Об асимптотических высших аналогах инварианта спиральности в МГД.

П.М.Ахметьев

5 февраля 2008

Аннотация

Определен новый асимптотический инвариант магнитного поля: квадратичная (и полиномиальная) спиральность. Построен высший асимптотический инвариант магнитного поля. Обсуждаются различные задачи, которые решаются при помощи инварианта магнитной спиральности.

Ключевые слова: магнитная спиральность, асимптотический инвариант Хопфа, интеграл Гаусса, инвариант зацепления.

Коды MSC: 35Qxx, 57Mxx, 76Fxx.

Введение

Рассмотрим систему уравнений МГД

$$\frac{\partial(w)}{\partial t} = \mathrm{rot}(V \times w) + \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\mathbf{B} \times \mathbf{B}) - \nu \mathrm{rotrot} w, \tag{1}$$

$$w = \mathrm{rot} V; \quad \mathrm{div}(V) = 0;$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}(V \times \mathbf{B}) - \eta \mathrm{rotrot}\mathbf{B}, \tag{2}$$

$$\mathrm{div}(\mathbf{B}) = 0.$$

Уравнение (1) определяет эволюцию вектора ротора скорости жидкой проводящей среды в присутствии магнитного поля с учетом гидродинамической вязкости. Уравнение (2) определяет эволюцию вектора магнитного поля с учетом магнитной вязкости. Предполагается, что в начальный момент времени векторные поля $\mathbf{B}$, w имеют конечный носитель. Из системы (1),(2), очевидно, вытекает, что и при всех $t > 0$ решения $\mathbf{B}(t)$, $w(t)$ имеют конечный носитель.

Уравнение (1) записано в форме Коши-Гельмгольца, которая удобна для топологических приложений. В условии отсутствия магнитного поля (или в условиях малого магнитного поля) при нулевой гидродинамической вязкости ν векторное поле w является вмороженным (медленно изменяется по времени во внутренних координатах среды со скоростью, пропорциональной $\mathbf{B}^2$), что влечет законы сохранения (высших) топологических инвариантов, построенных для траекторий этого поля. При достаточно большом $\mathbf{B}$ даже при $\nu = 0$ векторное поле w не является вмороженным и изменяется во внутренних координатах среды под действием сил Лоренца, причем вектор частной производной $\frac{\partial V}{\partial t}$ (вектор V служит вектор-потенциалом векторного поля w) направлен перпендикулярно магнитному полю. При $\nu = 0$, $\eta = 0$ (этот случай носит название идеальной МГД) из условия вмороженности поля w из начальных условий вытекает, векторное поле скорости V имеет асимптотику $V \sim r^{-2}$.

Уравнение (2) выявляет аналогию закона эволюции векторов w и $\mathbf{B}$. В условиях отсутствия магнитной вязкости η векторное поле $\mathbf{B}$ является вмороженным, что также влечет законы сохранения (высших) топологических инвариантов, построенным по траекториям этого векторного поля. Основной топологический инвариант, определяющий закон сохранения системы уравнений в идеальной МГД, связан со средним коэффициентом зацепления пар силовых линий магнитного поля. Этот инвариант называется магнитной спиральностью (см. [A-Kh], гл.3) и также инвариантом Хопфа. Асимптотический инвариант, выражающий значение инварианта магнитной спиральности, связан с интегральным выражением коэффициента зацепления двух замкнутых кривых, который был открыт К.Ф.Гауссом.

Гипотеза А.В.Чернавского состоит в следующем. Предположим, что некоторый первый интеграл I системы уравнений идеальной МГД, при условии, что магнитное поле представлено объединением конечного числа магнитных трубок (см. [A-Kh], гл.3, раздел 7.3) с единичными магнитными потоками, оказывается равен некоторому комбинаторному инварианту конечного порядка, вычисленному для трехмерного зацепления, которое образовано центальными линиями семейства магнитных трубок. Тогда либо инвариант I алгебраически выражается через магнитную спиральность, либо не выражается конечнократным несобственным интегралом от полей $\mathbf{B}$ и V и частных производных этих полей любого конечного порядка. Частичные результаты в направлении положительного решения гипотезы Чернавского были получены С.С.Подкорытовым (2004, устное сообщение).

