диаграмма (76) отображений полиэдров с выписанными под диаграммой граничными условиями. В пространства, стоящие в третьей строке этой диаграммы, отображаются соответственно пространства центральной строки коммутативной диаграммы (77), которая также определена для произвольного i, $1 \le i \le i_{max,1}$, соответствующего номеру страта полиэдра точек самопересечения в стратификации (74):

$$\begin{array}{ccccccc}
K(\mathbf{Q}_a,1) & & & & K(\mathbf{Q}_a,1) & & \\
\uparrow \hat{\phi} & \nwarrow \hat{\phi} & & & \uparrow \phi & \nwarrow \phi & \\
R\hat{K}_1^{(i)} & \supset & R\hat{Q}^{(i)}_{diag} \cup R\hat{Q}^{(i)}_{antidiag} & & RK_1^{(i)} & \longleftarrow & RQ^{(i)}_{diag} \cup RQ^{(i)}_{antidiag} \\
\downarrow \hat{pr} & & \downarrow & & \downarrow pr & & \downarrow \\
\hat{K}_1^{(i)} & \supset & \hat{Q}^{(i)}_{diag} \cup \hat{Q}^{(i)}_{antidiag} & & K_1^{(i)} & \supset & Q^{(i)}_{diag} \cup Q^{(i)}_{antidiag} \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
\hat{K}_{1\circ}^{(i)} & \supset & \emptyset & & K_{1\circ}^{(0)} & \supset & \emptyset \\
\downarrow \hat{\zeta} & & & & \downarrow \zeta & & \\
K(\mathbf{G},1) & & & & K(\mathbf{H},1). & &
\end{array} \tag{76}$$

Граничные условия в диаграмме (76) на пространстве $Q^{(i)}_{antidiag}$ записываются формулой $\phi = i_a \circ \zeta_{Q^{(i)}_{antidiag}} : Q^{(i)}_{antidiag} \longrightarrow K(\mathbf{Q}_a,1) \xrightarrow{i_a} K(\mathbf{H},1)$. Граничные условия в диаграмме (76) на пространстве $Q^{(i)}_{diag}$ записываются формулой $\phi = i_a \circ p_b \circ \zeta_{Q^{(i)}_{diag}} : Q^{(i)}_{diag} \longrightarrow K(\mathbf{H}_b,1) \longrightarrow K(\mathbf{H}_d,1) \longrightarrow K(\mathbf{Q}_a,1)$.

$$\begin{array}{ccccccc}
K(\mathbf{Q}_a,1) & & & & K(\mathbf{Q}_a,1) & & \\
\uparrow \hat{\lambda}_a & & \nwarrow \hat{\lambda}_a & & \uparrow \lambda_a & & \nwarrow \lambda_a \\
\hat{W}^{(i)}_{K_1} & \supset & \hat{W}^{(i)}_{Q,diag} \cup \hat{W}^{(i)}_{Q,antidiag} & & W^{(i)}_{K_1} & \supset & W^{(i)}_{Q,diag} \cup W^{(i)}_{Q,antidiag} \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
\hat{W}^{(i)}_{K_{1\circ}} & \supset & \emptyset & & W^{(i)}_{K_{1\circ}} & \supset & \emptyset \\
\downarrow \hat{\zeta} & & & & \downarrow \zeta & & \\
K(\mathbf{G},1) & & & & K(\mathbf{H},1) & &
\end{array} \tag{77}$$

Граничные условия в диаграмме (77) на пространстве $W^{(i)}_{Q,antidiag}$ записываются формулой $\phi = i_a \circ \zeta_{W^{(i)}_{Q,antidiag}} : W^{(i)}_{Q,antidiag} \longrightarrow K(\mathbf{Q}_a, 1) \xrightarrow{i_a} K(\mathbf{H}, 1)$. Граничные условия в диаграмме (77) на пространстве $W^{(i)}_{Q,diag}$ записываются формулой $\phi = i_{d,a} \circ p_{b,d} \circ \zeta_{W^{(i)}_{Q,diag}} : W^{(i)}_{Q,diag} \longrightarrow K(\mathbf{H}_b, 1) \longrightarrow K(\mathbf{H}_d, 1) \longrightarrow K(\mathbf{Q}_a, 1)$.

Воспользуемся следующей леммой, доказательство которой проводится в конце раздела.

Лемма 31. *Существует малая PL-деформация общего положения $(i_{J_1} \circ \hat{p}) \mapsto \hat{c}$ такая, что для каждого кусочно-линейного страта $W^{(i)}_{K_1}$ полиэдра $L(d)$ в средней строке коммутативной диаграммы* (77) *определены отображения $\hat{t}^{(i)} : W^{(i)}_{\hat{K}_1} \to R\hat{K}^{(i)}_1$, $t^{(i)} : W^{(i)}_{K_1} \to RK^{(i)}_1$, называемые отображениями разрешения особенностей, в соответствующие пространства второй строки диаграммы* (76). *При этом определены отображения $\hat{\lambda}^{(i)}_a : W^{(i)}_{\hat{K}_1} \to K(\mathbf{Q}_a, 1)$, $\lambda^{(i)}_a : W^{(i)}_{K_1} \to K(\mathbf{Q}_a, 1)$ в диаграмме* (77) *по формулам $\hat{\lambda}^{(i)}_a = \hat{\phi} \circ \hat{t}^{(i)}$, $\lambda^{(i)}_a = \phi \circ t^{(i)}$.*

Построенные семейства отображений при различных i в (74) *склеиваются до отображений $\hat{t} : \hat{L}_{K_1} \to R\hat{K}_1$ (соответственно $t : N_{K_1} \to RK_1$) и определены индуцированные отображения $\hat{\lambda}_a = \hat{\phi} \circ \hat{t} : \hat{L}_{K_1} \to K(\mathbf{Q}_a, 1)$ (соответственно $\lambda_a = \phi \circ t : L_{K_1} \to K(\mathbf{Q}_a, 1)$). Более того, выполнено соотношение $r \circ \hat{\lambda}_a = \lambda_a : L_{K_1} \to \hat{L}_{K_1} \to K(\mathbf{Q}_a, 1)$ и выполнены граничные условия на компонетах $L_{Q,diag}$, $L_{Q,antidiag}$ границы стратифицированного многообразия с особенностями L_{K_1}, которые аналогичны выписаным под формулой* (77) *граничным условиям для компонент $W^{(i)}_{Q,diag}$, $W^{(i)}_{Q,antidiag}$ соответственно.*

Окончание доказательства Леммы 27

Доказательство аналогично рассуждениям из окончания доказательства Леммы 26. Лемма 27 доказана.

Предварительный этап в доказательстве Леммы 28

Изложим план доказательства. Мы начнем с того, что явно опишем полиэдры K_0, $\hat{K}_0$ и структурные отображения η, $\hat{\eta}$ на этих полиэдрах при помощи координат. Затем для каждого i, $0 \le i \le i_{max,0}$, построим пространства $RK^{(i)}_0$, $R\hat{K}^{(i)}_0$, снабженные отображениями $pr : RK^{(i)}_0 \to K^{(i)}_0$, $p\hat{r} : R\hat{K}^{(i)}_0 \to \hat{K}^{(i)}_0$ и отображения $\hat{\phi} : R\hat{K}^{(i)}_0 \to K(\mathbf{I}_a, 1)$, $\phi : RK^{(i)}_0 \to K(\mathbf{I}_a, 1)$, которые удовлетворяют требуемым граничным условиям. Затем построим пространства RK_0, $R\hat{K}_0$, снабженные отображениями $pr : RK_0 \to K_0$, $p\hat{r} : R\hat{K}_0 \to \hat{K}_0$ и отображения $\hat{\phi} : R\hat{K}_0 \to K(\mathbf{I}_a, 1)$, $\phi : RK_0 \to K(\mathbf{I}_a, 1)$, которые удовлетворяют требуемым граничным условиям.

Предварительный этап в доказательстве Леммы 29

Изложим план доказательства. Мы начнем с того, что явно опишем полиэдры K_1, $\hat{K}_1$ и структурные отображения ζ, $\hat{\zeta}$ на этих полиэдрах при помощи координат. Затем для каждого i, $0 \le i \le i_{max,1}$, построим пространства $RK_1^{(i)}$, $R\hat{K}_1^{(i)}$, снабженные отображениями $pr : RK_1^{(i)} \to K_1^{(i)}$, $p\hat{r} : R\hat{K}_1^{(i)} \to \hat{K}_1^{(i)}$ и отображения $\hat{\phi} : R\hat{K}_1^{(i)} \to K(\mathbf{Q}_a, 1)$, $\phi : RK_1^{(i)} \to K(\mathbf{Q}_a, 1)$, которые удовлетворяют требуемым граничным условиям. Затем построим пространства RK_1, $R\hat{K}_1$, снабженные отображениями $pr : RK_1 \to K_1$, $p\hat{r} : R\hat{K}_1 \to \hat{K}_1$ и отображения $\hat{\phi} : R\hat{K}_1 \to K(\mathbf{Q}_a, 1)$, $\phi : RK_1 \to K(\mathbf{Q}_a, 1)$, которые удовлетворяют требуемым граничным условиям.

Построение стратификаций полиэдров J_0, K_0, $\hat{K}_0$ и отображений $K_{(0)} \to K_0$, $\hat{K}_{(0)} \to \hat{K}_0$.

Упорядочим линзовые пространства, образующие джойн, числами от 1 до r_0 и обозначим через $J_0(k_1, \dots, k_s) \subset J_0$ подджойн, образованный выбранным набором окружностей (одномерных линзовых пространств $S^1/\mathbf{i}$ с номерами $1 \le k_1 < \dots < k_s \le r$, $0 \ge s \ge r_0$. Построенная стратификация индуцирована из стандартной стратификации открытых граней стандартного r_0-мерного симплекса δ^r при естественной проекции $J_0 \to \delta^r$. Прообразами вершин симплекса служат линзовые пространства $J_0(j) \subset J_0$, $J_0(j) \approx S^1/\mathbf{i}$, $1 \le j \le r$, порождающие джойн.

Определим пространство J_0^s как подпространство в J_0, полученное в результате объединения всех подпространств $J_0(k_1, \dots, k_s) \subset J_0$. Определим пространство $J_0^{(i)}$, $i_{max,0} \ge i \ge r_0$ по формуле:

$$J_0^{(i)} = J_0^i \setminus J_0^{r_{min,0}+1}.$$

Обозначим максимальную открытую клетку пространства $\hat{p}^{-1}(J_0(k_1, \dots, k_s))$ через $\hat{U}(k_1, \dots, k_s) \subset S^{n-k}/\mathbf{i}$. Такую открытую клетку назовем элементарным стратом глубины $(r - s)$. Точка на элементарном страте $\hat{U}(k_1, \dots, k_s) \subset S^{n-k}/\mathbf{i}$ определяется набором координат $(\check{x}_{k_1}, \dots, \check{x}_{k_s}, l)$, где $\check{x}_{k_i}$ – координата на 1-сфере (окружности), накрывающей линзовое пространство с номером k_i, l– координата на соответствующем $(s-1)$-мерном симплексе джойна. При этом если два набора координат отождествляются между собой при преобразовании трансляции циклического $\mathbf{I}_a$-накрытия на образующую, которое является общим для всего набора координат, то эти наборы определяют одну и ту же точку на $S^{n-k}/\mathbf{i}$. Точки на элементарном страте $\hat{U}(k_1,\dots,k_s)$ лежат в объединении симплексов с вершинами на линзовых подпространствах джойна с соответствующими координатами. Каждый элементарный страт $\hat{U}(k_1,\dots,k_s)$ служит базой двулистного накрытия $U(k_1,\dots,k_s) \to \hat{U}(k_1,\dots,k_s)$, которое индуцировано из двулистного накрытия $\mathbb{RP}^{n-k} \to S^{n-k}/\mathbf{i}$ при включении $\hat{U}(k_1,\dots,k_s) \subset S^{n-k}/\mathbf{i}$.

Полиэдр $\hat{K}_{(0)} \setminus (\hat{Q}_{0,diag} \cup \hat{Q}_{0,antydiag})$ разбивается в объединение открытых подмножеств (элементарных стратов) $K_0(k_1,\dots,k_s)$, $1 \leq s \leq r$ в соответствии со стратификацией пространства J_0. Для рассматриваемого страта число $r-s$ недостающих координат до полного набора назовем глубиной страта. Определено двулистное накрытие $K_0(k_1,\dots,k_s) \to \hat{K}_0(k_1,\dots,k_s)$, согласованое с построенной стратификацией базы.

Опишем элементарный страт $K_0(k_1,\dots,k_s)$ при помощи системы координат. Для простоты обозначений разберем случай $s = r_0$ Пусть для пары точек $(x_1,\ x_2)$, определяющих точку на $K(1,\dots,r_0)$, фиксирована пара точек $(\check{x}_1,\check{x}_2)$ на накрывающей сфере S^{n-k}, которая переходит в рассматриваемую пару $(x_1,\ x_2)$ при проекции $S^{n-k} \to \mathbb{RP}^{n-k}$. В соответствии с проделанным выше построением, обозначим через $(\check{x}_{1,i},\check{x}_{2,i})$, $i=1,\dots,r_0$ набор сферических координат каждой точки. Каждая такая координата определяет точку на 1-мерной сфере (окружности) S^1_i с тем же номером i, которая накрывает соответствующую окружность $J_0(i) \subset J_0$ в джойне. Заметим, что пара координат с общим номером необходимо определяет пару точек в одном слое стандартного циклического $\mathbf{I}_a$-накрытия $S^1 \to S^1/\mathbf{i}$.

Наборы координат $(\check{x}_{1,i},\check{x}_{2,i})$ рассматриваются с точностью до независимых замен на антиподальные. Кроме того, точки в паре (x_1,x_2) не допускают естественного упорядочивания и поднятие точки с K_0 до пары точек $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$, лежащих на сфере S^{n-k}, определяется с точностью до 8 различных возможностей. (Порядок группы $\mathbf{D}_4$ равен 8.)

Аналогичное построение справедливо и для точек более глубоких элементарных стратов $K_0(k_1,\dots,k_s)$, $1 \leq s \leq r$. При этом, если наборы координат элементарного страта получаются друг из друга действием некоторого элемента $\mathbf{I}_a$–накрытия, то меньший страт лежит целиком на раздутой диагонали (если действие задается элементом подгруппы $\mathbf{I}_d \subset \mathbf{I}_a$) или антидиагонали (если действие задается на элемент смежного класса $\mathbf{I}_a \setminus \mathbf{I}_d$).

Определим полиэдр $\hat{K}_0^{(i)}$, $0 \le i \le i_{max,0}$ как дизъюнктное объединение всех элементарных стратов глубины i. При $i \ge 1$ рассматриваются страты, попавшие на диагональ или антидиагональ. (При $i = 0$ диагональный и антидиагональный страт отсутствует.) Определим полиэдр $\hat{K}_0$ в результате склейки объединения всех полиэдров $\hat{K}_0^{(i)}$ при $0 \le i \le i_{max,0}$, причем примыкания граней, определяющие склейку, согласованны с построенными системами координат. По построению полиэдр $\hat{K}_0^{(0)}$ совпадает с определенным ранее полиэдром $\hat{K}_{(0)}^{(0)}$. При $1 \le i \le i_{max,0}$ полиэдр $\hat{K}_0^{(i)}$ отличается от полиэдра $\hat{K}_{(0)}^{(i)}$ лишь в диагональных и антидиагональных подполиэдрах.

Определены естественные отображения

$$\hat{K}_{(0)}^{(i)} \to \hat{K}_0^{(i)}, \qquad 1 \le i \le i_{max,0},$$

$$\hat{K}_{(0)} \to \hat{K}_0,$$

которые являются PL–гомеоморфизмом всюду, за исключением, диагональных и антидиагональных подполиэдров, на которых эти отображения совпадают с естественными проекциями части раздутой диагонали (соответственно, антидиагонали) на диагональ (соответственно антидиагональ), понижающими размерность. Обозначим через $\hat{K}_{0\circ}^{(i)}$, $\hat{K}_{0\circ}$ полиэдры, полученные из $\hat{K}_0^{(i)}$, $\hat{K}_0$ в результате удаления точек на диагонали и антидиагонали.

Стандартным способом определяются двулистные накрывающие $K_0^{(i)}$, $K_{(0)}$, $K_{0\circ}^{(i)}$, $K_{0\circ}$ над построенными полиэдрами и отображения

$$K_{(0)}^{(i)} \to K_0^{(i)}, \qquad 1 \le i \le i_{max,0},$$

$$K_{(0)} \to K_0.$$

Построение стратификаций полиэдров J_1, K_1, $\hat{K}_1$ и построение отображений $K_{(1)} \to K_1$, $\hat{K}_{(1)} \to \hat{K}_1$.

Упорядочим линзовые пространства, образующие джойн, числами от 1 до r_1 и обозначим через $J_1(k_1, \dots, k_s) \subset J_1$ подджойн, образованный выбранным набором кватернионных линзовых пространств $S^3/\mathbf{Q}_a$ с номерами $1 \le k_1 < \dots < k_s \le r_1$, $0 \ge s \ge r_1$. Построенная стратификация индуцирована из стандартной стратификации открытых граней стандартного r_1-мерного симплекса δ^{r_1} при естественной проекции $J_1 \to \delta^{r_1}$. Прообразами вершин симплекса служат линзовые пространства $J_1(j) \subset J_1$, $J_1(j) \approx S^3/\mathbf{Q}_a$, $1 \le j \le r_1$, порождающие джойн.

Определим пространство J_1^s как подпространство в J_1, полученное в результате объединения всех подпространств $J_1(k_1, \dots, k_s) \subset J_1$. Определим пространство $J_1^{(i)}$, $i_{max,1} \ge i \ge r_1$ по формуле:

$$J_1^{(i)} = J_1^i \setminus J_1^{r_{min,1}+1}.$$

Обозначим максимальную открытую клетку пространства $\hat{p}^{-1}(J_1(k_1, \dots, k_s))$ через $\hat{U}(k_1, \dots, k_s) \subset S^{n-2k}/\mathbf{Q}_a$. Такую открытую клетку назовем элементарным стратом глубины $r_1 - s$. Точка на элементарном страте $\hat{U}(k_1, \dots, k_s) \subset S^{n-2k}/\mathbf{Q}_a$ определяется набором координат $(\check{x}_{k_1}, \dots, \check{x}_{k_s}, l)$, где $\check{x}_{k_i}$ – координата на 1-сфере (окружности), накрывающей линзовое пространство с номером k_i, l– координата на соответствующем $(s-1)$-мерном симплексе джойна. При этом если два набора координат отождествляются между собой при преобразовании трансляции циклического $\mathbf{Q}_a$-накрытия на образующую, которое является общим для всего набора координат, то эти наборы определяют одну и ту же точку на $S^{n-2k}/\mathbf{Q}_a$. Точки на элементарном страте $\hat{U}(k_1, \dots, k_s)$ лежат в объединении симплексов с вершинами на линзовых подпространствах джойна с соответствующими координатами. Каждый элементарный страт $\hat{U}(k_1, \dots, k_s)$ служит базой двулистного накрытия $U(k_1, \dots, k_s) \to \hat{U}(k_1, \dots, k_s)$, которое индуцировано из двулистного накрытия $S^{n-2k}/\mathbf{i} \to S^{n-2k}/\mathbf{Q}_a$ при включении $\hat{U}(k_1, \dots, k_s) \subset S^{n-2k}/\mathbf{Q}_a$.

Полиэдр $\hat{K}_{(1)} \setminus (\hat{Q}_{1,diag} \cup \hat{Q}_{1,antydiag})$ разбивается в объединение открытых подмножеств (элементарных стратов) $K_1(k_1, \dots, k_s)$, $1 \le s \le r$ в соответствии со стратификацией пространства J_1. Для рассматриваемого страта число $r - s$ недостающих координат до полного набора назовем глубиной страта. Определено двулистное накрытие $K_1(k_1, \dots, k_s) \to \hat{K}_1(k_1, \dots, k_s)$, согласованое с построенной стратификацией базы.