С другой стороны, не любой инвариант конечного порядка 3-мерного зацепления порождает закон сохранения вмороженного магнитного поля, т.к. инвариант, выражающий закон сохранения, является асимптотическим. Иначе говоря, такой инвариант должен выдерживать предельный переход специального вида (см. раздел 4). Проблема о существовании асимптотических инвариантов магнитного поля была сформулирована В.И.Арнольдом ([Arn], проблемы 1990-16; 1984-12). В настоящей работе мы строим бесконечное семейство асимптотических инвариант: полиномиальные спиральности. Получены другие результаты в направлении построения асимптотических инвариантов магнитного поля, которые порождены высшими топологическими инвариантами конечного порядка, т.е. такими комбинаторными инвариантами, которые не выражаются через коэффициенты зацеплений. Простейший инвариант M в одной бесконечной серии инвариантов изучен в работе.

Основной задачей, основанной на применении интеграла магнитной спиральности, является задача Зельдовича-Сахарова об оценке магнитной энергии через (высшие) топологические инварианты магнитного поля. Основным инструментом исследования в этой задаче служит неравенство Арнольда ([A-Kh], гл.3, раздел 1.3, Теорема 1.5).

Решения системы уравнений МГД в отсутствии магнитной диссипации доставляются колебаниями вблизи положений магнитостатического равновесия, в котором магнитная энергия минимизируется ([T]).

Наличие даже слабой магнитной вязкости приводит к разрушению всех высших топологических инвариантов, за исключением инварианта магнитной спиральности, который полностью характеризует состояние магнитостатического равновесия данной системы. С другой стороны, разрушение высших топологических инвариантов напрямую связано с процессом пересоединения силовых линий (см. [K]).

Построение асимптотических инвариантов магнитного поля, в том числе, теорема Арнольда об асимптотическом гауссовском коэффициенте зацепления является мостиком, связывающим теорию обыкновенных дифференциальных уравнений с (глобальной) топологией. Для двумерных задач в указанном контексте подобной связи не возникает, в частности, корэффициент зацепления двух плоских непересекающихся кривых равен нулю. В случае, когда размерность пространства больше 3, алгебраический аспект задачи изучения топологических инвариантов зацеплений сильно отличается от случая размерности 3. Самый сложный случай размерности 3 представляет наибольший интерес для приложений.

Многие прикладные задачи, решаемые при помощи инварианта спиральности, могут быть более детально изучены при помощи других более тонких асимптотических топологических инвариантов. Точные решения уравнений МГД очень сложны. При переходе от точных решений к приближенным в теории турбулентности используются случайные магнитные (гидродинамические) поля. При этом оказываются полезными приближенные спектральные формулы для закона сохранения, в то время как явная формула самого закона сохранения может быть неизвестна. Произвольный асимптотический топологический инвариант, определяющий закон сохранения, порождает функционал на спектре решений системы уравнений МГД, который сохраняется и для случайного решения.

В разделе 2 вспомним две задачи, которые связаны с изучением свойств турбулентного магнитного поля при помощи интеграла спиральности. Первая задача, которую мне объяснил Д.Д.Соколов, связана с верхней оценкой спектра турбулентного магнитного поля. Смысл этой задачи в следующем: магнитная энергия случайных вихрей с течением времени диссипирует по спектру из области собственных частот с малыми волновыми числами (крупномасштабных) в область собственных частот с большими волновыми числами (мелкомасштабных). Геометрически этот процесс можно, как и в случае аналогичной гидродинамической задачи [F], представлять себе как возникновение фрактального каскада вихрей, все более мелких размеров. Процесс фрактализации не происходит до бесконечности, но лишь до определенного порогового значения, который в первом приближении характеризуется значением гидродинамической энергии в начальный момент времени и инвариантом магнитной спиральности, оба инварианта являются первыми интегралами идеальной системы (в присутствии малой диссипации эти величины являются адиабатическими инвариантами т.к. в этом случае энергия системы не сохраняется, а топология разрушается из-за пересоединения силовых линий). Более детальное исследование рассматриваемой задачи приводит к теории каскадных моделей. Для системы уравнений МГД каскадные модели пока еще недостаточно изучены. Высшие асимптотические инварианты, заданные в виде функционалов на спектре решений, доставляют в этой задаче дополнительную информацию, которая может быть использована как для оценки переноса энергии по спектру, так и для оценки моментов распределения по пространству правых и левых турбулентных вихрей.

Вторая задача из теории динамо связана с проблемой роста магнитного поля. Простейший основной результат назвается α–эффект. Он был открыт в 60-х годах прошлого века Steenbeck, Krause, Rädler (1966). Согласно основному результату этой теории рост среднего магнитного поля в условиях модели с усреднением случайного магнитного поля по мелкомасштабным вариациям поля скорости, в целом, характеризуется средним значением попарных коэффициентов зацепления линий ротора поля скорости среды. Рост магнитного поля наблюдается, когда абсолютная величина указанного среднего коэффициента зацепления достаточно велика и не наблюдается в противном случае. Представляется возможным, что формулы для высших асимптотических инвариантов поля могут оказаться полезными в этом контексте при развитии теории.

В разделе 3 строится высший топологический инвариант M, выражающий закон сохранения для магнитного поля с носителем на трех замкнутых магнитных линиях. Подчеркну, что в отличии от многих других высших (вторичных) топологических инвариантов, появляющихся в этой задаче (см. [M-R], где для решения задачи применяются интегалы Масси), коэффициенты зацепления силовых линий (т.е. первичные топологические инварианты) могут принимать произвольные значения. Более того, если все три попарных коэффициента зацепления магнитных силовых линий обращаются в нуль, то и инвариант M обращается в нуль. Тем не менее, инвариант M не выражается через попарные коэффициенты зацепления.

Раздел 4 посвящен построению нового семейства асимптотических топологических инвариантов $\delta^k_{\mathbf{B}}$ магнитного поля, поля $\mathbf{B}$, где натуральный параметр k называется степенью инварианта полиномиальной спиральности. С точки зрения топологии новый инвариант существенного интереса не представляет: для ориентированного зацепления с двумя компонентами он равен k-ой степени коэффициента зацепления компонент. Для уравнений МГД построенное семейство асимптотических инвариантов представляет интерес т.к. уже при $k = 2$ полиномиальная (квадратичная) спиральность не выражается через интеграл спиральности, как легко показать на примере поля, заключенного в два дизъюнктных зеркальных шара с ненулевой спиральностью в каждом шаре. В этом же разделе доказаны другие результаты в направлении построения высшего асимптотического инварианта $\mu_{\mathbf{B}}$ поля, который порождается комбинаторным инвариантом M трех замкнутых магнитных линий.

Раздел 5 посвящен общим обсуждениям на пути возможных приложений высших асимптотических инвариантов магнитных полей. Приложения основаны на понятии корреляционного тензора магнитного поля. Приводится корреляционный тензор для δ^2 и μ–инвариантов, которые (при выполнении гипотезы о сходимости некоторого формального ряда, которая носит весьма общий характер), можно, в частности, рассматривать как законы сохранения системы уравнений МГД. Здесь же мы кратко обсуждаем топологическую природу M–инварианта и других инвариантов из бесконечной серии на основе результатов работы С.А.Мелихова [Me].