Опишем элементарный страт $K_1(k_1, \dots, k_s)$ при помощи системы координат. Для простоты обозначений разберем случай $s = r_1$ Пусть для пары точек $(x_1,\ x_2)$, определяющих точку на $K(1, \dots, r_1)$, фиксирована пара точек $(\check{x}_1, \check{x}_2)$ на накрывающей сфере S^{n-2k}, которая переходит в рассматриваемую пару $(x_1,\ x_2)$ при проекции $S^{n-2k} \to S^{n-2k}/\mathbf{i}$. В соответствии с проделанным выше построением, обозначим через $(\check{x}_{1,i}, \check{x}_{2,i})$, $i = 1, \dots, r_1$ набор сферических координат каждой точки. Каждая такая координата определяет точку на 3-мерной сфере S^3_i с тем же номером i, которая накрывает соответствующее кватернионное линзовое пространство $J_1(i) \subset J_1$ в джойне. Заметим, что пара координат с общим номером необходимо определяет пару точек в одном слое стандартного циклического $\mathbf{Q}_a$-накрытия $S^3 \to S^3/\mathbf{Q}_a$.

Наборы координат $(\check{x}_{1,i}, \check{x}_{2,i})$ рассматриваются с точностью до независимых замен на антиподальные. Кроме того, точки в паре (x_1, x_2) не допускают естественного упорядочивания и поднятие точки с K_1 до пары точек $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, лежащих на сфере S^{n-2k}, определяется с точностью до 32 различных возможностей. (Порядок группы $\mathbf{H}$ равен 32.)

Аналогичное построение справедливо и для точек более глубоких элементарных стратов $K_0(k_1, \dots, k_s)$, $1 \le s \le r_1$. При этом, если наборы координат элементарного страта получаются друг из друга действием некоторого элемента $\mathbf{Q}_a$–накрытия, то меньший страт лежит целиком на раздутой диагонали (если действие задается элементом подгруппы $\mathbf{I}_a \subset \mathbf{Q}_a$) или антидиагонали (если действие задается на элемент смежного класса $\mathbf{Q}_a \setminus \mathbf{I}_a$).

Определим полиэдр $\hat{K}_1^{(i)}$, $0 \le i \le i_{max,1}$ как дизъюнктное объединение всех стратов глубины i. При $i \ge 1$ рассматриваются, в том числе, страты, попавшие на диагональ или антидиагональ. (При $i = 0$ диагональный и антидиагональный страт отсутствует.) Определим полиэдр $\hat{K}_1$ в результате склейки объединения всех полиэдров $\hat{K}_1^{(i)}$ при $0 \le i \le i_{max,1}$, причем примыкания граней, определяющие склейку, согласованны с построенными системами координат. По построению полиэдр $\hat{K}_1^{(0)}$ совпадает с определенным ранее полиэдром $\hat{K}_{(1)}^{(0)}$. При $1 \le i \le i_{max,1}$ полиэдр $\hat{K}_1^{(i)}$ отличается от полиэдра $\hat{K}_{(1)}^{(i)}$ лишь на компонентах, лежащих на диагональных и антидиагональных подполиэдрах.

Определены естественные отображения

$$\hat{K}_{(1)}^{(i)} \to \hat{K}_1^{(i)}, \qquad 1 \le i \le i_{max,1},$$

$$\hat{K}_{(1)} \to \hat{K}_1,$$

которые являются PL–гомеоморфизмом всюду, за исключением, диагональных и антидиагональных подполиэдров, на которых эти отображения совпадают с естественными проекциями части раздутой диагонали (соответственно, антидиагонали) на диагональ (соответственно антидиагональ), понижающими размерность. Обозначим через $\hat{K}_{1,\circ}^{(i)}$, $\hat{K}_{1,\circ}$ полиэдры, полученные из $\hat{K}_1^{(i)}$, $\hat{K}_1$ в результате удаления точек на диагонали и антидиагонали.

Стандартным способом определяются двулистные накрывающие $K_1^{(i)}$, $K_{(1)}$, $K_{1,\circ}^{(i)}$, $K_{1,\circ}$ над построенными полиэдрами и отображения

$$K_{(1)}^{(i)} \to K_1^{(i)}, \qquad 1 \le i \le i_{max,1},$$

$$K_{(1)} \to K_0.$$

Координатное описание элементарных стратов пространств $K_{0,\circ}$, $\hat{K}_{0,\circ}$

Пусть $x \in K_0(1,\dots,r_0)$ – точка, лежащая на максимальном элементарном страте. Рассмотрим наборы сферических координат $\check{x}_{1,i}$ и $\check{x}_{2,i}$, $1 \le i \le r_0$ точки x. При каждом i возможны следующие случаи: пара i-ых координат совпадает; антиподальна; вторая координата получается из первой в результате преобразования на образующую (или минус образующую) циклического накрытия. Сопоставим упорядоченной паре координат $\check{x}_{1,i}, \check{x}_{2,i}$ вычет v_i со значением $+1$, -1, $+\mathbf{i}$ или $-\mathbf{i}$ соответственно.

При изменении набора координат одной из точек на антиподальный набор, скажем, набора координат точки x_2, набор значений вычетов при новом выборе прообраза $\bar{x}_2$ на сферическом накрытии получается из первоначального набора изменением знаков. При перенумерации точек набор вычетов изменится на комплексно-сопряженный. Очевидно, что набор вычетов не изменится, если выбрать другую точку на том же элементарном страте пространства $K_{0\circ}$. Для пространства $\hat{K}_{0\circ}$ справедливы аналогичные построения, т.к. обе точки слоя накрытия $K_{0\circ} \to \hat{K}_{0\circ}$ лежат на одном элементарном страте.

Элементарные страты пространства $K_0(1,\dots,r)$ в соответствии с определенным набором вычетов делятся на 3 типа: $\mathbf{I}_a, \mathbf{I}_b, \mathbf{I}_d$. Если среди вычетов набора встречаются лишь вычеты $\{+\mathbf{i}, -\mathbf{i}\}$ (соответственно лишь вычеты$\{+1,-1\}$), будем говорить об элементарном страте типа $\mathbf{I}_a$ (соответственно типа $\mathbf{I}_b$). Если среди вычетов встречаются как вычеты из набора $\{+\mathbf{i}, -\mathbf{i}\}$, так и из набора $\{+1,-1\}$, будем говорить об элементарном страте типа $\mathbf{I}_d$. Легко проверить, что ограничение характеристического отображения $\eta : K_{0\circ} \to K(\mathbf{D}_4, 1)$ на элементарный страт типа $\mathbf{I}_a, \mathbf{I}_b, \mathbf{I}_d$ представлено композицией некоторого отображения в пространство $K(\mathbf{I}_a, 1)$ (соответственно в пространство $K(\mathbf{I}_b, 1)$ или $K(\mathbf{I}_d, 1)$) с отображением $i_a : K(\mathbf{I}_a, 1) \to K(\mathbf{D}_4, 1)$ (соответственно с отображением $i_b : K(\mathbf{I}_b, 1) \to K(\mathbf{D}_4, 1)$ или $i_d : K(\mathbf{I}_d, 1) \to K(\mathbf{D}_4, 1)$). Для стратов первых двух типов редукция структурного отображения (с точностью до гомотопии) неоднозначна, но определена лишь с точностью до отображения, соответствующему гомоморфизму внешнего сопряжения в подгруппах $\mathbf{I}_a$, $\mathbf{I}_b$.

Каждый элементарный страт пространства $K_{0\circ}(1,\dots,r_0)$ двулистно накрывает элементарный страт пространства $\hat{K}_{0,\circ}(1,\dots,r_0)$. При этом элементарные страты пространства $\hat{K}_{0,\circ}(1,\dots,r_0)$ делятся на типы $\mathbf{E}_a$, $\mathbf{E}_b$, $\mathbf{E}_c$ в соответствии с типом $\mathbf{I}_a, \mathbf{I}_b, \mathbf{I}_d$ накрывающей компоненты. Эта классификация соответствует редукции структурного отображения в пространство $K(\mathbf{E},1)$ к отображению в подпространство $K(\mathbf{E}_a,1)$, $K(\mathbf{E}_b,1)$, $K(\mathbf{E}_d,1)$ соответственно. Для элементарных стратов большей глубины построения аналогичны.

Координатное описание элементарных стратов пространств $K_{1,\circ}$, $\hat{K}_{1,\circ}$

Для каждой точки $x \in K_1(1,\dots,r_1)$, лежащей на максимальном элементарном страте рассмотрим наборы сферических координат $\check{x}_{1,i}$ и $\check{x}_{2,i}$, $1 \le i \le r_1$. При каждом i возможны восемь случаев, в зависимости от того, какой из элементов $v_i = (\check{x}_{2,i})^{-1}\check{x}_{1,i}$ структурной группы $\mathbf{Q}_a$ переводит при умножении справа сферическую координату $\check{x}_{1,i}$ в координау $\check{x}_{2,i}$. Сопоставим упорядоченной паре координат $\check{x}_{1,i}, \check{x}_{2,i}$ вычет v_i со значением $\{\ +1,\ -1,\ +\mathbf{i},\ -\mathbf{i},\ +\mathbf{j},\ -\mathbf{j},\ +\mathbf{k},\ -\mathbf{k}\ \}$ соответственно.

При изменении набора координат точки x_1 (соответственно x_2) на преобразование трансляции (правое умножение) на элемент t из группы $\mathbf{Q}_a$ набор вычетов при новом выборе прообраза $\bar{x}_2$ на сферическом накрытии получается из первоначального набора вычетов умножением справа на t (соответственно умножением слева на t^{-1}). При перенумерации точек набор вычетов изменится на обратный (т.е. вычет v_i изменится на v_i^{-1}). Набор вычетов не изменится при изменении точки x при преобразовании трансляции в накрывающем при накрытии $\hat{K}_1(1,\dots,r_1) \to K_1(1,\dots,r_1)$. Поэтому для элементарных стратов пространства $\hat{K}_{\circ,1}$ справедливы аналогичные построения.

Элементарные страты пространства $K_1^{(0)}(1,\dots,r_1)$ в соответствии с построенным выше набором вычетов делятся на 3 типа: $\mathbf{Q}_a, \mathbf{E}_b, \mathbf{I}_a$. Если среди вычетов набора встречаются лишь вычеты $\{+\mathbf{j}, -\mathbf{j}, +\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$ из класса смежности $\mathbf{Q}_a \setminus \mathbf{I}_a$ (соответственно вычеты $\{+\mathbf{i}, -\mathbf{i}, +1, -1\}$ из подгруппы $\mathbf{I}_a$), причем только вычеты $+\mathbf{j}$ $-\mathbf{j}$, либо только вычеты $+\mathbf{k}$ $-\mathbf{k}$, (соответственно только вычеты $+1$, -1, либо только вычеты $+\mathbf{i}$, $-\mathbf{i}$) будем говорить о страте типа $\mathbf{Q}_a$ (соответвтвенно $\mathbf{H}_b$). В другом случае, например, если среди вычетов встречаются как вычеты из подгруппы $\mathbf{I}_a$, так и из класса смежности $\mathbf{Q}_a \setminus \mathbf{I}_a$, будем говорить о компоненте типа $\mathbf{I}_a$.

Легко проверить, что ограничение характеристического отображения $\zeta : K_1 \to K(\mathbf{H},1)$ на элементарный страт типа $\mathbf{Q}_a$, $(\mathbf{E}_b)$ представлено композицией некоторого отображения в пространство $K(\mathbf{Q}_a,1)$ $(K(\mathbf{E}_b,1))$ с отображением включения $i_a : K(\mathbf{Q}_a,1) \to K(\mathbf{H},1)$ $(i_b : K(\mathbf{E}_b,1) \to K(\mathbf{H},1))$. Для стратов этих двух подтипов редукция структурного отображения (с точностью до гомотопии) неоднозначна, но лишь с точностью до отображения, соответствующего внешнему сопряжению в подгруппах $\mathbf{Q}_a$ ($\mathbf{E}_b$) некоторым произвольным элементом из класса смежности $\mathbf{H} \setminus \mathbf{Q}_a$ ($\mathbf{H} \setminus \mathbf{E}_b$). Для элементарных типа $\mathbf{I}_a$ ограничение отображение $\zeta : K_{1,\circ} \to K(\mathbf{H}, 1)$ представлено композицией некоторого отображения в пространство $K(\mathbf{I}_a, 1)$ с отображением включения $i_{\mathbf{I}_a} : K(\mathbf{I}_a, 1) \to K(\mathbf{H}, 1)$.

Каждый элементарный страт пространства $K_{1\circ}(1, \dots, r)$ двулистно накрывает элементарный страт пространства $\hat{K}_{1\circ}(1, \dots, r)$. При этом элементарные страты пространства $\hat{K}_{1\circ}(1, \dots, r)$ делятся на типы $\mathbf{G}_a$, $\mathbf{G}_b$, $\mathbf{G}_d$ в соответствии с группой симметрии компоненты (явное описание этих структурных групп не потребуется). Рассматриваемая классификация соответствует редукции структурного отображения в пространство $K(\mathbf{G}, 1)$ к отображению в подпространство $K(\mathbf{G}_a, 1)$, $K(\mathbf{G}_b, 1)$, $K(\mathbf{G}_d, 1)$ соответственно. Для элементарных стратов большей глубины все построения аналогичны.

Построение структурных отображений $\eta : K_{0\circ} \to K(\mathbf{D}_4, 1)$, $\hat{\eta} : \hat{K}_{0\circ} \to K(\mathbf{E}, 1)$ при помощи координат

Пусть $x = [(x_1, x_2)]$ – отмеченная точка на $K_{0,\circ}$, лежащая на максимальном элементарном страте. Рассмотрим замкнутый путь $\lambda : S^1 \to K_0$, начинающийся и заканчивающийся в этой отмеченной точке, пересекающий особые страты глубины 1 в общем положении по конечному множеству точек. Пусть $(\check{x}_1, \check{x}_2)$– выбор сферических прообразов точки x. Определим другую пару $(\check{x}'_1, \check{x}'_2)$ сферических прообразов точки x, которая будет называться системой координат, полученной в результате естественного преобразования системы координат $(\check{x}_1, \check{x}_2)$ вдоль пути λ.

В регулярных точках пути λ семейство пар сферических прообразов в однопараметрическом семействе меняется непрерывно, что однозначно определяет прообразы в конечной точке пути по начальным значениям. При пересечении пути со стратом глубины 1 соответствующая пара сферических координат с номером l претерпевает разрыв. Поскольку все остальные координаты остаются регулярными, их продолжение вдоль пути в критический момент времени однозначно определено. Но для заданной точки x на элементарном страте глубины 0 пространства K_0 выбор хотябы одной пары сферических координат с некотором номером однозначно определяет выбор сферических координат со всеми остальными номерами. Следовательно, продолжение сферических координат вдоль пути однозначно определено в окрестности особой точки пути.

Преобразование упорядоченной пары $(\check{x}_1, \check{x}_2)$ в упорядоченную пару $(\check{x}'_1, \check{x}'_2)$ определяет элемент в группе $\mathbf{D}_4$. Этот элемент не зависит от выбора пути l в классе эквивалентных путей, определенных отношением гомотопности в группе $\pi_1(K_{0\circ}, x)$. Тем самым, определен гомоморфизм $\pi_1(K_{0\circ}, x) \to \mathbf{D}_4$, причем индуцированное отображение

$$\eta : K_{0\circ} \to K(\mathbf{D}_4, 1) \tag{78}$$

совпадает со структурным отображением, которое было определено ранее. Структурное отображение

$$\hat{\eta} : K_{0\circ} \to K(\mathbf{E}, 1) \tag{79}$$

определено аналогичной конструкцией. Нетрудно проверить, что ограничение структурного отображения η ($\hat{\eta}$) на компоненты связности одного элементарного страта $K_{0\circ}(1, \dots, r)$ ($\hat{K}_{0\circ}(1, \dots, r)$) гомотопно отображению в подпространства $K(\mathbf{I}_a, 1)$, $K(\mathbf{I}_b, 1)$, $K(\mathbf{I}_d, 1)$ ($K(\mathbf{E}_a, 1)$, $K(\mathbf{E}_b, 1)$, $K(\mathbf{E}_d, 1)$), что соответствует типу и подтипу элементарного страта.

Рассмотрим элементарный страт $K_0(k_1, \dots, k_s) \subset K_{0\circ}^{(r_0-s)}$ (соответственно $\hat{K}_0(k_1, \dots, k_s) \subset \hat{K}_{0\circ}^{(r_0-s)}$) глубины $(r_0 - s)$. Обозначим через

$$\pi : K_0(k_1, \dots, k_s) \to K(\mathbb{Z}/2, 1) \tag{80}$$

(соответственно через

$$\hat{\pi} : \hat{K}_0(k_1, \dots, k_s) \to K(\mathbb{Z}/2, 1)) \tag{81}$$

– классифицирующее отображение, отвечающее за перестановку точек пары при обходе по замкнутому пути на этом элементарном страте. Отображение π (соответственно $\hat{\pi}$) совпадает с композицией

$$K_0(k_1, \dots, k_s) \xrightarrow{\eta} K(\mathbf{D}_4, 1) \xrightarrow{p} K(\mathbb{Z}/2, 1),$$

(соответственно с композицией

$$\hat{K}_0(k_1, \dots, k_s) \xrightarrow{\hat{\eta}} K(\mathbf{E}, 1) \xrightarrow{\hat{p}} K(\mathbb{Z}/2, 1),)$$

где $K(\mathbf{D}_4, 1) \xrightarrow{p} K(\mathbb{Z}/2, 1)$ (соответственно $K(\mathbf{E}, 1) \xrightarrow{\hat{p}} K(\mathbb{Z}/2, 1))$ – отображение классифицирующих пространств, которое индуцировано эпиморфизмом $\mathbf{D}_4 \to \mathbb{Z}/2$ с ядром $\mathbf{I}_c \subset \mathbf{D}_4$ (соответственно эпиморфизмом $\mathbf{E} \to \mathbb{Z}/2$ с ядром $\mathbf{E}_c \subset \mathbf{E}$).

Лемма 32. *Ограничение отображения* (80) (*соответственно* (81)) *на каждый элементарный страт гомотопно композиции*

$$\pi_0 : K_0(k_1, \dots, k_s) \to S^1 \subset K(\mathbb{Z}/2, 1), \tag{82}$$

(*соответственно композиции*

$$\hat{\pi}_0 : \hat{K}_0(k_1, \dots, k_s) \to S^1 \subset K(\mathbb{Z}/2, 1),) \tag{83}$$

где $S^1 \subset K(\mathbb{Z}/2, 1)$*– вложение 1-мерного остова классифицирующего пространства,* π_0 (*соответственно* $\hat{\pi}_0$)*–некоторое отображение.*

Доказательство Леммы 32

Структурное отображение η определяется преобразованием координат на стратах типов $\mathbf{I}_a$, $\mathbf{I}_b$, $\mathbf{I}_d$. Отображение (80) определяется преобразованием выбранной (произвольной) пары координат с вычетами $\mathbf{i}$, $-\mathbf{i}$ для страта $\mathbf{I}_a$ и с вычетами $+1$, -1 для страта $\mathbf{I}_b$. Для страта типа $\mathbf{I}_d$ отображение (80) нулевое. Преобразование выбранной координаты на страте данного типа определяется отображением вида (82), что доказывает требуемое в случае отображения (80). Для отображения (83) доказательство аналогично. Лемма 32 доказана.

Нам также потребуется лемма о 3-точечном конфигурационном пространстве, ассоциированном с накрытием $p : U(k_1, \dots, k_s) \to J_0(k_1, \dots, k_s)$ над элементарным стратом полиэдра J_0. Сформулируем требуемые определения (см. ниже Лемма 33).

Для накрытия $p : U(k_1, \dots, k_s) \to J_0(k_1, \dots, k_s)$, $1 \le k_1 < \dots < k_s \le r_0$, $r_{0,min} \le s$ над произвольным элементарным стратом пространства J_0 определим конфигурационное пространство $\bar{K}3_0(k_1, \dots, k_s)$ по формуле:

$$\bar{K}3_0(k_1, \dots, k_s) =$$

$$\{(x, y, z) \in U^3(k_1, \dots k_s) : p(x) = p(y) = p(z), x \ne y, y \ne z, z \ne x\}. \tag{84}$$

На пространстве $U^3(k_1, \dots k_s)$ действует группа Σ_3:

$$\sigma : \Sigma_3 \times U^3(k_1, \dots, k_s) \to U^3(k_1, \dots, k_s). \tag{85}$$

Ограничение действия (85) на подпространство (84) является свободным действием, которое мы обозначим через

$$\sigma_{K3_0} : \Sigma_3 \times \bar{K}3_0(k_1, \dots, k_s) \to \bar{K}3_0(k_1, \dots, k_s). \tag{86}$$

Определено факторпространство по действию (86), которое мы обозначим через $K3_0(k_1,\dots,k_s)$.

На пространстве $\bar{K}3_0(k_1,\dots,k_s)$ определена свободная инволюция, индуцированная покоординатной инволюцией в накрывающем накрытия $U(k_1,\dots,k_s) \to \hat{U}(k_1,\dots,k_s)$, обозначаемая через $\sim$.

Определено свободное действие на факторпространствах соответствующих инволюций

$$\hat{\sigma}_{K3_0} : \Sigma_3 \times \bar{K}3_0(k_1,\dots,k_s)/\sim \to \bar{K}3_0(k_1,\dots,k_s)/\sim . \tag{87}$$

Определено пространство $\hat{K}3_0(k_1,\dots k_s)$, которое является базой 2-листного накрытия $K3_0(k_1,\dots,k_s) \to \hat{K}3_0(k_1,\dots k_s)$, определенное как факторпространство по действию (87).

Определена коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} K3_0(k_1,\dots,k_s) & \xrightarrow{\sigma_0} & K(\Sigma_3,1) \\ \downarrow & & \| \\ \hat{K}3_0(k_1,\dots,k_s) & \xrightarrow{\hat{\sigma}_0} & K(\Sigma_3,1), \end{array} \tag{88}$$

в которой через σ_0 (соответственно $\hat{\sigma}_0$) обозначены характеристические отображения накрытий (86) (соответственно (87)).

Лемма 33. *Отображения σ_0, $\hat{\sigma}_0$ в диаграмме* (88) *тривиальны.*

Доказательство Леммы 33

Поскольку группа накрытия $U(k_1,\dots,k_s) \to J_0(k_1,\dots,k_s)$ не содержит элементов нечетного порядка, то группа накрытия (86) может содержать лишь нетривиальные элементы порядка степеней 2. Пусть $l : S^1 \to \bar{K}3_0(k_1,\dots,k_s)$– замкнутый путь, вдоль которого точка с координатами $(\check{x},\check{y},\check{z}) \in \bar{K}3_0(k_1,\dots,k_s)$ преобразуется в точку с координатами $(\check{x}_1,\check{y}_1,\check{z}') \in \bar{K}3_0(k_1,\dots,k_s)$ в том же слое накрытия (86). Тогда по условию координаты $\check{z}$ и $\check{z}'$ либо совпадают, либо связаны преобразованием на образующую из $\mathbf{I}_d$. Но тогда и пары координат $(\check{x},\check{x}_1)$, $(\check{y},\check{y}_1)$ также связаны таким же преобразованием, поскольку при переносе вдоль пути каждая из трех соответствующих координат точек слоя накрытия (86) меняется одинаково. Следовательно, три пары точек с соответствующими координатами совпадают. Доказано, что отображение σ_0 тривиально. Доказательство для отображения $\hat{\sigma}_0$ аналогично. Лемма 33 доказана.

Построение структурных отображений $\zeta : K_{1\circ} \to K(\mathbf{H}, 1)$, $\hat{\eta}$: $\hat{K}_{1\circ} \to K(\mathbf{G}, 1)$ при помощи координат

Пусть $x = [(x_1, x_2)]$ – отмеченная точка на $K_{1\circ}$, лежащая на максимальном элементарном страте. Рассмотрим замкнутый путь $\lambda : S^1 \to K_{1\circ}$, начинающийся и заканчивающийся в этой отмеченной точке, пересекающий особые страты глубины 1 в общем положении по конечному множеству точек. Пусть $(\check{x}_1, \check{x}_2)$– выбор сферических прообразов точки x. Определим другую пару $(\check{x}'_1, \check{x}'_2)$ сферических прообразов точки x, которая будет называться системой координат, полученной в результате естественного преобразования системы координат $(\check{x}_1, \check{x}_2)$ вдоль пути λ.

В регулярных точках пути λ семейство пар сферических прообразов в однопараметрическом семействе меняется непрерывно, что однозначно определяет прообразы в конечной точке пути по начальным значениям. При пересечении пути со стратом глубины 1 соответствующая пара сферических координат претерпевает разрыв. Поскольку все остальные координаты остаются регулярными, их продолжение вдоль пути в критический момент времени однозначно определено. Но для заданной точки x на элементарном страте глубины 0 пространства $K_{1\circ}$ выбор хотябы одной пары сферических координат с некотором номером однозначно определяет выбор сферических координат со всеми остальными номерами. Следовательно, продолжение сферических координат вдоль пути однозначно определено в окрестности особой точки пути.

Преобразование упорядоченной пары $(\check{x}_1, \check{x}_2)$ в упорядоченную пару $(\check{x}'_1, \check{x}'_2)$ определяет элемент в группе $\mathbf{H}$. Этот элемент не зависит от выбора пути λ в группе $\pi_1(K_{1\circ}, x)$. Тем самым, определен гомоморфизм $\pi_1(K_{1\circ}, x) \to \mathbf{H}$. Индуцированное отображение

$$\zeta : K_{1\circ} \to K(\mathbf{H}, 1) \tag{89}$$

совпадает со структурным отображением. Структурное отображение

$$\hat{\zeta} : K_{1\circ} \to K(\mathbf{G}, 1) \tag{90}$$

определено аналогичной конструкцией. Нетрудно проверить, что ограничение структурного отображения ζ (соответственно $\hat{\zeta}$) на один элементарный страт $K_1(1, \dots, r)$ (соответственно $\hat{K}_1(1, \dots, r)$) гомотопно отображению в подпространства $K(\mathbf{Q}_a, 1)$, $K(\mathbf{E}_b, 1)$, $K(\mathbf{I}_a, 1)$ (в классифицирующие пространства, соответствующие квадратичным расширениям групп $\mathbf{Q}_a$, $\mathbf{E}_b$, $\mathbf{I}_a$).

Рассмотрим элементарный страт $K_1(k_1,\dots,k_s)$ (соответственно $\hat{K}_1(k_1,\dots,k_s)$) глубины $(r_1 - s)$ пространства $K_{1\circ}$ (соответственно $\hat{K}_{1\circ}$). Обозначим через

$$\pi : K_1(k_1,\dots,k_s) \to K(\mathbb{Z}/2,1) \tag{91}$$

(соответственно через

$$\hat{\pi} : \hat{K}_1(k_1,\dots,k_s) \to K(\mathbb{Z}/2,1)) \tag{92}$$

– классифицирующее отображение, отвечающее за перестановку точек пары при обходе по замкнутому пути на элементарном страте. Отображение π (соответственно $\hat{\pi}$) совпадает с композицией

$$K_1(k_1,\dots,k_s) \xrightarrow{\zeta} K(\mathbf{H},1) \xrightarrow{p} K(\mathbb{Z}/2,1),$$

(соответственно с

$$\hat{K}_1(k_1,\dots,k_s) \xrightarrow{\hat{\zeta}} K(\mathbf{G},1) \xrightarrow{\hat{p}} K(\mathbb{Z}/2,1),$$

где $K(\mathbf{H},1) \xrightarrow{p} K(\mathbb{Z}/2,1)$ (соответственно $K(\mathbf{G},1) \xrightarrow{\hat{p}} K(\mathbb{Z}/2,1)$) – отображение классифицирующих пространств, которое индуцировано эпиморфизмом $\mathbf{H} \to \mathbb{Z}/2$ с ядром $\mathbf{H}_c \subset \mathbf{H}$ (соответственно эпиморфизмом $\mathbf{G} \to \mathbb{Z}/2$ с ядром $\mathbf{G}_c \subset \mathbf{G}$).

Лемма 34. *Отображение* (91) (*соответственно* (92)) *гомотопно композиции*

$$\pi_1 : K_1(k_1,\dots,k_s) \to \mathbb{RP}^2 \subset K(\mathbb{Z}/2,1), \tag{93}$$

(*соответственно*

$$\hat{\pi}_1 : \hat{K}_1(k_1,\dots,k_s) \to \mathbb{RP}^2 \subset K(\mathbb{Z}/2,1),) \tag{94}$$

где $\mathbb{RP}^2 \subset K(\mathbb{Z}/2,1)$*– вложение 2-мерного остова классифицирующего пространства,* π_1 (*соответственно* $\hat{\pi}_1$)*–некоторое отображение.*

Доказательство Леммы 34

Структурное отображение ζ определяется преобразованием координат на стратах типов $\mathbf{Q}_a$, $\mathbf{H}_b$, $\mathbf{I}_a$. Отображение (80) определяется преобразованием выбранной (произвольной) пары координат с вычетами $\mathbf{i}$, $-\mathbf{i}$ для страта $\mathbf{Q}_a$ и с вычетами $+1$, -1 для страта $\mathbf{H}_b$. Для страта типа

$\mathbf{I}_a$ отображение (91) нулевое. Преобразование выбранной координаты на страте данного типа определяется отображением вида (93), поскольку как отображение $S^3/\mathbf{Q}_a \to K(\mathbb{Z}/2, 1)$, соответствующее эпиморфизму $\mathbf{Q}_a \to Z/2$ с ядром $\mathbf{I}_a \subset \mathbf{Q}_a$, так и отображение $S^3/\mathbf{i} \to K(\mathbb{Z}/2, 1)$, соответствующее эпиморфизму $\mathbf{I}_a \to Z/2$ с ядром $\mathbf{I}_d \subset \mathbf{I}_a$, гомотопны отображениям в 2-мерный остов классифицирующего пространства. Это доказывает требуемое в случае отображения (91). Для отображения (94) доказательство аналогично. Лемма 34 доказана.

Нам также потребуется лемма, аналогичная Лемме 33. Сформулируем требуемые определения.

Для накрытия $p : U(k_1, \dots, k_s) \to J_1(k_1, \dots, k_s)$, $1 \le k_1 < \dots < k_s \le r_1$, $r_{1,min} \le s$ над произвольным элементарным стратом определим конфигурационное пространство $\bar{K}3_1(k_1, \dots, k_s)$ по формуле:

$$\bar{K}3_1(k_1, \dots, k_s) =$$

$$\{(x, y, z) \in U^3(k_1, \dots k_s) : p(x) = p(y) = p(z), x \ne y, y \ne z, z \ne x\}. \quad (95)$$

На пространстве $U^3(k_1, \dots k_s)$ действует группа Σ_3, переставляя координаты:

$$\sigma : \Sigma_3 \times U^3(k_1, \dots, k_s) \to U^3(k_1, \dots, k_s). \quad (96)$$

Ограничение действия (96) на подпространство (95) является свободным действием, которое мы обозначим через

$$\sigma_{K3_1} : \Sigma_3 \times \bar{K}3_1(k_1, \dots, k_s) \to \bar{K}3_1(k_1, \dots, k_s). \quad (97)$$

Определено факторпространство по действию (97), которое мы обозначим через $K3_1(k_1, \dots, k_s)$.

На пространстве $\bar{K}3_1(k_1, \dots, k_s)$ определена свободная инволюция, индуцированная покоординатной инволюцией в накрывающем накрытия $U(k_1, \dots, k_s) \to \hat{U}(k_1, \dots, k_s)$, обозначаемая ниже снова через $\sim$. Определено свободное действие на факторпространствах соответствующих инволюций

$$\hat{\sigma}_{K3_1} : \Sigma_3 \times \bar{K}3_1(k_1, \dots, k_s)/\sim \to \bar{K}3_1(k_1, \dots, k_s)/\sim. \quad (98)$$

Определено пространство $\hat{K}3_1(k_1, \dots k_s)$, которое является базой 2-листного накрытия $K3_1(k_1, \dots, k_s) \to \hat{K}3_1(k_1, \dots k_s)$, определенное как факторпространство по действию (98).

Определена коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} K3_1(k_1,\dots,k_s) & \xrightarrow{\sigma_1} & K(\Sigma_3,1) \\ \downarrow & & \| \\ \hat{K}3_1(k_1,\dots,k_s) & \xrightarrow{\hat{\sigma}_1} & K(\Sigma_3,1), \end{array} \tag{99}$$

в которой через σ_1 (соответственно $\hat{\sigma}_1$) обозначены характеристические отображения накрытий (97) (соответственно (98)).

Лемма 35. *Отображения σ_1, $\hat{\sigma}_1$ в диаграмме* (99) *тривиальны.*

Доказательство Леммы 35

Доказательство аналогично доказательству Леммы 33.

Подпространства $K3_{0\circ} \subset K3_0$, $\hat{K}3_{0\circ} \subset \hat{K}3_0$

Определим пространство $K3_0$ по формуле

$$[(x,y,z)], (x,y,z) \in (\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k})^3 | p_{J_0}(x) = p_{J_0}(y) = p_{J_0}(z) \in J_0^{(0)} \setminus J_0^{(r_{min})},$$

(где [ ] означает класс эквивалентности троек при изменении порядка точек) причем если $x = y = z$, то $p_{J_0}(x)$ не принадлежит страту пространства J_0 максимальной размерности. Определим подпрстранство $K3_{0\circ} \subset K3_0$ как простроанство, полученное из $K3_0$ в результате удаления неупорядоченных троек точек, попавших на двойную или тройную диагональ, т.е. троек $[(x,y,z)]$, для которых выполнено хотябы одно из равенств $x = y$, $y = z$, $z = x$. Подпространство $K3_{0\circ} \subset K3_0$ является двулистно накрывающим пространством над подпространством $\hat{K}3_{0\circ} \subset K3_0$. Определения этих накрытий стандартно и опускается.

Пространства $K3_{0\circ}$, $\hat{K}3_{0\circ}$ можно определить по-другому при помощи склеек элементарных стратов различной глубины s, $0 \le s \le i_{max,0}$. Пространство $K3_{0\circ}$ (соответственно $\hat{K}3_{0\circ}$) склеивается из элементарных стратов $K3_1(k_1,\dots,k_s)$ (соответственно $\hat{K}3_1(k_1,\dots,k_s)$) глубины i, $0 \le i \le r_{max,0}$. При этом используются элементарные страты, состоящие из неупорядоченных троек попарно различных точек.

Подпространства $K3_{1\circ} \subset K3_1$, $\hat{K}3_{1\circ} \subset \hat{K}3_1$

Построение пространств $K3_{1\circ}$, $\hat{K}3_{1\circ}$ полностью аналогично построению пространств $K3_{0\circ}$, $\hat{K}3_{0\circ}$.

Построение пространств $RK_{0\circ}$, $R\hat{K}_{0\circ}$, RK_0, $R\hat{K}_0$ для разрешения особенностей и построение 3-листных накрытий $p3_\circ : RK_{0\circ} \to K3_{0\circ}$, $\hat{p}3_\circ : R\hat{K}_{0\circ} \to \hat{K}3_{0\circ}$; $p3 : RK_0 \to K3_0$, $\hat{p}3 : R\hat{K}_0 \to \hat{K}3_0$.

Рассмотрим подполиэдр $K_{0\circ}^{(s)} \subset K_0$, определенный в результате объединения всех особых стратов глубины s, $0 \le s \le r_{min,0}$, не лежащих целиком на диагонали или антидиагонали.

Рассмотрим диаграмму (45) отображений классифицирующих пространств. Эта диаграмма индуцирует следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} RK_{0\circ}^{(s)} & \longrightarrow & R\hat{K}_{0\circ}^{(s)} \\ \downarrow p3_\circ^{(s)} & & \downarrow \hat{p}3_\circ^{(s)} \\ K3_{0\circ}^{(s)} & \longrightarrow & \hat{K}3_{0\circ}^{(s)}. \end{array} \qquad (100)$$

Пространство $RK_{0\circ}^{(s)}$ (соответственно $R\hat{K}_{0\circ}^{(s)}$) в этой диаграмме определим как пространство упорядоченных троек неупорядоченных пар $\{[x,y],[y,z],[z,x]\}$, $x,y,z \in p^{-1}(J_0^{(s)}) \subset \mathbb{RP}^{n-k}$, $x \ne y, y \ne z, z \ne x$, $p(x)=p(y)=p(z)$ (соответственно как факторпространство указанных троек при умножении на $\mathbf{i}$). Пространство $RK_{0\circ}^{(s)}$ (соответственно $R\hat{K}_{0\circ}^{(s)}$) является накрывающим пространством 3-листного накрытия $p3_\circ^{(s)}$ (соответственно $\hat{p}3_\circ^{(s)}$) над пространством $K3_{0\circ}^{(s)}$ (соответственно $\hat{K}3_\circ^{(s)}$). Накрытие $p3_\circ^{(s)}$ (соответственно $\hat{p}3_\circ^{(s)}$) над каждым элементарным стратом $K3_0(k_1,\dots k_s)$ (соответственно $K3_0(k_1,\dots k_s)$) определено по формуле $\{[x,y],[y,z],[z,x]\} \to [x,y,z]$. Пространства $RK_{0\circ}^{(s)}$ $R\hat{K}_{0\circ}^{(s)}$ включены в коммутативную диаграмму отображений (накрытий):

$$\begin{array}{ccc} RK_{0\circ}^{(s)} & \longrightarrow & R\hat{K}_{0\circ}^{(s)} \\ \downarrow \pi3_\circ^{(s)} & & \downarrow \hat{\pi}3_\circ^{(s)} \\ K_{0\circ}^{(s)} & \longrightarrow & \hat{K}_{0\circ}^{(s)}. \end{array} \qquad (101)$$

В этой диаграмме отображение (накрытие) $\pi3_\circ^{(s)}$ (соответственно $\hat{\pi}3_\circ^{(s)}$) является тавтологическим накрытием, переводящим первую неупорядоченную пару точек $[x,y]$, $x,y \in p^{-1}(J_0^{(s)}) \subset \mathbb{RP}^{n-k}$, $p(x)=p(y)$ в ту же самую неупорядоченную пару точек (соответственно в класс эквивалентности той же пары при действии $\mathbf{i}$), которая рассматривается как точка на $K^{(s)}_{0\circ}$ (соответственно на $\hat{K}^{(s)}_{\circ}$).

Пространство $RK^{(s)}_0$ (соответственно $R\hat{K}^{(s)}_0$) получается из $RK^{(s)}_{0\circ}$ (соответственно из $R\hat{K}^{(s)}_{0\circ}$) в результате присоединения всех элементарных диагональных и антидиагональных стратов. Присоединение диагональных и антидиагональных стратов происходит так, что определена следующая диаграмма 3-листных накрытий:

$$\begin{array}{ccc} RK^{(s)}_0 & \longrightarrow & R\hat{K}^{(s)}_0 \\ \downarrow p3^{(s)} & & \downarrow \hat{p}3^{(s)} \\ K3^{(s)}_0 & \longrightarrow & \hat{K}3^{(s)}_0, \end{array} \qquad (102)$$

которая получается дизъюнктным объединением диаграммы (100) с диаграммой тривиальных 3-листных накрытий над диагональными и антидиагональными стратами.