2. Некоторые приложения интеграла спиральности в теории турбулентности

Напомним основные определения: вектор-потенциал $\mathbf{A}(x)$ магнитного поля и интеграл спиральности. Поскольку $\mathrm{div}(\mathbf{B}(x)) = 0$, существует векторное поле $\mathbf{A}(x)$, которое удовлетворяет уравнению $\mathrm{rot}(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$ с граничными условиями: $\mathbf{A}(r) \sim r^{-2}$, при $r \to \infty$. Это векторное поле называется вектор-потенциалом магнитного поля $\mathbf{B}(x)$. Условием $\mathrm{div}(\mathbf{A}(x)) = 0$ вектор-потенциал однозначно определен. Определен интеграл магнитной спиральности по формуле:

$$\chi(\mathbf{B}) = \int \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{B}(x)\, dx. \tag{3}$$

Пример Д.Д.Соколова: оценка спектра турбулентного магнитного поля

Пусть b_k, $0 < k < N$ – набор коэффициентов спектра энергии $E = \int \mathbf{B}^2 dx$ турбулентного магнитного поля в однородной среде. Параметр N определяет границу спектра. Предположим, что для средних значений выполнено равенство

$$\bar{b}_k = C_b^2 k^{-\alpha},$$

где $\alpha > 0$ – показатель спектра (при $\alpha < 1$ оценка эффективная). Коэффициенты спектра магнитной спиральности $\chi(\mathbf{B})$ определены равенством $b_k^{\chi} = C_b^2 k^{-\alpha-1}$, $0 < k < N$ (интеграл сходится). Полная энергия системы $U+E$ оценивается снизу следующим неравенством:

$$U+E > C_b^2 \int_1^N k^{-\alpha} dk \qquad (4)$$

(при $\alpha < 1$ интеграл расходится). Магнитная спиральность $\chi(\mathbf{B})$ доставляет нижнюю оценку константы C_b^2:

$$|\chi(\mathbf{B})| \le C_b^2 \int_1^N k^{-\alpha-1} = C_b^2 \alpha^{-1}.$$

Нижняя оценка константы C_b^2 определяет верхнюю оценку границы спектра N из уравнения (4).

Уравнение индукции для среднего магнитного поля, α-эффект

Предположим, что задано случайное поле скорости $V'(x,t)$ со средним значением $\bar{V}(x,t) = 0$. Представим магнитное поле $\mathbf{B}(x,t)$ в виде: $\mathbf{B}(x,t) = \bar{\mathbf{B}}(x,t) + \mathbf{B}'(x,t)$, где первое слагаемое в правой части равенства является средним магнитным полем, а второе слагаемое определяет случайные вариации магнитного поля. (Отмечу, что в отличии от теории возмущений, где предполагается, что вторичное поле много меньше первоначального, в нашем случае, напротив, $\|\mathbf{B}'(x,t)\| >> \|\bar{\mathbf{B}}(x,t)\|$.)

В работе [R] показано, что среднее магнитное поле $\bar{\mathbf{B}}$ удовлетворяет уравнению

$$-\eta_m \mathrm{rotrot}\bar{\mathbf{B}} + \alpha \mathrm{rot}\bar{\mathbf{B}} - \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0, \qquad \mathrm{div}(\bar{\mathbf{B}}) = 0.$$

Коэффициенты η_m, α в этом уравнении характеризуют скорость изменения среднего магнитного поля. Коэффициент η_m (отрицательный герой) зависит от коэффициента диффузии и спектральных характеристик случайного поля скорости. В то время как коэффициент α (положительный герой) не зависит от спектральных характеристик и равен значению интеграла гидродинамической спиральности

$$\alpha = \chi_w = \int (V(x), w(x)) dx.$$

3. Формула для высшего коэффициента зацепления 3 замкнутых траекторий

Пусть $\mathbf{L} = L_1 \cup L_2 \cup L_3$– 3–компонентное зацепление в $\mathbb{R}^3$, которое мы определим как замкнутое одномерное ориентированное подмногообразие с 3 компонентами связности. Компоненты подмногообразия $\mathbf{L}$ снабжены натуральной параметризацией. Единичный касательный вектор к $\mathbf{L}$ в точке $x_i \in L_i \subset \mathbf{L}$, $i = 1, 2, 3$, обозначим через $\vec{e}(x_0)$.