Лемма 36. *Композиция* $\eta^{(s)} \circ \pi 3^{(s)}_{\circ} : RK^{(s)}_{0\circ} \longrightarrow K^{(s)}_{0\circ} \longrightarrow K(\mathbf{D}_4, 1)$, *где* $\eta^{(s)}$*–ограничение структурного отображения* η (*см.* (78)) *на соответствующий элементарный страт глубины* s, *гомотопна отображению* $i_{\mathbf{I}_d,\mathbf{D}_4} \circ \eta_{RK^{(s)}_{0\circ}} : RK^{(s)}_{0\circ} \longrightarrow K(\mathbf{I}_d, 1) \longrightarrow K(\mathbf{D}_4, 1)$, *где* $\eta_{RK^{(s)}_{0\circ}} : RK^{(s)}_{0\circ} \longrightarrow K(\mathbf{I}_d, 1)$ *– корректно определенное отображение, которое назовем структурным отображением.*

Композиция $\hat{\eta}^{(s)} \circ \hat{\pi} 3^{(s)}_{\circ} : R\hat{K}^{(s)}_{0\circ} \longrightarrow \hat{K}^{(s)}_{0\circ} \longrightarrow K(\mathbf{E}, 1)$, *где* $\hat{\eta}^{(s)}$*–ограничение структурного отображения* $\hat{\eta}$ (*см.* (79)) *на соответствующий элементарный страт глубины* s, *гомотопна отображению* $i_{\mathbf{I}_a,\mathbf{E}} \circ \eta_{R\hat{K}^{(s)}_{0\circ}} : R\hat{K}^{(s)}_{0\circ} \longrightarrow K(\mathbf{I}_a, 1) \longrightarrow K(\mathbf{E}, 1)$, *где* $\hat{\eta}_{RK^{(s)}_{0\circ}} : R\hat{K}^{(s)}_{0\circ} \longrightarrow K(\mathbf{I}_a, 1)$ *– корректно определенное отображение, которое назовем структурным отображением.*

Доказательство Леммы 36

Ограничение структурного отображения η (соответственно $\hat{\eta}$) на элементарный страт гомотопно одному из отображений в подпространство $K(\mathbf{I}_b, 1) \subset K(\mathbf{D}_4, 1)$ $K(\mathbf{I}_a, 1) \subset K(\mathbf{D}_4, 1)$, $K(\mathbf{I}_d, 1) \subset K(\mathbf{D}_4, 1)$ (соответственно в подпространство $K(\mathbf{E}_b, 1) \subset K(\mathbf{E}, 1)$, $K(\mathbf{E}_a, 1) \subset K(\mathbf{E}, 1)$, $K(\mathbf{E}_d, 1) \subset K(\mathbf{E}, 1)$). Группы $\mathbf{E}_b$, $\mathbf{E}_a$ и $\mathbf{E}_d$ являются квадратичными расширениями групп $\mathbf{I}_b$, $\mathbf{I}_a$, $\mathbf{I}_d$ соответственно и определены в диаграммах (46), (48), (47). Доказательство вытекает из

Леммы 33, поскольку отображение $\pi 3^{(s)}_{\circ}$ естественно по отношению к каноническому накрытию в образе и прообразе. Доказательство для отображения $\hat{\eta}$ аналогично. Лемма 36 доказана.

Определим коммутативную диаграмму 3-листных накрытий:

$$\begin{array}{ccc} RK_{0\circ} & \longrightarrow & R\hat{K}_{0\circ} \\ \downarrow p3_{\circ} & & \downarrow \hat{p}3_{\circ} \\ K3_{0\circ} & \longrightarrow & \hat{K}3_{0\circ}, \end{array} \tag{103}$$

и коммутативную диаграмму отображений:

$$\begin{array}{ccc} RK_{0\circ} & \longrightarrow & R\hat{K}^1_{0\circ} \\ \downarrow \pi 3_{\circ} & & \downarrow \hat{\pi}3_{\circ} \\ K_{0\circ} & \longrightarrow & \hat{K}_{0\circ}. \end{array} \tag{104}$$

Диаграмма (103) (соответственно (104)) определена аналогичными формулами как (100) (соответственно (101)), вместо элементарного страта в базе накрытия рассматривается пара пространств $K3_{0\circ} \to \hat{K}3_{0\circ}$ (соответственно $K_{0\circ} \to \hat{K}_{0\circ}$). Диаграмма (104) также определена аналогично. Диаграммы (103), (104) можно определить по-другому как результат склейки семейства диаграмм (100), (101) над всеми элементарными стратами глубины s, $0 \le s \le i_{max,0}$.

Определим пространства RK_0, $R\hat{K}_0$ и диаграмму накрытий (вертикальные стрелки):

$$\begin{array}{ccc} RK_0 & \longrightarrow & R\hat{K}_0 \\ \downarrow p3 & & \downarrow \hat{p}3 \\ K3_0 & \longrightarrow & \hat{K}3_0, \end{array} \tag{105}$$

$$\begin{array}{ccc} RK_0 & \longrightarrow & R\hat{K}_0 \\ \downarrow \pi 3 & & \downarrow \hat{\pi}3 \\ K_0 & \longrightarrow & \hat{K}_0. \end{array} \tag{106}$$

Пространство RK_0 (соответственно $R\hat{K}_0$) определим как замыкание пространства $RK_{0\circ}$ (соответственно $R\hat{K}_{0\circ}$) т.е. как результат присоединения всех элементарных диагональных и антидиагональных стратов глубины i, $1 \le i \le i_{max,0}$, лежащих на границе. Присоединение диагональных и антидиагональных стратов происходит так, что каждый присоединенный диагональный или антидиагональный элементарный глубины i страт лежит в границе ровно одного элементарного страта глубины $(i-1)$. Пространства RK_0, $R\hat{K}_0$ разрешающие особенности включены в диаграграмму (57).

Слои над граничными элементарными стратами $K3_0 \setminus K3_{0\circ}$ (соответственно $\hat{K}3_0 \setminus \hat{K}3_{0\circ}$) делятся на следующие типы. Для элементарного страта первого типа пространства $K3_0 \setminus K3_{0\circ}$ (соответственно $\hat{K}3_0 \setminus \hat{K}3_{0\circ}$)) прообраз при накрытии $p3$ (соответственно $\hat{p}3^{(s)}$) состоит из дизъюнктного объединения элементарного страта, соответствующего граничному страту полиэдра $Q_{diag} \subset K_0$ или $Q_{antidiag} \subset K_0$, (соответственно $\hat{Q}_{diag} \subset \hat{K}_0$ или $\hat{Q}_{antidiag} \subset \hat{K}_0$) и пары одинаковых регулярных элементарных стратов.

Для элементарного страта второго типа пространства $K3_0 \setminus K3_{0\circ}$ (соответственно $\hat{K}3_0 \setminus \hat{K}3_{0\circ}$), прообраз состоит из трех одинаковых экземпляров элементарного страта, каждый из которых соответствует граничному страту $Q_{diag} \subset K_0$ или $Q_{antidiag} \subset K_0$ (соответственно $\hat{Q}_{diag} \subset \hat{K}_0$ или $\hat{Q}_{antidiag} \subset \hat{K}_0$).

Определим пространство $RQ_0 = RQ_{diag} \cup RQ_{antydiag}$ (соответственно $R\hat{Q}_0 = R\hat{Q}_{diag} \cup R\hat{Q}_{antydiag}$), включенное в диаграмму (58) (соответственно в диаграмму (59)). Подпространство $RQ_{diag} \subset RK_0$ (соответственно подпространство $RQ_{diag} \subset RK_0$) определим как регулярную окрестность объединения всех диагональных (соответственно антидиагональных) стратов произвольного типа в подпространстве всех диагональных стратов. Подпространства $R\hat{Q}_{diag} \subset R\hat{K}_0$ (соответственно подпространство $R\hat{Q}_{diag} \subset R\hat{K}_0$) определяются полностью аналогично.

Построение пространств $RK_{1\circ}$, $R\hat{K}_{1\circ}$, RK_1, $R\hat{K}_1$ для разрешения особенностей и построение 3-листных накрытий $p3_\circ : RK_{1\circ} \to K3_{1\circ}$, $\hat{p}3_\circ : R\hat{K}_{1\circ} \to \hat{K}3_{1\circ}$; $p3 : RK_1 \to K3_1$, $\hat{p}3 : R\hat{K}_1 \to \hat{K}3_1$.

Построения аналогичны предыдущим. Пространства RK_1, $R\hat{K}_1$ разрешающие особенности включены в диаграмму (64). Сформулируем лемму, аналогичную лемме 36.

Лемма 37. *Композиция* $\zeta^{(s)} \circ \pi 3_\circ^{(s)} : RK_{1\circ}^{(s)} \longrightarrow K_{1\circ}^{(s)} \longrightarrow K(\mathbf{H},1)$ *гомотопна отображению* $i_{\mathbf{I}_a,\mathbf{H}} \circ \zeta_{RK_{1\circ}^{(s)}} : RK_{1\circ}^{(s)} \longrightarrow K(\mathbf{I}_a,1) \longrightarrow K(\mathbf{H},1)$, *где* $\zeta_{RK^{(s)}_{1\circ}} : RK^{(s)}_{1\circ} \longrightarrow K(\mathbf{I}_a, 1)$ *– корректно определенное отображение, которое назовем структурным отображением.*

Композиция $\hat{\zeta}^{(s)} \circ \pi 3^{(s)}_{\circ} : R\hat{K}^{(s)}_{1\circ} \longrightarrow \hat{K}^{(s)}_{1\circ} \longrightarrow K(\mathbf{G}, 1)$ *гомотопна отображению* $i_{\mathbf{I}_a,\mathbf{G}} \circ \zeta_{R\hat{K}^{(s)}_{1\circ}} : R\hat{K}^{(s)}_{1\circ} \longrightarrow K(\mathbf{Q}_a, 1) \longrightarrow K(\mathbf{G}, 1)$, *где* $\zeta_{R\hat{K}^{(s)}_{1\circ}} : R\hat{K}^{(s)}_{1\circ} \longrightarrow K(\mathbf{Q}_a, 1)$ *– корректно определенное отображение, которое назовем структурным отображением.*

Доказательство Леммы 37

Доказательство аналогично доказательству Леммы 36 и вытекает из Леммы 35.

Приступим к построению отображений в диаграммах разрешающих особенности.

Отображения $\phi^{(s)}_0$, $\hat{\phi}^{(s)}_0$ в диаграмме (54)

Определим отображение $\phi^{(s)}_0$ при помощи структурного отображения $i_{\mathbf{I}_d,\mathbf{I}_a} \circ \eta_{RK^{(s+1)}_{0\circ}} : RK^{(s+1)}_{0\circ} \to K(\mathbf{I}_d, 1)$, построенного в Лемме 36.

Отображение $\phi^{(s)}_{0\circ}$ продолжается до отображения $\phi^{(s)}_0 : RK^{(s)}_0 \to K(\mathbf{I}_a, 1)$. Для построенного отображения выполнены граничные условия (62), (63).

Построение отображения $\hat{\phi}^{(s)}_0 : R\hat{K}^{(s)}_0 \to K(\mathbf{I}_a, 1)$ полностью аналогично.

Отображения $\phi^{(s)}_1$, $\hat{\phi}^{(s)}_1$ в диаграмме (61)

Это построение аналогично предыдущему и опускается.

Для определения отображений ϕ_0 $\hat{\phi}_0$ в диаграмме (57) нам потребуются вспомогательные построения.

Построение вспомогательных пространств $X^s_{0\circ}$, X^s_0, $Y^s_{0\circ}$, Y^s_0, $Z^s_{0\circ}$, Z^s_0

Определим пространство $K^{(s)}_{0\circ} \cup K^{(s+1)}_{0\circ} / \sim$ (соответственно $\hat{K}^{(s)}_{0\circ} \cup \hat{K}^{(s+1)}_{0\circ} / \sim$), которое обозначим через $Y^s_{0\circ}$ (сооответственно через $\hat{Y}^s_{0\circ}$). Пространство $Y^s_{0\circ}$ получено в результате подклейки пространства $K^{(s+1)}_{0\circ}$

дизъюнктного объединения элементарных стратов глубины $(s+1)$ к пространству $K_{0\circ}^{(s)}$ дизъюнктного объединения элементарных стратов глубины s. Произвольный элементарный страт подклеивается глубины $(s+1)$ к тем элементарным стратам глубины s, на границах которых он содержится. Таким образом, справедлива формула:

$$Y_{0\circ}^{s} = K_{0\circ}^{s} \setminus K_{0\circ}^{s+2}.$$

Для пространства $\hat{Y}_{0\circ}^{s}$ справедлива аналогичная формула:

$$\hat{Y}_{0\circ}^{s} = \hat{K}_{0\circ}^{s} \setminus \hat{K}_{0\circ}^{s+2}.$$

Определим пространство $RK_{0\circ}^{(s)} \cup RK_{0\circ}^{(s+1)}/\sim$ (соответственно $R\hat{K}_{0\circ}^{(s)} \cup R\hat{K}_{0\circ}^{(s+1)}/\ \sim$), которое обозначим через $X_{0\circ}^{s}$ (сооответственно через $\hat{X}_{0\circ}^{s}$). Это пространство получено в результате подклейки пространства $RK_{0\circ}^{(s+1)}$ дизъюнктного объединения элементарных стратов глубины $s+1$ к пространству $RK_{0\circ}^{(s)}$ дизъюнктного объединения элементарных стратов глубины s. Произвольный элементарный страт подклеивается глубины $s+1$ к тем элементарным стратам глубины s, на границах которых он содержится. Таким образом, справедлива формула:

$$X_{0\circ}^{s} = RK_{0\circ}^{s} \setminus RK_{0\circ}^{s+2}.$$

Для пространства $\hat{X}_{0\circ}^{s}$ справедлива аналогичная формула:

$$\hat{X}_{0\circ}^{s} = R\hat{K}_{0\circ}^{s} \setminus R\hat{K}_{0\circ}^{s+2}.$$

Определим пространство $RK_{0\circ}^{(s-1)} \cup RK_{0\circ}^{(s)} \cup RK_{0\circ}^{(s+1)}/\ \sim$ (соответственно $\hat{R}K_{0\circ}^{(s-1)} \cup \hat{R}K_{0\circ}^{(s)} \cup \hat{R}K_{0\circ}^{(s+1)}/\ \sim$), которое обозначим через $Z_{0\circ}^{s-1}$ (сооответственно через $\hat{Z}_{0\circ}^{s-1}$). Справедлива формула:

$$Z_{0\circ}^{s-1} = RK_{0\circ}^{s-1} \setminus RK_{0\circ}^{s+2}.$$

Для пространства $\hat{Z}_{0\circ}^{s-1}$ справедлива аналогичная формула:

$$\hat{Z}_{0\circ}^{s-1} = R\hat{K}_{0\circ}^{s} \setminus R\hat{K}_{0\circ}^{s+2}.$$

Определены естественные включения

$$j_{X_{0\circ}^{s}} : X_{0\circ}^{s} \subset Z_{0\circ}^{s-1}, \tag{107}$$

$$j_{\hat{X}_{0\circ}^{s}} : \hat{X}_{0\circ}^{s} \subset \hat{Z}_{0\circ}^{s-1}, \tag{108}$$

$$j_{Y^s_{0\circ}} : Y^s_{0\circ} \subset K^s_{0\circ}, \tag{109}$$

$$j_{\hat{Y}^s_{0\circ}} : \hat{Y}^s_{0\circ} \subset \hat{K}^s_{0\circ}. \tag{110}$$

Определены естественные проекции

$$p_{X^s_{0\circ}} : X^s_{0\circ} \to Y^s_{0\circ}, \tag{111}$$

$$p_{\hat{X}^s_{0\circ}} : \hat{X}^s_{0\circ} \to \hat{Y}^s_{0\circ}. \tag{112}$$

Определено пространство Y^s_0 в результате присоединения к пространству $Y^s_{0\circ}$ всех диагональных и антидиагональных стратов глубины s и $(s+1)$. Определено пространство Z^{s-1}_0 в результате пополнения пространства $Z^{s-1}_{0\circ}$ всеми диагональными и антидиагональными стратами глубины $(s+1)$ и s, которые лежат на границе какого-нибудь максимального страта глубины $(s-1)$ пространства $Z^{s-1}_{0\circ}$. Определено пространство X^s_0 по формуле $X^s_0 = Z^{s-1}_0 \setminus Z^{[s-1]}_0$, где подпространство $Z^{(s-1)}_0 \subset Z^{s-1}_0$ определяется как дизъюнктное объединение максимальных стратов глубины $(s-1)$. Аналогично определяются пространства $\hat{X}^s_0$, $\hat{Y}^s_0$ и $\hat{Z}^{s-1}_0$.

Определены естественные включения $i_{X^s_{0\circ}} : X^s_{0\circ} \subset X^s_0$, $i_{Y^s_{0\circ}} : Y^s_{0\circ} \subset Y^s_0$, $i_{Z^{s-1}_{0\circ}} : Z^{s-1}_{0\circ} \subset Z^{s-1}_0$, при этом определена коммутативная диаграмма, горизонтальные стрелки которой являются естественными вложениями:

$$\begin{array}{ccc} X^s_{0\circ} & \xrightarrow{i_{X^s_{0\circ}}} & X^s_0 \\ \downarrow p_{X^s_{0\circ}} & & \downarrow p_{X^s_0} \\ Y^s_{0\circ} & \xrightarrow{i_{Y^s_{0\circ}}} & Y^s_0. \end{array} \tag{113}$$

Аналогично определяется диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \hat{X}^s_{0\circ} & \xrightarrow{i_{\hat{X}^s_{0\circ}}} & \hat{X}^s_0 \\ \downarrow p_{\hat{X}^s_{0\circ}} & & \downarrow p_{\hat{X}^s_0} \\ \hat{Y}^s_{0\circ} & \xrightarrow{i_{\hat{Y}^s_{0\circ}}} & \hat{Y}^s_0. \end{array} \tag{114}$$

Определены структурные отображения $\eta_{Y^s_0} : Y^s_0 \to K(\mathbf{D}_4, 1)$, $\eta_{\hat{Y}^s_0} : \hat{Y}^s_0 \to K(\mathbf{E}, 1)$, которые являются продолжениями структурных отображений $\eta_{Y^s_{0\circ}} = \eta_{K_{0\circ}}|_{Y^s_{0\circ}}$, $\eta_{\hat{Y}^s_{0\circ}} = \eta_{\hat{K}_{0\circ}}|_{\hat{Y}^s_{0\circ}}$ при включениях $Y^s_{0\circ} \subset Y^s_0$, $\hat{Y}^s_{0\circ} \subset \hat{Y}^s_0$.

Обозначим композицию $\eta_{Y^s_0} \circ p_{X^s_0}$ через $\eta_{X^s_0} : X^s_0 \to K(\mathbf{D}_4, 1)$, композицию $\eta_{\hat{Y}^s_0} \circ p_{\hat{X}^s_0}$ через $\eta_{\hat{X}^s_0} : \hat{X}^s_0 \to K(\mathbf{E}, 1)$. Эти отображения также назовем структурными.

Определим подпространство $RQ^s_0 \subset X^s_0$ по формуле $RQ^s_0 = X^s_0 \cap RQ_0$, где $RQ_0 \subset RK_0$, $X^s \subset Z^{s-1}_0 \subset RK_0$ – подпространства в RK_0. Заметим, что пространство RQ^s_0 содержит подпространства $RQ^{(s)}_0 \subset RQ^s_0$, $RQ^{(s-1)}_0 \subset RQ^s_0$, где пространства $RQ^{(s)}_0$, $RQ^{(s-1)}_0$ включены в диаграмму (55), (56). При этом $RQ^s_0 \setminus RQ^{(s)}_0 = RQ^{(s-1)}_0$.

Пространство RQ^s_0 представляется в виде дизъюнктного объединения двух подпространств (компонент) $RQ^s_0 = RQ^s_{diag} \cup RQ^s_{antydiag}$. Компонента $RQ^s_{diag} \subset RQ^s_0$ определяется по формуле $RQ^s_{diag} = X^s_0 \cap RQ^s_{diag}$. Компонента $RQ^s_{antydiag} \subset RQ^s_0$ определяется по формуле $RQ^s_{antydiag} = X^s_0 \cap RQ^s_{antydiag}$. Аналогично определяется подпространство $R\hat{Q}^s_0 \subset \hat{X}^s_0$ и его представление в виде объединения двух компонент $R\hat{Q}^s_0 = R\hat{Q}^s_{diag} \cup R\hat{Q}^s_{antydiag}$.

Рассмотрим ограничение структурного отображения $\eta_{X^s_0}$ на подпространство $RQ^s_{diag} \subset RQ^s_0$ (соответственно на подпространство $RQ^s_{antydiag} \subset RQ^s_0$). Отображение $\eta_{X^s_0}|_{RQ^s_{diag}}$ представлено композицией $\eta_{X^s_0}|_{RQ^s_{diag}} = i_{\mathbf{I}_b,\mathbf{D}_4} \circ \eta_{RQ^s_{diag}}$, где $\eta_{RQ^s_{diag}} : RQ^s_{diag} \to K(\mathbf{I}_b, 1)$ – соответствующее отображение, $i_{\mathbf{I}_b,\mathbf{D}_4} : K(\mathbf{I}_b, 1) \to K(\mathbf{D}_4, 1)$. Отображение $\eta_{X^s_0}|_{RQ^s_{antydiag}}$ представлено композицией $\eta_{X^s_0}|_{RQ^s_{antydiag}} = i_{\mathbf{I}_a,\mathbf{D}_4} \circ \eta_{RQ^s_{antydiag}}$, где $\eta_{RQ^s_{antydiag}} : RQ^s_{antydiag} \to K(\mathbf{I}_a, 1)$ – соответствующее отображение, $i_{\mathbf{I}_a,\mathbf{D}_4} : K(\mathbf{I}_a, 1) \to K(\mathbf{D}_4, 1)$.

Аналогично рассмотрим ограничение структурного отображения $\eta_{\hat{X}^s_0}$ на подпространство $R\hat{Q}^s_{diag} \subset R\hat{Q}^s_0$ (соответственно на подпространство $R\hat{Q}^s_{antydiag} \subset R\hat{Q}^s_0$). Отображение $\eta_{\hat{X}^s_0}|_{R\hat{Q}^s_{diag}}$ представлено композицией $\eta_{\hat{X}^s_0}|_{R\hat{Q}^s_{diag}} = i_{\mathbf{E}_b,\mathbf{E}} \circ \eta_{R\hat{Q}^s_{diag}}$, где $\eta_{R\hat{Q}^s_{diag}} : R\hat{Q}^s_{diag} \to K(\mathbf{E}_b, 1)$ – некоторое отображение, $i_{\mathbf{E}_b,\mathbf{H}} : K(\mathbf{E}_b, 1) \to K(\mathbf{E}, 1)$. Отображение $\eta_{\hat{X}^s_0}|_{R\hat{Q}^s_{antydiag}}$ представлено композицией $\eta_{\hat{X}^s_0}|_{R\hat{Q}^s_{antydiag}} = i_{\mathbf{E}_a,\mathbf{E}} \circ \eta_{R\hat{Q}^s_{antydiag}}$, где $\eta_{R\hat{Q}^s_{antydiag}} : R\hat{Q}^s_{antydiag} \to K(\mathbf{E}_a, 1)$ – некоторое отображение, $i_{\mathbf{E}_a,\mathbf{E}} : K(\mathbf{E}_a, 1) \to K(\mathbf{E}, 1)$.

Лемма 38. *В предположении $s = 1 \pmod 4$, $s \ge 1$, существует отображение $\phi_{X^s_{0\circ}} : X^s_{0\circ} \to K(\mathbf{I}_a, 1)$ (соответственно $\phi_{\hat{X}^s_{0\circ}} : \hat{X}^s_{0\circ} \to K(\mathbf{I}_a, 1)$), удовлетворяющее следующему условию:*

— *Отображение $\phi_{X^s_{0\circ}} : X^s_{0\circ} \to K(\mathbf{I}_a, 1)$ продолжается до* *отображения* $\phi_{Z_0^{s-1}} : Z_0^{s-1} \to K(\mathbf{I}_a, 1)$*; отображение* $\phi_{\hat{Z}_{0\circ}^{s-1}} : \hat{Z}_{0\circ}^{s-1} \to K(\mathbf{I}_a, 1)$ *продолжается до отображения* $\phi_{\hat{Z}_0^{s-1}} : \hat{Z}_0^{s-1} \to K(\mathbf{I}_a, 1)$*. Для продолженных отображений выполняются граничные условия:*

$$i_{\mathbf{I}_d,\mathbf{I}_a} \circ p_{\mathbf{I}_b,\mathbf{I}_d} \circ \eta_{RQ^s_{diag}} = \phi_{RQ^s_{diag}} : RQ^s_{diag} \to K(\mathbf{I}_a, 1), \tag{115}$$

$$\eta_{RQ^s_{antydiag}} = \phi_{RQ^s_{antydiag}} : RQ^s_{antydiag} \to K(\mathbf{I}_a, 1), \tag{116}$$

$$p_{\mathbf{E}_b,\mathbf{I}_a} \circ \eta_{R\hat{Q}^s_{diag}} = \phi_{R\hat{Q}^s_{diag}} : R\hat{Q}^s_{diag} \to K(\mathbf{I}_a, 1), \tag{117}$$

$$p_{\mathbf{E}_a,\mathbf{I}_a} \circ \eta_{R\hat{Q}^s_{antydiag}} = \phi_{R\hat{Q}^s_{antydiag}} : R\hat{Q}^s_{antydiag} \to K(\mathbf{I}_a, 1). \tag{118}$$

Доказательство Леммы 38

Начнем с построения отображения $\phi_{X^s_{0\circ}}$. Определим гомоморфизм $\phi_{X^s_{0\circ},*} : \pi_1(X^s_{0,\circ}) \to \mathbf{I}_a$.

Пусть $l : S^1 \subset X^s_{0,\circ}$ – произвольный кусочно-линейный путь, трансверсально пересекающий подпространство особых стратов $RK^{(s-1)}_{0,\circ} \subset X^s_{0,\circ}$ в конечном числе критических точек, которые обозначим через $\{t_1, \dots, t_j\}$.

На элементарном страте глубины s полиэдра $\bar{X}^s_{0\circ}$, содержащем точку $pt = l(0)$, $0 \in S^1$–отмеченная точка, выберем систему координат $(\check{x}_1(0), \check{x}_2(0), \check{x}_3(0))$ (замечу, что первые две координаты произвольной точки на элементарном страте пространства $RK^{(s)}_{0\circ}$ неупорядочены).

Продолжим естественным способом систему координат $(\check{x}_1(0), \check{x}_2(0))$ из точки pt вдоль пути, т.е. согласовывая регулярные координаты в окрестности каждой из точек $\{t_1, \dots, t_j\}$ (по поводу естественного продолжения системы координат см. координатное построение структурного отображения η).

Получим преобразование исходной системы координат $(\check{x}_1(0), \check{x}_2(0), \check{x}_3(0))$ в систему координат $(\check{x}_1(2\pi), \check{x}_2(2\pi), \check{x}_3(2\pi))$. Это преобразование, которое обозначим через $\aleph(l)$, представлено прямой суммой двух преобразований $\eta_{1,2} \in \mathbf{D}_4$, $\eta_3 \in \mathbf{I}_a$ по первым двум и третьей координате соответственно. По построению η_3 совпадает с естественным преобразованием третьей координаты.

Определим значение гомоморфизма $\phi_{X^s_{0\circ}}$ на гомотопическом классе пути $[l]$ по формуле $\phi_{X^s_{0,\circ},*}([l]) = \eta_3$. Очевидно, что гомоморфизм $\phi_{X^s_{0\circ},*}: \pi_1(X^s_{0\circ}) \to \mathbf{I}_a$ корректно определен. Отображение $\phi_{\hat{X}^s_{0\circ}}: \hat{X}^s_{0\circ} \to K(\mathbf{I}_a, 1)$ определяется аналогичным способом.

Очевидно, что отображение $\phi_{X^s_{0\circ}}: X^s_{0\circ} \to K(\mathbf{I}_a, 1)$ продолжается до отображения $\phi_{Z_0^{s-1}}: Z_0^{s-1} \to K(\mathbf{I}_a, 1)$. Очевидно, что отображение $\phi_{\hat{X}^s_{0\circ}}: \hat{X}^s_{0\circ} \to K(\mathbf{I}_a, 1)$ продолжается до отображения $\phi_{\hat{Z}_0^{s-1}}: \hat{Z}_0^{s-1} \to K(\mathbf{I}_a, 1)$.

Проверим, что отображение $\phi_{Z_0^{s-1}}$ удовлетворяет граничному условию (115).

Рассмотрим замкнутый путь l на компоненте RQ^s_{diag}. Пусть $\aleph(l) = \eta_{1,2}(l) \oplus \eta_3(l)$, $\eta_{1,2} \in \mathbf{D}_4$, $\eta_3 \in \mathbf{I}_a$ – естественное преобразование системы координат вдоль l. Заметим, что $\eta_3(l)$ принадлежит подгруппе $\mathbf{I}_d \subset \mathbf{I}_a$, т.к. преобразование η_3 определено как естественное преобразование третьей координаты. Далее в формулах везде будем предполагать, что $\eta_3(l) \in \mathbf{I}_d$.

Предположим, что l содержится внутри одного элементарного страта глубины s. По Лемме 36 получим,что $\eta_{1,2}(l) \in \mathbf{I}_d$ и, кроме того, $\eta_{1,2}(l) = \eta_3(l)$.

В общем случае $\eta_{1,2}(l) \in \mathbf{I}_b$, поскольку $l \subset RQ_{diag}$. Докажем, что $p_{\mathbf{I}_b,\mathbf{I}_d}(\eta_{1,2}(l)) = \eta_3(l)$.

Рассмотрим замкнутый путь l', который получен из пути l в результате малого сдвига с подпространства RQ^s_{diag} в пространство Z_0^{s-1}. Сдвиг $l \mapsto l'$ выберем так, что каждая точка $x \in l$, лежащая внутри максимального страта глубины s пространства RQ_{diag} сдвигается в точку x', лежащую в максимальном страте глубины $s-1$ пространства Z_0^{s-1} с дополнительной парой первых двух координат $(\check{x'}_{1,j(x')}, \check{x'}_{2,j(x')})$ с вычетом $v(j(x')) = -1$. Третью дополнительную координату точки x' обозначим через $\check{x'}_{3,j(x')}$. Остальные координаты точек пути, соответствующие координатам максимальных стратов пространства RQ_{diag} назовем основными координатами. Поскольку $x \in RQ_{diag}$, первые две координаты в одной паре основных координат точки x' совпадают: $(\check{x'}_{1,j(x')} = \check{x'}_{2,j(x')})$, в то время как пара первых двух дополнительных координат точки x' различается.

Обозначим через $\{x_1, \dots, x_s\}$ конечное множество критических значений пути l, в которых путь пересекает страты глубины $(s+1)$. Каждое критическое значение x_i пути l определяет пару близких критических значений y_i, z_i пути l'.

Выберем сдвинутый путь l' в окрестностях критических точек так, что:

— в точках y_i, z_i набор первых и вторых критических координат меняется непрерывно;

—в точке y_i набор третьих координат меняется непрерывно,

—в точке z_i одна критическая третья координата с номером $j(i)$ при $z_i - 0$ и с номером $j(i+1)$ при $z_i + 0$ изменяется скачком на элемент $\theta(x_i) \in \mathbf{I}_a$ в соответствии с предписанным значением скачка пары соответствующих третьих координат вдоль l.

Рассмотрим путь m, $m : S^1 \to Z_0^s$, который при каждом i вне отрезка $[y_i, z_i]$ имеет все нулевые координаты, за исключением одной координаты $\check{x}_{j(i)}$ (эта координата является дополнительной координатой на отрезке $[z_{i-1}, y_i]$), на коротком отрезке $[y_i, z_i]$ имеет две нулевые S^1–координаты с номерами $j(i)$ и $j(i+1)$. Координаты выбраны так, что в левом конце отрезка y_i ненулевая координата $j(i)$, в правом конце отрезка z_i ненулевая координата $j(i+1)$, во внутренней точке отрезка S^1–координаты не изменяются и полный набор координат продолжается по линейности парой соответствующих координат на соответствующей грани симплекса коразмерности s джойна.

Значение $\eta_3(l) \in \mathbf{I}_a$ принадлежит подгруппе $\mathbf{I}_d \subset \mathbf{I}_a$ и его можно вычислить по формуле:

$$\eta_3(l) = p_{\mathbf{I}_b,\mathbf{I}_d}(\eta_{1,2}(l)) \prod_i \theta(x_i). \tag{119}$$

Действительно, путь l' гомотопен пути m в классе свободных путей. Гомотопия является постоянной вдоль набора S^1–координат и не является постоянной вдоль координат симплекса соответствующей грани джойна. В результате этой гомотопии путь m на отрезке $[z_{i-1}, y_i]$ проектируется в точку, соответствующую вершине с номером $j(i)$, а на коротком отрезке $[y_i, z_i]$ путь m проектируется в отрезок симплекса, соединяющий вершины с номерами $j(i)$ и $j(i+1)$.

Определим путь m_0, задав изменение первой соответствующей координаты вдоль m. Для пути m_0 имеем $\theta(x_i) = 1$ при каждом i, и формула (119) справедлива. С другой стороны, гомологический класс пути m отличается от гомологического класса пути m_0 на значение $\prod_i \theta(x_i)$, что доказывает формулу (119) для m.

Для пути l' (следовательно, и для m) справедливо равенство:

$$\prod_i \theta(x_i) = 1,$$

поскольку число координат пространства Z_0^s кратно 4. Поскольку путь l' замкнут, то произведение скачков каждой координаты одинаково.

Граничные условия (115) доказаны.

Проверим, что отображение $\phi_{Z_0^{s-1}}$ удовлетворяет граничному условию (116).

Рассмотрим замкнутый путь l', который получен из пути l в результате малого сдвига с подпространства $RQ^s_{antydiag}$ в пространство Z_0^{s-1}. Сдвиг $l \mapsto l'$ выберем так, что каждая точка $x \in l$, лежащая внутри максимального страта глубины s пространства $RQ_{antydiag}$ сдвигается в точку x', лежащую в максимальном страте глубины $s-1$ пространства Z_0^{s-1} с дополнительной парой первых двух координат $(\check{x'}_{1,j(x')}, \check{x'}_{2,j(x')})$ с вычетом $v(j(x')) = -\mathbf{i}$. Третью дополнительную координату точки x' обозначим через $\check{x'}_{3,j(x')}$. Остальные координаты точек пути, соответствующие координатам максимальных стратов пространства $RQ_{antydiag}$ назовем основными координатами. Поскольку $x \in RQ_{antydiag}$, первые две координаты в одной паре основных координат точки x' совпадают: $(\check{x'}_{1,j(x')} = \check{x'}_{2,j(x')})$, в то время как первая пара дополнительных координат точки x' различается.

Обозначим через $\{x_1, \dots, x_s\}$ конечное множество критических значений пути l, в которых путь пересекает страты глубины $(s+1)$. Каждое критическое значение x_i пути l определяет пару близких критических значений y_i, z_i пути l'. Выберем сдвинутый путь l' в окрестностях критических точек так, что выполняются условия, аналогичные сформулированным выше условиям для диагональной компоненты.

Значение $i_{\mathbf{I}_d,\mathbf{I}_a}(\eta_3(l)) \in \mathbf{I}_a$ можно вычислить по формуле

$$i_{\mathbf{I}_d,\mathbf{I}_a}(\eta_3(l)) = \eta_{1,2}(l) \prod_i \theta(x_i),$$

где $\eta_{1,2} \in \mathbf{I}_a$. С другой стороны, очевидно

$$\prod_i \theta(x_i) = 1,$$

поскольку число координат пространства Z_0^s кратно 4, а поскольку путь l' по условию замкнут, то произведение скачков каждой координаты одинаково. В частности, поскольку $\eta_3(l) \in \mathbf{I}_d$, $\eta_{1,2}(l)$ принадлежит подгруппе $\mathbf{I}_d \subset \mathbf{I}_a$.

Граничные условия (116) доказаны.

Граничные условия (117), (118) проверяются аналогично.

Лемма 38 доказана.

Сформулируем и докажем следующую Лемму 39, которая аналогична Лемме 38. Эта лемма будет использована для построения отображений ϕ_1, $\hat{\phi}_1$ в диаграмме (64).

Построение вспомогательных пространств $X^s_{1\circ}$, X^s_1, $Y^s_{1\circ}$, Y^s_1, $Z^s_{1\circ}$, Z^s_1

Это построение полностью аналогично и опускается.

Определено структурные отображения $\zeta_{Y^s_{1\circ}} : Y^s_{1\circ} \to K(\mathbf{H},1)$, $\zeta_{\hat{Y}^s_{1\circ}} : \hat{Y}^s_{1\circ} \to K(\mathbf{G},1)$, которые получается в результате ограничения структурных отображений ζ_{K_1}, $\zeta_{\hat{K}_1}$ при включениях $j_{Y^s_{1\circ}}$, $j_{\hat{Y}^s_{1\circ}}$.

Обозначим композицию $p_{X^s_{1\circ}} \circ \zeta_{Y^s_{1\circ}}$ через $\zeta_{\hat{X}^s_{1\circ}} : X^s_{1\circ} \to K(\mathbf{H},1)$, композицию $p_{\hat{X}^s_{1\circ}} \circ \zeta_{\hat{Y}^s_{1\circ}}$ через $\zeta_{\hat{X}^s_{1\circ}} : \hat{X}^s_{1\circ} \to K(\mathbf{G},1)$. Эти отображения назовем структурными.

Определим подпространство $X^{[s]}_1 \subset Z^{s-1}_1$ как объединение подпространства $X^s_{1\circ} \subset Z^{s-1}_1$ со всеми элементарными диагональными и антидиагональными стратами глубины s и $s+1$ пространства Z^{s-1}_1. Определим подпространство $\hat{X}^{[s]}_1 \subset \hat{X}^s_1$ как объединение подпространства $\hat{X}^s_{1\circ} \subset \hat{Z}^{s-1}_1$ со всеми элементарными диагональными и антидиагональными стратами глубины s и $s+1$ пространства $\hat{Z}^{s-1}_1$.

Определены структурные отображения $\zeta_{X^{[s]}_1} : X^{[s]}_1 \to K(\mathbf{H},1)$, $\zeta_{\hat{X}^{[s]}_1} : \hat{X}^{[s]}_1 \to K(\mathbf{H},1)$, которые являются продолжениями структурных отображений $\zeta_{X^s_{1\circ}}$, $\zeta_{\hat{X}^s_{1\circ}}$ при включениях $X^s_{1\circ} \subset X^{[s]}_1$, $\hat{X}^s_{1\circ} \subset \hat{X}^{[s]}_1$.

Обозначим композицию $p_{X^{[s]}_1} \circ \zeta_{Y^{[s]}_1}$ через $\zeta_{\hat{X}^{[s]}_1} : X^{[s]}_1 \to K(\mathbf{H},1)$, композицию $p_{\hat{X}^{[s]}_1} \circ \zeta_{\hat{Y}^s_1}$ через $\zeta_{\hat{X}^{[s]}_1} : \hat{X}^{[s]}_1 \to K(\mathbf{G},1)$. Эти отображения также назовем структурными.

Определим подпространство $RQ^{[s]}_1 \subset X^{[s]}_1$ по формуле $RQ^{[s]}_1 = X^{[s]}_1 \cap RQ_1$, где $RQ_1 \subset RK_1$, $X^{[s]} \subset Z^{s-1}_1 \subset RK_1$ – подпространства в RK_1. Пространство $RQ^{[s]}_1$ представляется в виде дизъюнктного объединения двух подпространств $RQ^{[s]}_1 = RQ^{[s]}_{diag} \cup RQ^{[s]}_{antydiag}$ аналогично случаю пространства $RQ^{[s]}_0$.