Для каждой точки $x_i \in L_i$, определим векторное поле $\mathbf{A}(x_i; x)$ с особенностью в точке x_0 по формуле:

$$\mathbf{A}(x_i; x) = \frac{\vec{e}(x_i) \times (x - x_i)}{(x - x_i)^2}.$$

Определим векторное поле $\mathbf{A}_i(x)$ с особенностью на кривой L_i, называемое вектор-потенциалом компоненты L_i, по формуле:

$$\mathbf{A}_i(x) = \oint_{L_i} \mathbf{A}(x_i, x) dx_i, \quad x_i \in L_i.$$

Для каждой пары точек $x_i \in L_i$, $x_j \in L_j$, $i \neq j$, определим векторное поле $\vec{\alpha}(x_i, y_j; x)$ по формуле:

$$\vec{\alpha}(x_i, x_j; x) = \mathbf{A}(x_i; x) \times \mathbf{A}(x_j; x).$$

Определим векторное поле $\vec{\alpha}_{i,j}(x)$ с особенностью на кривых L_i, L_j по формуле:

$$\vec{\alpha}_{i,j}(x) = \mathbf{A}_i(x) \times \mathbf{A}_j(x) = \oint_{L_i \cup L_j} \vec{\alpha}_{i,j}(x_i, x_j; x) dx_i dx_j, \quad x_i \in L_i, x_j \in L_j.$$

Обозначим через (i, j), $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$ – коэффициент зацепления i-ой и j–ой компонент $\mathbf{L}$. Коэффициент (i, j) определяется по формуле:

$$(i, j) = \frac{1}{4\pi} \int \int \frac{\langle \vec{e}(x_i), \vec{e}(x_j), x_i - x_j \rangle}{\|x_i - x_j\|^3} dx_i dx_j, \quad x_i \in L_i, x_j \in L_j,$$

где $\vec{e}$–касательный вектор единичной длины к $\mathbf{L}$, приложенный в со오ветствующей точке.

Обозначим через $\varphi_{j,i} : L_i \to \mathbb{R}^1$, $i \neq j$ – многозначную функцию, определенную выбором ветви при интегрировании вектор-потенциала $\mathbf{A}_j$ по компоненте L_i. Это многозначная функця с периодом (i, j) определяется по формуле:

$$\varphi_{i,j}(x_i) = \int_{pt_i}^{x_i} \mathbf{A}_j(x_i) dx_i, \quad x_i \in L_i,$$

где $pt_i \in L_i$ – выбранная точка на кривой L_i. По построению $\varphi_{j,i}(pt_i) = 0$, причем это значение определено с точностью до прибавления $(i, j)k$,

$k \in \mathbb{Z}$. Многозначную функцию $\varphi_{j,i}$ можно представить себе как сумму стандартной многозначной функции $\varphi^0_{j,i}(pt_i)$, функции $\varphi^{var}_{j,i}$, для которой среднее значение на L_i обращается в нуль, и постоянной функции:

$$\varphi_{j,i}(x_i) = \varphi^0_{j,i}(pt_i) + \varphi^{var}_{j,i} + C'_i. \tag{5}$$

Многозначная функция $\varphi^0_{j,i}(pt_i)$ однозначно характеризуется следующими тремя свойствами: она имеет период (i,j), становится линейной на универсальной накрывающей $\tilde{L}_i$ над L_i и обращается в нуль в отмеченной точке $pt_i \in L_i$.

Определим скалярный потенциал $\phi_i : L_i \to \mathbb{R}^1$ по формулам:

$$\phi_1 = (3,1)\varphi_{2,1} - (1,2)\varphi_{3,1}, \tag{6}$$

$$\phi_2 = (1,2)\varphi_{3,2} - (2,3)\varphi_{1,2}, \tag{7}$$

$$\phi_3 = (2,3)\varphi_{1,3} - (3,3)\varphi_{3,1}. \tag{8}$$

Очевидно, что скалярный потенциал ϕ_i представляет собой однозначную функцию, определенную с точностью до прибавления константы. Воспользовавшись равенством (5), перепишем формулы (6), (7), (8) в виде:

$$\phi_1 = (3,1)\varphi^{var}_{2,1} - (1,2)\varphi^{var}_{3,1} + C_1, \tag{9}$$

$$\phi_2 = (1,2)\varphi^{var}_{3,2} - (2,3)\varphi^{var}_{1,2} + C_2, \tag{10}$$

$$\phi_3 = (2,3)\varphi^{var}_{1,3} - (3,3)\varphi^{var}_{2,3} + C_3. \tag{11}$$

Выбор констант C_1, C_2, C_3 в формулах (11)-(13) однозначно определяется из уравнения:

$$\int_{L_1} C_1 dx_1 = \int_{L_1} (\varphi^{var}_{1,2}\mathbf{grad}\varphi^{var}_{1,3} - \mathbf{grad}\varphi^{var}_{1,2}\varphi^{var}_{1,3}, \vec{e}_1)dx_1 +$$
$$\frac{2}{3}\int \langle \mathbf{A}_1(x), \mathbf{A}_2(x), \mathbf{A}_3(x)\rangle dx,$$
$$\int_{L_2} C_2 dx_2 = \int_{L_2} (\varphi^{var}_{2,3}\mathbf{grad}\varphi^{var}_{2,1} - \mathbf{grad}\varphi^{var}_{2,3}\varphi^{var}_{2,1}, \vec{e}_2)dx_2 +$$

$$\frac{2}{3}\int\langle\mathbf{A}_1(x),\mathbf{A}_2(x),\mathbf{A}_3(x)\rangle dx,$$

$$\int_{L_3} C_3 dx_3 = \int_{L_3}(\varphi_{3,1}^{var}\mathbf{grad}\varphi_{3,2}^{var} - \mathbf{grad}\varphi_{3,1}^{var}\varphi_{3,2}^{var},\vec{e}_3)dx_3 +$$

$$\frac{2}{3}\int\langle\mathbf{A}_1(x),\mathbf{A}_2(x),\mathbf{A}_3(x)\rangle dx.$$

Определим векторное поле $\mathbf{A}_i^{\phi}(x)$ с особенностью на кривой L_i по формуле:

$$\mathbf{A}_i^{\phi}(x) = \oint_{L_i}\phi_i(x_i)\mathbf{A}(x_i,x)dx_i, \quad x_i \in L_i.$$

Для произвольной тройки точек $x_i \in L_i, i = 1,2,3$ определим векторное поле $\mathbf{F}(x_1,x_2,x_3;x)$ с особенностями в точках x_1,x_2,x_3 по формуле:

$$\mathbf{F}(x_1,x_2,x_3;x) = (2,3)(3,1)\vec{\alpha}(x_1,x_2;x) + (3,1)(1,2)\vec{\alpha}(x_2,x_3;x) + \tag{12}$$

$$(1,2)(2,3)\vec{\alpha}(x_3,x_1;x).$$

Определим векторное поле $\mathbf{F}(x)$ с особенностями на компонентах зацепления $\mathbf{L}$ по формуле

$$\mathbf{F}(x) = \oint_{\mathbf{L}}\mathbf{F}(x_1,x_2,x_3;x)dx_1dx_2dx_3.$$

Определим действительное число W при помощи интеграла Гаусса:

$$W = \frac{1}{4\pi}\int\int\frac{\langle\mathbf{F}(x),\mathbf{F}(y),(x-y)\rangle}{\|x-y\|^3}dxdy.$$

Определим действительные числа $b_{1;1,2}$, $b_{1;1,3}$, $b_{2;2,3}$, $b_{2;2,1}$ $b_{3;3,1}$, $b_{3;3,2}$ следующими интегралами:

$$b_{1;1,2} = -(2,3)^2(3,1)\int\langle\mathbf{A}_1(x),\mathbf{A}_2(x),\mathbf{A}_1^{\phi}(x)\rangle dx,$$

$$b_{1;1,3} = -(2,3)^2(1,2)\int\langle\mathbf{A}_3(x),\mathbf{A}_1(x),\mathbf{A}_1^{\phi}(x)\rangle dx,$$