Лемма 39. *В предположении $s = 1 \pmod 4$, $s \geq 1$, существует отображение $\phi_{X^s_{1\circ}} : X^s_{1\circ} \to K(\mathbf{Q}_a,1)$ (соответственно $\phi_{\hat{X}^s_{1\circ}} : \hat{X}^s_{1\circ} \to K(\mathbf{Q}_a,1)$), удовлетворяющее следующему условию:*

— Отображение $\phi_{X^s_{1\circ}} : X^s_{1\circ} \to K(\mathbf{Q}_a,1)$ продолжается до отображения $\phi_{Z^{s-1}_1} : Z^{s-1}_1 \to K(\mathbf{Q}_a,1)$ (отображение $\phi_{\hat{X}^{s-1}_{1\circ}} : \hat{X}^{s-1}_{1\circ} \to K(\mathbf{Q}_a,1)$ продолжается до отображения $\phi_{\hat{Z}^{s-1}_1} : \hat{Z}^{s-1}_1 \to K(\mathbf{Q}_a,1)$). Для продолженных отображений выполняются граничные условия:

$$i_{\mathbf{I}_a,\mathbf{Q}_a} \circ p_{\mathbf{H}_b,\mathbf{I}_a} \circ \eta_{RQ^s_{diag}} = \phi_{RQ^s_{diag}} : RQ^s_{diag} \to K(\mathbf{Q}_a,1), \tag{120}$$

$$\eta_{RQ^s_{antydiag}} = \phi_{RQ^s_{antydiag}} : RQ^s_{antydiag} \to K(\mathbf{Q}_a, 1), \tag{121}$$

$$p_{\mathbf{H}_b,\mathbf{Q}_a} \circ \eta_{R\hat{Q}^s_{diag}} = \phi_{R\hat{Q}^s_{diag}} : R\hat{Q}^s_{diag} \to K(\mathbf{Q}_a, 1), \tag{122}$$

$$p_{\mathbf{H}_a,\mathbf{Q}_a} \circ \eta_{R\hat{Q}^s_{antydiag}} = \phi_{R\hat{Q}^s_{antydiag}} : R\hat{Q}^s_{antydiag} \to K(\mathbf{Q}_a, 1). \tag{123}$$

Доказательство Леммы 39

Начнем с построения отображения $\phi_{X^s_{1\circ}}$.

Определим гомоморфизм $\phi_{X^s_{1\circ},*} : \pi_1(X^s_{1,\circ}) \to \mathbf{Q}_a$.

Пусть $l : S^1 \subset X^s_{1,\circ}$ – произвольный кусочно-линейный путь, трансверсально пересекающий подпространство особых стратов $RK^{(s-1)}_{1,\circ} \subset X^s_{1,\circ}$ в конечном числе точек, которые обозначим через $\{t_1, \dots, t_j\}$.

На элементарном страте глубины s полиэдра $\bar{X}^s_{0\circ}$, содержащем точку $pt = l(0)$, $0 \in S^1$–отмеченная точка, выберем систему координат $(\check{x}_1(0), \check{x}_2(0), \check{x}_3(0))$ (замечу, что первые две координаты произвольной точки на элементарном страте пространства $RK^{(s)}_{1\circ}$ неупорядочены).

Продолжим естественным способом систему координат $(\check{x}_1(0), \check{x}_2(0))$ из точки pt вдоль пути, т.е. согласовывая регулярные координаты в окрестности каждой из точек $\{t_1, \dots, t_j\}$ (по поводу естественного продолжения системы координат см. координатное построение структурного отображения η).

Получим преобразование исходной системы координат $(\check{x}_1(0), \check{x}_2(0), \check{x}_3(0))$ в систему координат $(\check{x}_1(2\pi), \check{x}_2(2\pi), \check{x}_3(2\pi))$. Это преобразование, которое обозначим через $\aleph(l)$, представлено прямой суммой двух преобразований $\eta_{1,2} \in \mathbf{H}$, $\eta_3 \in \mathbf{Q}_a$ по первым двум и третьей координате соответственно. По построению η_3 совпадает с естественным преобразованием третьей координаты.

Определим значение гомоморфизма $\phi_{X^s_{1\circ}}$ на гомотопическом классе пути $[l]$ по формуле $\phi_{X^s_{1,\circ},*}([l]) = \eta_3$. Очевидно, что гомоморфизм $\phi_{X^s_{1\circ},*} : \pi_1(X^s_{1\circ}) \to \mathbf{Q}_a$ корректно определен. Отображение $\phi_{\hat{X}^s_{1\circ}} : \hat{X}^s_{1\circ} \to K(\mathbf{Q}_a, 1)$ определяется аналогичным способом.

Очевидно, что отображение $\phi_{X^s_{1\circ}} : X^s_{1\circ} \to K(\mathbf{Q}_a, 1)$ продолжается до отображения $\phi_{Z^{s-1}_1} : Z^{s-1}_1 \to K(\mathbf{Q}_a, 1)$. Очевидно, что отображение $\phi_{\hat{X}^s_{1\circ}} : \hat{X}^s_{1\circ} \to K(\mathbf{Q}_a, 1)$ продолжается до отображения $\phi_{\hat{Z}^{s-1}_1} : \hat{Z}^{s-1}_1 \to K(\mathbf{Q}_a, 1)$.

Проверим, что отображение $\phi_{Z_1^{s-1}}$ удовлетворяет граничному условию (120).

Рассмотрим замкнутый путь l на компоненте RQ^s_{diag}. Пусть $\aleph(l) = \zeta_{1,2}(l) \oplus \zeta_3(l)$, $\zeta_{1,2} \in \mathbf{H}$, $\eta_3 \in \mathbf{Q}_a$ – естественное преобразование системы координат вдоль l. Заметим, что $\zeta_3(l)$ принадлежит подгруппе $\mathbf{I}_a \subset \mathbf{Q}_a$, т.к. преобразование ζ_3 определено как естественное преобразование третьей координаты. Далее везде будем предполагать, что $\zeta_3(l) \in \mathbf{I}_a$.

Предположим, что l содержится внутри одного элементарного страта глубины s. По Лемме 36 получим,что $\zeta_{1,2}(l) \in \mathbf{I}_a$ и, кроме того, $\eta_{1,2}(l) = \eta_3(l)$.

В общем случае $\zeta_{1,2}(l) \in \mathbf{H}_b$, поскольку $l \subset RQ_{diag}$. Докажем, что $p_{\mathbf{H}_b,\mathbf{I}_a}(\zeta_{1,2}(l)) = \zeta_3(l)$.

Рассмотрим замкнутый путь l', который получен из пути l в результате малого сдвига с подпространства RQ^s_{diag} в пространство Z_1^{s-1}. Сдвиг $l \mapsto l'$ выберем так, что каждая точка $x \in l$, лежащая внутри максимального страта глубины s пространства RQ_{diag} сдвигается в точку x', лежащую в максимальном страте глубины $s-1$ пространства Z_1^{s-1} с дополнительной парой первых двух координат $(\check{x}'_{1,j(x')}, \check{x}'_{2,j(x')})$ с вычетом $v(j(x')) = -1$. Третью дополнительную координату точки x' обозначим через $\check{x}'_{3,j(x')}$. Остальные координаты точек пути, соответствующие координатам максимальных стратов пространства RQ_{diag} назовем основными координатами. Поскольку $x \in RQ_{diag}$, первые две координаты в одной паре основных координат точки x' совпадают: $(\check{x}'_{1,j(x')} = \check{x}'_{2,j(x')})$, в то время как пара первых двух дополнительных координат точки x' различается.

Обозначим через $\{x_1, \dots, x_s\}$ конечное множество критических точек пути l, в которых путь пересекает страты глубины $s+1$. Каждая критическая точка x_i пути l определяет пару близких критических точек y_i, z_i пути l'.

Выберем сдвинутый путь l' в окрестностях критических точек так, что:

— в точках y_i, z_i набор первых и вторых критических координат изменяется непрерывно;

—в точке y_i набор третьих координат изменяется непрерывно;

—в точке z_i третья критическая координата изменяется скачком на элемент из $\mathbf{Q}_a$ в соответствии с предписанным значением $\theta(x_i)$ скачка соответствующей координаты вдоль l.

Значение $\zeta_3(l) \in \mathbf{I}_a$ вычисляется по формуле

$$\zeta_3(l) = p_{\mathbf{H}_b,\mathbf{I}_a}(\eta_{1,2}(l) \prod_i \theta(x_i).$$

С другой стороны, очевидно,

$$\prod_i \theta(x_i) \in \mathbf{I}_d,$$

поскольку число координат пространства Z_1^s кратно 4, l' замкнут и произведение скачков каждой координаты одинаково.

Построим в гомотопическом классе пути l' путь m, для которого

$$\theta(v_i) \in \mathbf{I}_a \subset \mathbf{Q}_a, \quad 1 \le i \le s. \tag{124}$$

В предыдущей формуле критические точки пути m обозначены через $\{v_1, \dots, v_s\}$.

Путь m определим следующим образом. Для каждой координаты с фиксированным номером i_0 рассмотрим отрезок $\alpha_{i_0} = [\alpha_{i_0}(0), \alpha_{i_0}(1)]$ пути l', для точек $x \in \alpha_{i_0}$ которого координата i_0 регулярна, причем третья координата $\check{x}_{3;i_0}$, $x \in \alpha_{i_0}$ с номером i_0 и первая координата $\check{x}_{1;i_0}$ с тем же номером i_0 лежат в разных классах смежности $\mathbf{Q}_a/\mathbf{I}_a$. Определим гомотопию пути l' при помощи композиции отображения параметризации пути с семейством вращений вдоль орбиты действия кватерниона $\mathbf{j}$ на S^3 на уголы $[0, t\frac{\pi}{2}]$.

Для каждого отрезка $\alpha_{i_0}(t)$ с левым концом $\alpha_{i_0}(0)$ и правым концом $\alpha_{i_0}(0) + (\alpha_{i_0}(1) - \alpha_{i_0}(0))t$ зададим вращение вдоль i_0-ой координаты. Для построения непрерывной гомотопии предполагается, что на коротком отрезке $[\alpha_{i_0}(t), \alpha_{i_0}(t) + \varepsilon]$, $\varepsilon \to 0$ при $t \to 1+$, вращение продолжено по линейности в обратном направлении так, что сдвинутый правый конец $\alpha_{i_0}(t) + \varepsilon$ отрезка в каждый момент времени t остается неподвижен. В левом конце семейства отрезков $\alpha_{i_0}(t)$ и в семействе правых концов при $t \to 1-$ гомотопия неподвижна, поскольку координата с номером i_0 в граничных точках отрезка α_{i_0} является особой.

В результате композиции последовательности гомотопий, построенной для каждой координаты описанным выше способом, получим путь m, гомотопный пути l', который имеет по каждой критической координате скачек, удовлетворяющей формуле (124).

Определена последовательность скачков $\{\theta_m(v_i)\}$ третьей кординаты в критических точках пути m. Для пути m, очевидно,

$$\prod_i \theta_m(v_i) = 1,$$

поскольку число координат пространства Z_1^s кратно 4 и поскольку путь m замкнут (произведение скачков каждой координаты вдоль m одинаково).

Поскольку $\zeta_3(l') = \zeta_3(m)$ и $\zeta_{1,2}(l') = \zeta_{1,2}(m)$, вдоль пути l' граничные условия (120) также выполняются. Граничные условия (120) доказаны.

Проверим, что отображение $\phi_{Z_1^{s-1}}$ удовлетворяет граничному условию (121).

Рассмотрим замкнутый путь l', который получен из пути l в результате малого сдвига с подпространства $RQ^s_{antydiag}$ в пространство Z_1^{s-1}. Сдвиг $l \mapsto l'$ выберем так, что каждая точка $x \in l$, лежащая внутри максимального страта глубины s пространства $RQ_{antydiag}$ сдвигается в точку x', лежащую на максимальном страте глубины $(s-1)$ пространства Z_1^{s-1} с дополнительной парой первых двух координат $(\check{x}'_{1,j(x')}, \check{x}'_{2,j(x')})$ с вычетом $v(j(x')) = -\mathbf{j}$. Третью дополнительную координату точки x' обозначим через $\check{x}'_{3,j(x')}$. Остальные координаты точек пути, соответствующие координатам максимальных стратов пространства $RQ_{antydiag}$ назовем основными координатами. Поскольку $x \in RQ_{antydiag}$, первые две координаты в одной паре основных координат точки x' совпадают: $(\check{x}'_{1,j(x')} = \check{x}'_{2,j(x')})$, в то время как первая пара двух дополнительных координат точки x' различается.

Обозначим через $\{x_1, \dots, x_s\}$ конечное множество критических точек пути l, в которых путь пересекает страты глубины $s+1$. Каждая критическая точка x_i пути l определяет пару близких критических точек y_i, z_i пути l'.

Обозначим через $\{x_1, \dots, x_s\}$ конечное множество критических точек пути l, в которых путь пересекает страты глубины $s+1$. Каждая критическая точка x_i пути l определяет пару близких критических точек y_i, z_i пути l'. Выберем сдвинутый путь l' в окрестностях критических точек так, что выполняются условия, аналогичные соответствующим условиям для пути на диагональной компоненте.

Значение $i_{\mathbf{I}_a,\mathbf{Q}_a}(\zeta_3(l)) \in \mathbf{Q}_a/\mathbf{I}_d$ можно вычислить по формуле

$$i_{\mathbf{I}_a,\mathbf{Q}_a}(\zeta_3(l)) = \zeta_{1,2}(l) \prod_i \theta(x_i) \pmod{\mathbf{I}_d},$$

где $\zeta_{1,2} \in \mathbf{Q}_a$. С другой стороны, очевидно

$$\prod_i \theta(x_i) = 1,$$

поскольку число координат пространства Z_0^s кратно 4, а поскольку путь l' по условию замкнут, то произведение скачков каждой координаты одинаково. В частности, поскольку $\zeta_3(l) \in \mathbf{I}_a$, $\zeta_{1,2}(l)$ принадлежит подгруппе $\mathbf{I}_a \subset \mathbf{Q}_a$. Номера координат вдоль l' сохраняются.

Построим гомотопный пути l' путь m, такой, что скачки критических координат вдоль m удовлетворяют условию (124). Очевидно

$$\prod_i \theta(x_i) = 1,$$

поскольку число координат пространства Z_1^s кратно 4. Поскольку m по условию замкнут, то произведение скачков третьей координаты произвольного номера вдоль m одинаково. Следовательно, вдоль m граничные условия (120) выполняются.

Следовательно, для путей l', l граничные условия (120) также выполняются. Граничные условия (121) доказаны.

Граничные условия (122), (123) проверяются аналогично.

Лемма 39 доказана.

Отображения ϕ_0, $\hat{\phi}_0$ в диаграмме (57)

Построим отображение ϕ_0 в диаграмме (57). В пространстве $RK_{0\circ}$ определим подпространство $RK_{0\circ}^{[2]} \subset RK_{0\circ}$. Для этого рассмотрим следующую пару полиэдров (верхняя диаграмма) в вложение в эту другой пары полиэдров (нижняя диаграмма):

$$RK_0^1 \quad \subset \quad RK_0^0 \tag{125}$$

$$X_0^{[1]} \quad \subset \quad Z_0^0 \tag{126}$$

Пространство $RK_0^{[2]}$ определено как образ пространства Z_0^0 из диаграммы (126) при включении. Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 40. *Произвольное PL–отображение двумерного диска $f : D^2 \to RK_0$ вытесняется в отображение $f' : D^2 \to RK_0^{[2]} \subset RK_0$ с образом в подпространстве $RK_0^{[2]} \subset RK_0$ в результате сколь угодно малой PL–деформации $f \to f'$.*

Доказательство Леммы 40

Пространство RK_0 снабжено естественным отображением в пространство $\delta^{r_0} \times I$ прямого произведение r_0–мерного симплекса на отрезок, причем стандартная триангуляция пространства-образа, задающая стратификацию пространства–образа по коразмерности остовов триангуляции согласована при этом отображении со стратификацией пространства-прообраза. Подпространство $RK_0^{[2]} \subset RK_0$ содержит все страты пространства RK_0 глубины 0,1,2. Отображение $f : D^2 \to RK_0$ можно перевести сколь угодно малой деформацией в отображение $f' : D^2 \to RK_0^{[2]}$ так, что проекция образа отображения f' в пространство $\delta^{r_0} \times I$ трансверсально к симплексам разбиения и, в частности, не содержит остова коразмерности 3. Лемма 40 доказана.

Определим на подпространстве $RK_0^{[2]} \subset RK_0$ отображение

$$\phi_0^{[2]} : RK_0^{[2]} \to K(\mathbf{I}_a, 1). \qquad (127)$$

По Лемме 40 отображение (127) продолжается до отображения $\phi'_0 : RK_0 \to K(\mathbf{I}_a, 1)$. По Лемме 38 отображение (127) удовлетворяет сформулированным в этой лемме граничным условиям. Определим искомое отображение $\phi_0 : RK_0 \to K(\mathbf{I}_a, 1)$ по формуле

$$\phi_0 = \phi'_0.$$

Отображение $\phi_0 : RK_0 \to K(\mathbf{I}_a, 1)$ удовлетворяет граничным условиям, коорые следут из диаграмм (55), (56). Построение отображения $\hat{\phi}_0 : R\hat{K}_0 \to K(\mathbf{I}_a, 1)$ полностью аналогично.

Отображения ϕ_1, $\hat{\phi}_1$ в диаграмме (64)

Это построение аналогично предыдущему и опускается.

Доказательство Леммы 30

Рассмотрим отображение $\hat{p} : S^{n-k}/\mathbf{i} \to J_0$ и обозначим через $\hat{C}_p$ цилиндр этого отображения. Определены отображения проекций $\hat{p}_I : \hat{C}_p \to [0,1]$, $\hat{p}_J : \hat{C}_p \to J_0$ и декартово произведение этих отображений, которое обозначим через $\hat{F} : \hat{C}_p \to J_0 \times [0,1]$.

Аналогично рассмотрим отображение $p : \mathbb{RP}^{n-k} \to J_0$ и обозначим через C_p цилиндр этого отображения. Определены отображения проекций $p_I : C_p \to [0,1]$, $p_J : C_p \to J_0$ и декартово произведение этих отображений, которое обозначим через $F : C_p \to J_0 \times [0,1]$.

Определено отображение $r : C_p \to \hat{C}_p$, причем следующие диаграммы коммутативны:

$$
\begin{array}{ccc}
C_p & \longrightarrow & \hat{C}_p \\
p_I \searrow & & \swarrow \hat{p}_I \\
& I, &
\end{array}
\tag{128}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
C_p & \longrightarrow & \hat{C}_p \\
p_J \searrow & & \swarrow \hat{p}_J \\
& J_0. &
\end{array}
\tag{129}
$$

Рассмотрим вложение $I_J : J_0 \times [0,1] \subset \mathbb{R}^n \times [0,1]$ и определим отображения $I_J \circ \hat{F} : \hat{C}_p \to \mathbb{R}^n \times [0,1]$, $I_J \circ F : C_p \to \mathbb{R}^n \times [0,1]$. Ниже определим отображение $\hat{f} : \hat{C}_p \to \mathbb{R}^n \times [0,1]$, которое получено в результате C^1–малого возмущения общего положения отображения $I_J \circ \hat{F}$. Такое возмущение будем ниже называть деформацией гомотопии $I_J \circ \hat{F}$ в гомотопию $\hat{f}$. При этом гомотопию $\hat{f}$ выберем совпадающей на нижнем основании цилиндра $J_0 \subset \hat{C}_p$ с вложением $I_J : J_0 \subset \mathbb{R}^n \times \{0\}$. Кроме того, потребуем, чтобы композиция $p_{[0,1]} \circ \hat{f} : \hat{C}_p \to [0,1]$ совпадала с $\hat{p}_I$, где $p_{[0,1]} : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to [0,1]$ – проекция на второй сомножитель. Определено также отображение $f : C_p \to \mathbb{R}^n \times [0,1]$ как композиция $f = \hat{f} \circ r$.

Обозначим через $\bar{Q} \subset \hat{C}_p$ – каноническое накрывающее над полиэдром точек самопересечения гомотопии $\hat{f}$, определенное как замыкание по формуле

$$\bar{Q} = Cl\{x \in \hat{C}_p : \exists y \in \hat{C}_p, x \neq y, \hat{f}(x) = \hat{f}(y)\}.$$

Определена инволюция $T_{\bar{Q}} : \bar{Q} \to \bar{Q}$, переставляющая прообразы точек самопересечения. Инволюция $T_{\bar{Q}}$ сохраняет значения отображения p_I. Факторпространство полиэдра $\bar{Q}$ при этой инволции обозначим через $\hat{Q}$.

Рассмотрим стратификацию

$$J_0^{r_0} \subset \dots \subset J_0^2 \subset J_0^1 \subset J_0^0 \tag{130}$$

пространства джойна $J_0^0 = J_0$. Стратификация (130) определяет стратификацию цилиндра по формуле

$$\hat{C}_p^i = \hat{p}_J^{-1}(J_0^i) \tag{131}$$

и стратификацию многообразия $S^{n-k}/\mathbf{i}$ по формуле

$$(S^{n-k}/\mathbf{i})^i = \hat{p}^{-1}(J_0^i) \tag{132}$$

Определена стратификация

$$\bar{Q}^{r_0} \subset \dots \subset \bar{Q}^1 \subset \bar{Q}^0 \qquad (133)$$

полиэдра $\bar{Q}^0 = \bar{Q}$ по формуле $\bar{Q}^i = (\bar{Q} \cap \hat{C}_p^i) \cap T_{\bar{Q}}(\bar{Q} \cap \hat{C}_p^i)$. Фактор стратификации (133) при инволюции $T_{\bar{Q}}$ определяет стратификацию

$$\hat{Q}^{r_0} \subset \dots \subset \hat{Q}^1 \subset \hat{Q}^0 \qquad (134)$$

полиэдра $\hat{Q}$. Обозначим через QJ_0^i пересечение $\bar{Q}^i \cap J_0$. При условии, что отображение $\hat{f}$ общего положения, стратифицированный полиэдр QJ_0^i находится в общем положении со стратами (130) полиэдра J_0 и, кроме того, все страты глубины большей $r_{0,max}$ стратификации (134) являются пустыми.

Зафиксируем произвольное $t \in (0, +\delta]$, где положительное число δ будет определено в процессе построения $\hat{f}$. Ограничение отображения $\hat{f} : \hat{C}_p \to \mathbb{R}^n \times [0,1]$ на $S^{n-k}/\mathbf{i} \times \{t\}$ обозначим через $\hat{d} = \hat{d}(t) : S^{n-k}/\mathbf{i} \to \mathbb{R}^n$. Отображение d двулистно накрывает отображение $\hat{d}$. Рассмотрим многообразие $\hat{N}_{K_0}$ с краем точек самопересечения отображения $\hat{d}$. Многообразие $\hat{N}_{K_0}$ определяется по формуле $\hat{N}_{K_0} = \hat{Q} \cap \mathbb{R}^n \times \{t\}$. Это многообразие снабжено естественной стратификацией

$$\hat{N}_{K_0}^{r_0} \subset \dots \subset \hat{N}_{K_0}^0, \qquad (135)$$

$$\hat{W}_{K_0}^{(i)} = \hat{N}_{K_0}^i \setminus \hat{N}_{K_0}^{i+1}, \qquad (136)$$

которая определяется как подстратификация стратификации (134). Определено двулистное накрытие $N_{K_0} \to \hat{N}_{K_0}$ и стратификация (69) двулистного накрывающего. В предположении, что отображение $\hat{f}$ является PL–отображением общего положения, стратификации (135), (136) состоят из стратов глубины не превышающей $r_{max,0}$.

(Естественно высказать следующуюгипотезу: применяя теорему PL–трансверсальности можно показать, что произвольный 2-диск в полиэдре $\hat{N}_{K_0}^0$ снимается с подполиэдра $\hat{N}_{K_0}^3 \subset \hat{N}_{K_0}^0$ сколь угодно малым шевелением, поэтому фундаментальные группы пространств $\hat{N}_{K_0}^0$ и $\hat{N}_{K_0}^0 \setminus \hat{N}_{K_0}^3$ совпадают (ср. с Леммой 40).)

Теперь определим гомотопию $\hat{f}$ [1]. Рассмотрим нормальное расслоение $\nu_{J_0} : E(\nu) \to J_0$ вложения $i_{J_0} : J_0 \subset \mathbb{R}^n$. Вложение i_{J_0} определено как

[1] Конструкция была получена на семинаре С.А.Богатого

стандартное вложение $(n-k)$–мерной сферы в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ с коразмерностью k. Расслоение ν_{J_0} является тривиальным k–мерным расслоением, причем по условию леммы $k \ge 8$. Представим расслоение ν_{J_0} в виде суммы Уитни тривиального 4-мерного расслоения $\varepsilon_1 : E(\varepsilon_1) \to J_0$, тривиального 2-мерного расслоения $\varepsilon_2 : E(\varepsilon_2) \to J_0$ и дополнительного к $\varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2$ тривиального расслоения $\varepsilon_3 : E(\varepsilon_3) \to J_0$ неотрицательной размерности размерности $(k-6)$, которое содержит сумму Уитни $\varepsilon_{3;1} \oplus \varepsilon_{3;2} \subset \varepsilon_3$ двух линейных тривиальных расслоений $\varepsilon_{3;1} \subset \varepsilon_3$, $\varepsilon_{3;2} \subset \varepsilon_3$.

Переобозначим отображение $(I_J \circ \hat{F})$ через $\hat{f}_{-2}$. Выберем последовательность бесконечно-малых чисел $\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_{r_0+1}, \delta_{r_0+2}$ такую, что $\delta_{i+1} = o(\delta_i)$ и построим последовательность C^1–малых PL–деформаций

$$\hat{f}_{-2} \mapsto \hat{f}_{-1} \mapsto \hat{f}_0 \mapsto \dots \mapsto \hat{f}_{r_0} \mapsto \hat{f}_{r_0+1}, \tag{137}$$

задавая C^1–калибр деформации $\hat{f}_{i-1} \mapsto \hat{f}_i$ бесконечно-малым числом δ_i. Указанную последовательность бесконечно-малых чисел можно представлять как убывающую последовательность положительных чисел, каждое последующее число выбирается настолько малым, что указанные в построении свойства аппроксимирующей гомотопии, достигнутые на предыдущем шаге, сохраняются. Выбор числа δ_i возможен, поскольку свойства, отображения $\hat{f}_{i-1}$, достигнутые на текущем этапе построения, сохраняются при произвольной C^1–малой деформации достаточного малого калибра.

Последнюю гомотопию $\hat{f}_{r_0+1}$ в этой последовательности преобразуем дополнительной деформацией калибра δ_{r_0+2}, $\delta_{r_0+2} << \delta_{r_0+1}$ в PL–отображение общего положения. При произвольном достаточно малом t, $0 < t < \delta_{r_0+2}$, гомотопия $\hat{f}_{r_0+2}$ определяет искомое отображение $\hat{d} = \hat{f}_{r_0+2}(t)$.

На предворительном шаге деформация $\hat{f}_{-2} \mapsto \hat{f}_{-1}$ строится вертикальной вдоль подрасслоения ε_1 в нормальном расслоении ν_{J_0}. Калибр рассматриваемой деформации равен δ_{-1}. Деформация $\hat{f}_{-2} \mapsto \hat{f}_{-1}$ строится такой, что прообраз $p^{-1}_{J_0}(\alpha^{(s)})$ каждого элементарного страта $\alpha^{(s)} \subset J_0$ глубины s самопересекается в тотальном пространстве $E(\varepsilon_1)_{\alpha^{(s)}}$ расслоения ε_1 над $\alpha^{(s)}$ в общем положении (как погружения общего положения замкнутого PL–многообразия).

На нулевом шаге деформация $\hat{f}_{-1} \mapsto \hat{f}_0$ строится вертикальной вдоль слоев расслоения ε_2, неподвижной на страте $\hat{C}^{(1)}_p$. Калибр рассматриваемой деформации равен δ_0. Деформация $\hat{f}_{-1} \mapsto \hat{f}_0$ строится такой, что ограничение отображения $\hat{f}_0$ на прообраз элементарного страта $\alpha^{(0)}$ глубины 0 является погружением открытого многообразия, множество точек самопересечения которого совпадает с множеством точек тройного самопересечения погружения $\hat{f}_{-1}$, ограниченного на $\alpha^{(0)}$ и не содержит точек двойного самопересечения.

Чтобы определить деформацию $\hat{f}_{-1} \mapsto \hat{f}_0$ с указанными свойствами достаточно воспользоваться Леммой 32, согласно которой, структурная группа накрытия над многообразием двойных точек самопересечения на каждом элементарном страте редуцируется к целочисленной. Это означает, что особенность двойных точек самопересечения вне можества тройных точек самопересечения распроектируется во вложение в коразмерности 2 вдоль слоев расслоения ε_2.

На шаге с номером i деформация $\hat{f}_{i-1} \mapsto \hat{f}_i$ строится сначала с носителем на $\hat{C}_p^{(i)}$. Предварительная деформация, которую обозначим через $\hat{f}_{i-1} \to \hat{f}'_i$, является неподвижной на $\hat{C}_p^{(i+1)}$. Далее построенная гомотопия $\hat{f}'_i$ продолжается до гомотопии $\hat{f}_i$ на всем $\hat{C}_p$ так, что она совпадает с уже построеным ранее отображением $\hat{f}_{i-1}$ вне малой регулярной окрестности (конечного радиуса) $\hat{C}_p^{(i)}$ и продолжает отображение $\hat{f}_{i-1}$ в эту окрестность на все пространство $\hat{C}_p$ по общему положению с константой C^1–аппроксимации δ_i.

Построение деформации $\hat{f}_{i-1} \mapsto \hat{f}'_i$, $i \geq 1$, осуществляется следующим образом. Рассмотрим произвольный элементарный страт $\alpha^{(i)}$ глубины i из $J_0^{(i)} \setminus J_0^{(i+1)}$ и рассмотрим регулярную окрестность $U_{\alpha^{(i)}}$ страта $\alpha^{(i)}$ в объединении стратов $J_0^{(i-1)} \setminus J_0^{(i)}$ глубины $(i-1)$, примыкающем к страту $\alpha^{(i)}$. Окрестность $U_{\alpha^{(i)}}$ представлена как объединение окрестностей $U_{\beta_j^{i-1},\alpha^{(i)}}$ по окрестностям страта $\alpha^{(i)}$ во всевозможных примыкающих стратах $\beta_j^{(i-1)}$ глубины $(i-1)$. Каждый страт $U_{\beta_j^{(i-1)},\alpha^{(i)}}$ представляет собой прямое произведение $\alpha^{(i)} \times D^2$. Прообраз $\hat{p}^{-1}(U_{\beta_j^{(i-1)},\alpha^{(i)}})$ окрестности $U_{\beta_j^{(i-1)},\alpha^{(i)}}$ при отображении $\hat{p} : (S^{n-k}/\mathbf{i})^{(i-1)} \setminus (S^{n-k}/\mathbf{i})^{(i)} \to J_0^{(i-1)} \setminus J_0^{(i)}$ обозначим через $\hat{V}_{b_j,a}$. Объединение $\hat{V}_{b_j,a}$ по всем b_j обозначим через $\hat{V}_a$. Это объединение является прообразом $U_{\alpha^{(i)}}$ при отображении $\hat{p}$.

Прообраз $\hat{V}_{b_j,a}$ представляет собой прямое произведение 4^{r-i-1}-листного накрывающего $\hat{a}$ над $\alpha^{(i)}$ на открытый 2-диск D^2. Снова воспользуемся координатным описанием отображения $\hat{p}$, откуда вытекает, что ограниченное $\hat{p}$ на $\hat{V}_{b_j,a}$, является прямым произведением стандартного разветвленного 4-листного над D^2 и параметризующего отображения $\hat{b}_j \to \beta_j$.

По предположению индукции гомотопия $\hat{f}_{i-1}$, ограниченная на $\hat{V}_a$

неподвижна на $\hat{a}$, причем для каждого $\hat{b}_j$ деформация $\hat{f}_{i-2} \mapsto \hat{f}_{i-1}$ направлена в трансверсальном направлении к $U_{\beta_j,\alpha}$ и ее C^1–калибр существенно превышает δ_i.

Определим гомотопию $\hat{f}'_i$ окрестности $\hat{V}_\beta \to \mathbb{R}^n$, как результат δ_i–малой C^1–деформации на каждой окрестности $\hat{V}_a$ вдоль касательного пространства к произвольно выбранному страту β глубины $i-1$, примыкающему к α. Гомотопия $\hat{f}'_i$ строится также как при $i = 0$. В результате точки самопересечения элементарного страта $\alpha^{(i)}$ совпадают с точками тройного самопересечения этого элементарного страта при гомотопии f_{-1}. При этом ограничение гомотопии $\hat{f}'_i$ на границу окрестности $\hat{V}_\alpha$, в частности, на границу $\partial(\hat{a})^{cl}$ центрального подмногообразия $\hat{a} \subset \hat{V}_{b,a}$ страта $\hat{a}$ неподвижно.

Определим гомотопию $\hat{f}_i$ в результате продолжения гомотопии $\hat{f}'_i$ по общему положению, близкой к гомотопии $\hat{f}_{i-1}$ с константой C^1–аппроксимации δ_i. Результатом гомотопии является отображение, которое определенно как ограничение гомотопии $\hat{f}_i$ при $t_0 = \delta_i$. Ограничение отображения $\hat{f}_i$ на каждый элементарный страт глубины j, $0 \le j < i$, пространства $S^{n-k}/\mathbf{i}^{(1)}$ имеет точки самопересечения, которые получены малой деформацией точек тройного самопересечения отображения $f_j(t_0)$. Отображение $f_j(t_0)$ было определено на предварительном шаге конструкции. Точки, лежащие на стратах глубины $(i+1)$ (и выше) имеют структуру точек самопересечения общего вида. При этом точки самопересечения стратов разной глубины, у отображения, определенного в результате гомотопии $\hat{f}_i$, вообще говоря, могут присутствовать. Деформация $\hat{f}_{i-1} \to \hat{f}_i$ и, тем самым, последовательность деформаций (137), за исключением последней деформации $\hat{f}_{r_0} \mapsto \hat{f}_{r_0+1}$ построена.

Приступим к описанию деформации $\hat{f}_{r_0} \mapsto \hat{f}_{r_0+1}$. Полиэдр точек двойного самопересечения вне полиэдра точек тройного самопересечения гомотопии f_{r_0+1} вертикально распроектируется вдоль слоя расслоения $\varepsilon_{3;1}$. Указанное распроектирование вне точек тройного самопересечения корректно определено, поскольку каноническое двулистное накрытие над полиэдром точек самопересечения, который содержит только точки пересечения стратов разной глубины, очевидно, тривиально (пара точек в накрывающем полиэдре естественно упорядочена значением глубины стратов).

Отображение $\hat{f}$, полученное при последней деформации $\hat{f}_{r_0+2} \mapsto f_{r_0+3}$, определяет искомое отображение $\hat{d}$ (d) как ограничение на $S^{n-k}/\mathbf{i} \times \{\delta_{r_0+3}\}$ $(\mathbb{RP}^{n-k} \times \{\delta_{r_0+3}\})$. Отображение $\hat{d}$ имеет лишь точки самопересечения кратности не ниже 3.

Обратимся к построению отображения (143) (см. формулу ниже). Рассмотрим полиэдр точек самопересечения отображения $\hat{f}_{r_0}(\delta_{r_0})$ и обозначим этот полиэдр для краткости через $\hat{N}_{K_0}(r_0)$. Будем использовать аналогичные обозначения $\hat{N}_{K_0}(r_0+1)$, $\hat{N}_{K_0}(r_0+2)$. Полиэдр самопересечения отображения $\hat{d} = \hat{f}_{r_0+3}(\delta_{r_0+3})$ обозначим через $\hat{N}_{K_0} \subset \hat{K}_0$.

Полиэдр $\hat{N}_{K_0}(r_0)$ содержит цепочку вложенных подполиэдров:

$$\hat{N}_{K_0}(4; r_0) \subset \hat{N}_{K_0}(3; r_0) \subset \hat{N}_{K_0}(2; r_0) \subset \hat{N}_{K_0}(r_0) \subset \hat{K}_0. \tag{138}$$

Дополнительный индекс $2, 3, 4$ обозначает подполиэдр в полиэдре точек самопересечения, состоящий из замыкания прообраза множества точек кратностей не менее $2, 3, 4$ соответственно. Определена также цепочка вложенных подполиэдров:

$$\hat{N}_{K_0}(4; r_0) \subset \hat{N}_{K_0}(3; r_0) \subset \hat{N}_{K_0}(2; r_0) \subset \hat{N}_{K_0}(r_0) \subset \hat{K}_0, \tag{139}$$

двулистных накрывающих.

По условию общего положения, подполиэдр $\hat{N}_{K_0}(4; r_0) \subset \hat{N}_{K_0}(3; r_0)$ в диаграмме (139) точек самопересечения кратности не менее 4, внутри полиэдра точек самопересечения кратности не менее 3, имеет коразмерность 4. В частности, фундаментальная группа полиэдра $\hat{N}_{K_0}(3; r_0) \setminus \hat{N}_{K_0}(4; r_0)$ изоморфна фундаментальной группе полиэдра $\hat{N}_{K_0}(3; r_0)$.

Определено естественное вложение

$$\hat{t} : (\hat{N}_{K_0}(3; r_0) \setminus \hat{N}_{K_0}(4; r_0)) \to R\hat{K}_0, \tag{140}$$

поскольку каждой точке двойного самопересечения полиэдра $\hat{N}_{K_0}(3; r_0)$ соответствует единственная третья точка на $\mathbb{RP}^{n-k} \times \delta_{t_0}$ с тем же образом при отображении $\hat{f}_{r_0}(\delta_{r_0})$. Отображение (140) продолжается по непрерывности до отображения

$$\hat{t} : \hat{N}_{K_0}(3; r_0) \to R\hat{K}_0. \tag{141}$$

Аналогично определено отображение

$$t : N_{K_0}(3; r_0) \to R\hat{K}_0. \tag{142}$$

На этапе построения деформации $\hat{f}_{r_0} \mapsto \hat{f}_{r_0+1}$ полиэдр $\hat{N}_{K_0}(3; r_0 + 1)$ точек самопересечения отображения $\hat{f}_{r_0+1}(\delta_{r_0+1})$ PL–гомеоморфен полиэдру $\hat{N}_{K_0}(3; r_0)$ точек самопересечения отображения $\hat{f}_{r_0}(\delta_{r_0})$ (последний полиэдр в этом случае рассматривается при меньшем значении параметра гомотопии $t = \delta_{r_0+1}$). Поэтому для полиэдра $\hat{N}_{K_0}(3;r_0+1)$ также определено вложение, аналогичное (140), которое получено ограничением (140) на этот подполиэдр.

Проверим, что для полиэдра $\hat{N}_{K_0}(3;r_0+1)$ выполняются граничные условия, предусмотренные в диаграмме (58), (см. Лемму 28) т.е. проверим, что образ подполиэдра $\hat{N}_{diag} \cap \hat{N}_{K_0}(3;r_0+1) \subset \hat{N}_{K_0}(3;r_0+1)$ при отображении $\hat{t}$ лежит в подполиэдре $R\hat{Q}_{diag} \subset \hat{K}_0$, а образ подполиэдра $\hat{N}_{antidiag} \cap \hat{N}_{K_0}(3;r_0+1) \subset \hat{N}_{K_0}(3;r_0+1)$ при отображении $\hat{t}$ лежит в подполиэдре $R\hat{Q}_{antidiag} \subset \hat{K}_0$.