$$b_{2;2,3} = -(3,1)^2(1,2)\int\langle\mathbf{A}_2(x),\mathbf{A}_3(x),\mathbf{A}_2^{\phi}(x)\rangle dx,$$

$$b_{2;2,1} = -(3,1)^2(2,3)\int\langle\mathbf{A}_1(x),\mathbf{A}_2(x),\mathbf{A}_2^{\phi}(x)\rangle dx,$$

$$b_{3;3,1} = -(1,2)^2(2,3)\int \langle \mathbf{A}_3(x), \mathbf{A}_1(x), \mathbf{A}_3^{\phi}(x)\rangle dx,$$

$$b_{3;3,2} = -(1,2)^2(3,1)\int \langle \mathbf{A}_2(x), \mathbf{A}_3(x), \mathbf{A}_3^{\phi}(x)\rangle dx.$$

Определим действительные числа $b_{1;2,3}$, $b_{2;3,1}$, $b_{3;1,2}$ следующими интегралами:

$$b_{1;2,3} = -(1,2)(2,3)(3,1)\int \langle \mathbf{A}_2(x), \mathbf{A}_3(x), \mathbf{A}_1^{\phi}(x)\rangle dx,$$

$$b_{2;3,1} = -(1,2)(2,3)(3,1)\int \langle \mathbf{A}_3(x), \mathbf{A}_1(x), \mathbf{A}_2^{\phi}(x)\rangle dx,$$

$$b_{1;2,3} = -(1,2)(2,3)(3,1)\int \langle \mathbf{A}_1(x), \mathbf{A}_2(x), \mathbf{A}_3^{\phi}(x)\rangle dx.$$

Определим действительные числа $c_{1;1}$, $c_{2;2}$, $c_{3;3}$, $c_{1;2}$, $c_{2;3}$, $c_{3;1}$ следующими интегралами:

$$c_{1;1} = (2,3)^2 \oint \phi_1(\vec{e}(x_1), \mathbf{A}_1^{\phi}) dx_1,$$

$$c_{2;2} = (3,1)^2 \oint \phi_2(\vec{e}(x_2), \mathbf{A}_2^{\phi}) dx_2,$$

$$c_{3;3} = (3,1)^2 \oint \phi_3(\vec{e}(x_3), \mathbf{A}_3^{\phi}) dx_3,$$

$$c_{1;2} = 2(2,3)(3,1) \oint \phi_2(\vec{e}(x_2), \mathbf{A}_1^{\phi}) dx_2,$$

$$c_{2;3} = 2(3,1)(1,2) \oint \phi_3(\vec{e}(x_3), \mathbf{A}_2^{\phi}) dx_3,$$

$$c_{3;1} = 2(1,2)(2,3) \oint \phi_1(\vec{e}(x_1), \mathbf{A}_3^{\phi}) dx_1.$$

Определим действительные числа $d_{1;1}$, $d_{2;2}$, $d_{3;3}$, $d_{1;2}$, $d_{2;3}$, $d_{3;1}$ следующими интегралами:

$$d_{1;1} = -(2,3)^2 \oint \phi_1^2(\vec{e}(x_1), \mathbf{A}_1) dx_1,$$

$$d_{2;2} = -(3,1)^2 \oint \phi_2^2(\vec{e}(x_2), \mathbf{A}_2) dx_2,$$

$$d_{3;3} = -(3,1)^2 \oint \phi_3^2(\vec{e}(x_3), \mathbf{A}_3) dx_3,$$

$$d_{1;2} = (3,1)(2,3) \oint \phi_2^2(\vec{e}(x_2), \mathbf{A}_1) dx_2,$$

$$d_{2;3} = (1,2)(3,1) \oint \phi_3^2(\vec{e}(x_3), \mathbf{A}_2) dx_3,$$

$$d_{3;1} = (2,3)(1,2) \oint \phi_1^2(\vec{e}(x_1), \mathbf{A}_3) dx_1.$$

Формула инварианта M

Определим вещественное число $M(\mathbf{L})$ следующей суммой интегралов:

$$M = W + \sum_{i;j} b_{i;i,j} + \sum_{i} b_{i;i+1,i+2} + c_{i;i} + c_{i,i+1} + d_{i;i} + d_{i;i+1}. \qquad (13)$$

Теорема 1

1. Сумма слагаемых в правой части выражения (13) является абсолютно сходящейся.