Для доказательства достаточно заметить, что указанное свойство для полиэдра $\hat{N}_{K_0}(3;r_0+1) \setminus \hat{N}_{K_0}(4;r_0+1)$ выполняется по построению деформации $\hat{f}_{\delta_{r_0}} \mapsto \hat{f}_{\delta_{r_0}}$. Следовательно, поскольку отображение (141) строилось как продолжение отображения (140) на замыкание прообраза, граничные условия будут выполняться и для отображения (141).

На предпоследнем этапе построения деформации $\hat{f}_{r_0} \mapsto \hat{f}_{r_0+1}$ отображение $\hat{f}_{r_0+1}(\delta_{r_0+1})$ имеет точек самопересечения кратности не менее 3, поскольку все точки самопересечения, которые не являются точками самопересечения кратности 3 и более устраняются вертикальным распроектированием. Поэтому полиэдр $\hat{N}_{K_0}(r_0+2)$ совпадает с полилиэдром $\hat{N}_{K_0}(3;r_0+1)$, а значит отображение $\hat{t}$ определено на всем полиэдре $\hat{N}_{K_0}(r_0+2)$ и удовлетворяет тем же граничным условиям, что и отображение на $\hat{N}_{K_0}(3;r_0+1)$.

Наконец, на последнем этапе для полиэдра точек самопересечения отображения $\hat{h}$ справедливо включение $\hat{N}_{K_0} \subset \hat{N}_{K_0}(r_0+2)$ и тем, самым, отображение

$$\hat{t} : \hat{N}_{K_0} \to R\hat{K}_0, \quad t : N_{K_0} \to RK_0 \tag{143}$$

с требуемыми граничными условиями построено.

Лемма 30 доказана.

Доказательство Леммы 31

Доказательство аналогично доказательству Леммы 30. Лемма 31 доказана.

4 Многообразия с кватернионным оснащением

Рассмотрим группу $\mathbf{Q}_a$ кватернионов порядка 8. Определено представление $\chi_+ : \mathbf{Q}_a \to SO(4)$, которое переводит единичные кватернионы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ в матрицы $(20), (21), (22)$ соответственно.

Представление χ_- переводит единичные кватернионы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ в матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{144}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{145}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{146}$$

Образ группы кватернионов при представлениях χ_+ и χ_- определяют также подгруппы в группе $\mathbb{Z}/2^{[3]} \subset O(4)$. Заметить, что внешнее сопряжение подгруппы $\mathbf{H} \subset \mathbb{Z}/2^{[3]}$ на элемент из $\mathbb{Z}/2^{[3]} \setminus \mathbf{H}$, заданный преобразованием $\mathbf{e}_1 \to -\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_i \to \mathbf{e}_i$, $2 \le i \le 4$, определяет автоморфизм $\mathbf{H} \to \mathbf{H}$, при котором подгруппа $Im\chi_+$ переходит подгруппу $Im\chi_-$ единичных кватернионов в $\mathbf{H}$, представление которой задается матрицами (144),(145),(146).

Определена прямая сумма представлений $\chi_+ \oplus \chi_- : \mathbf{Q}_a \to SO(4) \oplus SO(4) \to SO(8)$, это представление обозначим через $\psi_{+,-}$. Определено представление $\chi_+ \oplus \chi_+ : \mathbf{Q}_a \to SO(4) \oplus SO(4) \to SO(8)$, которое обозначим через $\psi_{+,+}$.

Определены свободные действия $p_7 : \mathbf{Q}_a \times S^7 \to S^7$, $p_3 : \mathbf{Q}_a \times S^3 \to S^3$, построенные по представлениям $\psi_{+,+}$, χ_+. Соответствующее факторпространства будем обозначать через $S^7/\mathbf{Q}_a$, $S^3/\mathbf{Q}_a$.

Рассмотрим однородные пространства $S^7/\mathbf{Q}_a$, $S^3/\mathbf{Q}_a$, определенные как факторпространства действий p_7, p_3. Определены пара векторных 8- и пара векторных 4-х мерных расслоения $\zeta_{+,+} : E(\zeta_{+,+}) \to S^7/\mathbf{Q}_a$, $\zeta_{+,-} : E(\zeta_{+,-}) \to S^7/\mathbf{Q}_a$, $\eta_+ : E(\eta_+) \to S^7/\mathbf{Q}_a$, $\eta_- : E(\eta_-) \to S^7/\mathbf{Q}_a$ со структурной группой $\mathbf{Q}_a$. При этом 8-мерное расслоения $\zeta_{+,+}$, $\zeta_{+,-}$ ассоциированы с представлениями $\psi_{+,+}$, $\psi_{+,-}$ расслоения η_+, η_- ассоциированы с представлениями χ_+, χ_- соответственно.

Рассматривая клеточное разбиение пространства $S^7/\mathbf{Q}_a$, заключаем, что $H^4(S^7/\mathbf{Q}_a;\mathbb{Z}) = H_3(S^7/\mathbf{Q}_a;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/8$. При этом образующая t указанной группы определена как образ фундаментального класса $[S^3/\mathbf{Q}_a]$ при вложении $S^3/\mathbf{Q}_a \subset S^7/\mathbf{Q}_a$, которое параметризует 3-остов $K^3 \subset S^7/\mathbf{Q}_a$.

Предложение 41. *Пусть K^7 – произвольное ориентированное замкнутое многообразие, стабильное нормальное расслоение которого изоморфно расслоению $f^*(k\zeta_{+,+})$, $f : K^7 \to S^7/\mathbf{Q}_a$, $s = 1 \pmod 2$. Тогда* $\deg(f) = 0 \pmod 2$.

Доказательство Предложения 41

Заметим, что расслоение над $S^7/\mathbf{Q}_a$, полученное из $k\zeta_{+,+}$ обращением ориентации, совпадает с $k\zeta_{+,-}$. Рассмотрим ориентированное (несвязное) многообразие $K^7 \cup -K^7$, с нормальным расслоением $f^*k\zeta_{+,+} \cup f^*k\zeta_{+,-}$.

Докажем, что в группе $H_3(S^7/\mathbf{Q}_a;\mathbb{Z})$ с образующей, обозначенной через t, справедливы равенства:

$$[p_1(k\zeta_{+,+})]^{op} = 4t, \tag{147}$$

$$[p_1(k\zeta_{+,-})]^{op} = 0. \tag{148}$$

Сначала докажем равенство (147) при $k = 1$. Расслоение $\zeta_{+,+}$ является комплексным, следовательно, согласно Следствию 15.5 из книги [M-S] справедливо равенство:

$$p_1(\zeta_{+,+}) = c_1^2(\zeta_{+,+}) - 2c_2(\zeta_{+,+}). \tag{149}$$

Поскольку $\zeta_{+,+} = \eta_+ \oplus \eta_+$, то согласно формуле (14.7) $c_2(\zeta_{+,+}) = c_2(\eta_+ \oplus \eta_+) = c_1^2(\eta_+) + 2c_2(\eta_+)$. Поскольку комплексная размерность расслоения η_+ равна 2, $c_2(\eta_+)$ совпадает с классом Эйлера и равен t. Далее $c_1^2(\eta_+ \oplus \eta_+) = 4c_1^2(\eta_+)$. Суммируя доказанные равенства, с учетом $8t = 0$, получим $p_1(\zeta_{+,+}) = 2c_1^2(\eta_+) + 4t$.

Осталось доказать, что

$$c_1^2(\eta_+) = 0. \tag{150}$$

Справедливо равенство $i^*(c_1(\eta_+)) = 0$, где $i : S^3/\mathbf{Q}_a \subset S^7/\mathbf{Q}_a$ естественное вложение, поскольку расслоение $i^*(\eta_+)$ тривиально. Гомоморфизм

$$H^2(S^7/\mathbf{Q}_a;\mathbb{Z}) \xrightarrow{i^*} H^2(S^3/\mathbf{Q}_a;\mathbb{Z})$$

является мономорфизмом, поэтому $c_1(\eta_+) = 0$. Равенство (150) и равенство (147) при $k = 1$ доказаны.

Докажем равенство (148) при $k = 1$. Расслоение $\zeta_{+,-}$ является комплексным, следовательно, по аналогичным вычислениям:

$$p_1(\zeta_{+,-}) = c_1^2(\zeta_{+,-}) - 2c_2(\zeta_{+,-}). \tag{151}$$

Поскольку $\zeta_{+,-} = \eta_+ \oplus \eta_-$, то $c_2(\eta_+ \oplus \eta_-) = c_1(\eta_+)c_1(\eta_-) + c_2(\eta_+) + c_2(\eta_-)$. В последней формуле второе и третье слагаемые сокращаются, поскольку эйлеровы классы расслоений η_+, η_- противоположны по знаку. Аналогично предыдущему вычислению, имеем $c_1^2(\eta_+ \oplus \eta_-) = c_1^2(\eta_+)+c_1^2(\eta_-)+2c_1(\eta_+)c_1(\eta_-)$. Суммируя доказанные равенства, получим $p_1(\zeta_{+,-}) = c_1^2(\eta_+) + c_1^2(\eta_-)$. Остается заметить, что $c_1^2(\eta_-) = 0$ по аналогичным с (150) вычислениям. Равенство (148) при $k = 1$ доказано.

Докажем (147), (148) при произвольном нечетном k. Сначала докажем, что у комплексных расслоений $2l\zeta_{+,+}$, $2l\zeta_{+,-}$ характеристический класс c_1 равен нулю, а $c_2(2l\zeta_{+,+}) = c_2(2l\zeta_{+,+}) = 4lt$. Поскольку $2l\zeta_{+,+} = 4l\eta_+$, то согласно формуле (14.7) с учетом равенства (150), получим: $c_2(2l\zeta_{+,+}) = c_2(4l\eta_+) = 4lc_2(\eta_+) = 4lt$. Аналогично получим $c_2(2l\zeta_{+,-}) = 4lt$. Равенства (147), (148) вытекают из уравнений (149), (151).

Рассмотрим отображение $F = f \cup f : K^7 \cup -K^7 \to S^7/\mathbf{Q}_a$ ориентированного (несвязного многообразия). По построению отображение F ориентированно бордантно нулю. С другой стороны, характеристическое число

$$F_*([p_1(k\zeta_{+,+})]^{op} + [p_1(k\zeta_{+,+})]^{op}) \in H_3(S^7/Q_a)$$

сохраняется при кобордизме. Это число равно нулю, при $def(f) = 0 \pmod 2$, и равно 0, при $deg(f) = 1 \pmod 2$. Предложение 41 доказано.

При доказательстве Теоремы 5 было использовано следующее Предложение.

Обозначим через $\mathbb{Z}/2^{[s]}$ группу, полученную в результате s-кратного сплетения элементарной группы $\mathbb{Z}/2$, которая определяется аналогично случаю $s = 3$. Обозначим через $\omega : E(\omega) \to K(\mathbb{Z}/2^{[s]}, 1)$ – универсальное 2^{s-1}–мерное расслоение со структурной группой $\mathbb{Z}/2^{[s]}$.

Предложение 42. *Пусть K – произвольный полиэдр размерности $dim(K) = 7$, снабженный отображением $\varphi : K \to K(\mathbb{Z}/2^{[s]}, 1)$ и пусть $\varphi^*(\omega)$ – обратный образ расслоения ω при отображении φ. Тогда для любого натурального числа l, $l \equiv 0 \pmod 8$ расслоение $l\varphi^*(\omega)$ изоморфно тривиальному.*

Доказательство Предложения 42

Обозначим расслоение $l\varphi^*(\omega)$ через ψ_s. Докажем утверждение по индукции. При $s=1$ утверждение хорошо известно.

Воспользуемся тем, что расслоение ψ_{s-1}, $s > 1$, тривиально. Докажем, что расслоение ψ_s тривиально. Рассмотрим двулистное накрытие $\bar{K} \to K$, индуцированное подгруппой индекса 2 $\mathbb{Z}/2^{[s-1]} \oplus \mathbb{Z}/2^{[s-1]} \subset \mathbb{Z}/2^{[s]}$. Рассмотрим расслоение $\psi_s^!$ над $\bar{K}$, определенное как трансфер расслоения $\mathbb{Z}/2^{[s]}$. Справедлива формула $\psi_s^! = \psi_{s-1,1} \oplus \psi_{s-1,2}$, где прямые слагаемые $\psi_{s-1,1}$, $\psi_{s-1,2}$ суть расслоения над $\bar{K}$ с меньшими структурными группами. Эти расслоения изоморфны между собой, причем изоморфизм осуществляется инволюцией накрытия $\bar{K}$. По предположению индукции расслоения $\psi_{s-1,1}$, $\psi_{s-1,2}$ тривиальны. Следовательно, для расслоений над K справедливо равенство $\psi_s = l2^{s-2}\kappa \oplus l2^{s-2}\varepsilon$, где κ – линейное расслоение, класифицирующее накрытие $\bar{K} \to K$, ε – тривиальное расслоение. Расслоение $l\kappa$ и, тем более, расслоение $l2^{s-2}\kappa$, тривиально, следовательно, расслоение ψ_s тривиально. Предложение 42 доказано.

В заключении сформулируем следующуюгипотезу.

Гипотеза (С.А.Мелихов)

Для доказательства Основной Теоремы построения раздела 3 не нужны. Теорему 9 можно доказать методами настоящей работы без использования Предложений 22, 23 в предположении $l \geq 4$ (т.е. при $n \geq 15$).

Список литературы

[Ad] J.Adem, *The iteration of the Steenrod squares in algebraic topology*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 38 (1952) 720-726.

[A] J.F.Adams, *On the non-existence of Elements of Hopf-Invariant One*, Ann Math., Ser.2, Vol 72 (1960) 20-104. Перевод: Математика 5:4 (1961) 3-86.

[A-A] J.F.Adams, M.F. Atiyah, *K-theory and the Hopf invariant*, Quart. J. Math., 17 (1966) 31-38.

[Akh] П.М.Ахметьев, *Геометрический подход к стабильным гомотопическим группам сфер. Инварианты Адамса-Хопфа*, Фундаментальная и прикладная математика, том 13, вып. 8, (2007) 3-15.

[Ada] M. Adachi, *Embeddings and Immersions*, Transl. Math. Monographs, 124) Amer. Math. Soc., Providence, RI (1993).

[A-M] A. Adem and R.J. Milgram, *Cohomology of Finite Groups*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1994).

[A-E] P.M.Akhmet'ev and P.J.Eccles, *The relationship between framed bordism and skew-framed bordism*, Bull. London Math. Soc., vol 39 (2007) 473-481.

[A-Sz] P.M.Akhmet'ev and A.Szucs, *Geometric proof of the easy part of the Hopf invariant one theorem*, Math.Slovaca, 49 (1999) N1 71-74.

[B] В.М.Бухштабер, *Модули дифференциалов спектральной последовательности Атья-Хирцебруха II*, Мат. Сборник (1970) т.83 (125) N1 307-320.

[B-M] Bott R. - Milnor J.: *On the parallelizability of the spheres* Bull. Amer. Math. Soc. 1958, 64, pp. 87-89.

[E1] P.J.Eccles, *Codimension One Immersions and the Kervaire Invariant One Problem.* Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. vol 90 (1981) 483- 493.

[E2] P.J.Eccles, *Representing framed bordism classes by manifolds embedded in low codimension. Geometric applications of homotopy theory* (Proc. Conf., Evanston, Ill., 1977), I, pp. 150–155, Lecture Notes in Math., 657, Springer, Berlin, 1978.

[E-G] P.J.Eccles amd M. Grant *Bordism groups of immersions and classes represented by self-intersections*, Algebraic and Geometric Topology 7 (2007) 1081–1097.

[Gr] M.Gromov, *Partial differential relations.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3, Springer-Verlag, Berlin 1986. Перевод: Дифференциальные соотношения с частными производными. Москва Мир 1990.

[F] К.Э.Фельдман, *Новое доказательство гипотезы Фробениуса о размерностях вещественных алгебр без делителей нуля*, Вестник МГУ, сер. 1, N1 (2000) 61-63.

[He] R.J.Herbert, *Multiple points of immersed manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc. 250 (1981).

[Hi] M.W.Hirsch, *Immersions of manifolds*, Trans.Amer.Math.Soc., 93, (1960) 242-276.

[K-S1] U.Koschorke, B.Sanderson, *Geometric interpretations of generalized Hopf invariant*, Math.Scand.41 (1977), 199-217.

[K-S2] U. Koschorke and B.Sanderson, *Self-intersections and higher Hopf invariants*, Topology 17 (1978) 283-290.

[K1] U.Koschorke, *Vector Fields and Other Vector Bundle Morphisms – A Singularity Approach*, Lect. Notes. Math. 847 (1981).

[K2] U.Koschorke, *Multiple points of immersions and the Kahn-Priddy theorem*, Math.Z., 169 (1979) 223-236.

[La] J.Lannes, *Sur les immersions de Boy*, Lecture Notes in Mathematics, 1051, Springer-Verlag (1984) 263-270.

[L-S] R.Lashof and S.Smale, *On the immersion of manifolds in euclidean space*, Ann.Math. vol 68, N3 (1958) 562-583.

[Ma] W.S.Massey, *Imbeddings of projective planes and related manifolds in spheres*, Indiane Univ. Math. Journal, Vol. 23, N9 (1974) 791-812.

[Me] S.A.Melikhov, *Sphere eversions and the realization of mappings*, Труды Математического Института им. В.А.Стеклова, т.247, 159-181. Геометрическая топология и теория множеств, сборник статей к 100-летию Л.В.Келдыш, English transl.: Geom. Topol. i Teor. Mnozh., Proc. Steklov Inst. Math. 2004, no. 4 (247), 143–163. arXiv math/0305158

[Me2] S.A.Melikhov, *Изотопическая и непрерывная реализуемость отображений в метастабильном ранге*, Матем. сб., 2004, том 195, номер 7, страницы 71–104 (Mi msb835)

[M-S] J.Milnor and J.Stasheff, *Characteristic classes* Annals of Mathematics Studies, N76, Princeton, New Jersey, 1974. Перевод: Характеристические классы. Москва, Мир (1979).

[M] Minami,N., *On the Kervaire invariant problem*, Homotopy theory via algebraic geometry and group representations (Evanston, Indiana, IL, 1997), 229–253, Contemp. Math., 220, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[M-T] Mosher R.S. Tangora M.C., *Cohomology operations and their applications in homotopy theory*, N.Y. Harper and Row, Publishers, 1968. Перевод Мир 1970.

[N] С.П.Новиков, *Топология-1*, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ) Т 12 Москва (1986) 5-252.

[P] Л.С.Понтрягин, *Гладкие многообразия и их применение в теории гомотопий*, Москва, Наука, 1976. L.S.Pontryagin, *Smooth manifolds and their applications to homotopy theory*, 2-nd ed., Nauka, Moscow (1976), English transl.: Amer. Math. Soc. Transl. (2) 11 (1959) 1-114; reprinted (1964).

[Por] I. R. Porteous *Simple singularities of maps*, Proc. Liverpool Singularities: Symposium I, Lecture Notes in Math., vol 192, Springer, Berlin, (1971) 286–307.

[Po] М.М.Постников, *Гуппы и алгебры Ли*, Москва, Наука 1982.

[Sz] A.Szucs, *Geometrical proof of a theorem on suspension in homotopy groups of spheres*, Colloquia Mathematica Soc. Janos Bolyai 55 Topology Pecs (Hungary) (1989) 501-505.

[Sz2] A.Szucs, *Cobordism of immersions and singular maps, loop spaces and multiple points*, Geometric and Algebraic Topology, Banach Center Publ., 18 PWN, Warsaw (1986) 239-253.

[V] В.А.Васильев, *Топология дополнений к дискриминантам*, Фазис, Москва, 1997.

[We] R.Wells, *Cobordism groups of immersions* Topology 5 (1966) 281- 294.

[W] G.Whitehead, *Elements of Homotopy Theory* Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin (1978).

Московская обл. г.Троицк 142190 ИЗМИРАН
pmakhmet@izmiran.ru