2. Выражение (13) определяет не равный нулю инвариант изотопического класса зацепления $\mathbf{L}$, который не выражается через коэффициенты звцепления компонент.

Доказательство Теоремы 1

Доказательство Теоремы 1 является прямым следствием результатов работы [Akh]. Выражение (13) получается подстановкой в известный интеграл значений вектор-потенциалов. Доказательство утверждения 1 о сходимости заслуживает независимой проверки с использованием разложения поля в ряд в окрестности особенностей подынтегральных выражений. Эта проверка опускается.

Интересно отметить, что инвариант M является кососимметричным при зеркальной симметрии пространства и имеет топологический порядок 7. Инвариант M включен в бесконечную серию инвариантов. Следующий инвариант в этой серии определен для 4-компонентных ориентированных зацеплений. Этот инвариант также кососимметричный при зеркальной симметрии пространства и имеет топологический порядок 11. Результаты работы [TGKMSV] наводят на мысль, что можно пытаться получить альтернативное интегральное выражение для инварианта M, в частности, пытаться упростить остаточные слагаемые.

4. Асимптотические инварианты бездивергентного поля

Мы вспомним определение В.И.Арнольда асимптотического коэфициента зацепления бездивергентного поля $\mathbf{B}$ (с компактным носителем), следуя учебнику [A-X]. Далее мы построим полиномиальный коэффициент зацепления, который является нелинейным аналогом асимптотического коэффициента зацепления, и, наконец, докажем (частично) результаты о высшем асимптотическом инварианте магнитного поля.

Основные результаты (Теорема 3 и Основная Теорема 6) формулируются в предположении о том, что магнитное поле $\mathbf{B}$ удовлетворяет условию возвращения (см. ниже). Такое предположение не слишком умаляет общности, поскольку для магнитного поля, представленного конечным числом магнитных трубок, указанная гипотеза выполнена. Но при учете магнитной диссипации, гипотеза о возвращении уже не выполнена, т.к. могут наблюдаться критические точки, в которых происходит пересоединение силовых линий поля. Часть утверждений (Леммы 2,5,7) доказаны в большей общности, чем та, которая требуется для доказательства основных результатов т.е. без каких-либо предположений о наличии магнитных трубок. Доказать основные результаты в полной общности не удалось. Предположение о возвращении позволяет существенно упростить анализ асимптотических инвариантов и опустить часть рассуждений, связанную с анализом системы "коротких"путей, которая при наличии критических точек магнитного поля представляется сложной (см. определение и замечания в [A-Kh], гл. III, разделы 3,4).

Гипотеза о возвращении

Пусть $\mathbf{B}$, $\mathrm{div}(\mathbf{B}) = 0$ – гладкое векторное поле в $\mathbb{R}^3$ с компактным носителем $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, который является гладким многообразием с краем, при условии, что на границе $\partial\Omega$ магнитное поле направлено по касательной к указанной поверхности. Пусть $\{g^t : \Omega \to \Omega\}$– фазовый поток, определенный полем $\mathbf{B}$. Скажем, что поле $\mathbf{B}$ удовлетворяет условию возвращения, если существует такое значение $t_0 > 0$, что $\{g^t : \Omega \to \Omega\}$–тождественный диффеоморфизм. Область Ω называется системой магнитных трубок. Замечу, что из условия о возвращении вытекает, что каждая силовая линия поля $\mathbf{B}$ замкнута, но при этом не требуется, чтобы отображение Пуанкаре в трансверсальном сечении каждой силовой линии являлось бы тождественным.

Определим гауссов коэффициент зацепления траекторий поля $\mathbf{B}$ за время T_1, T_2, выпущенных из точек x_1, x_2 следующим образом:

$$\Lambda_{\mathbf{B}}(T_1, T_2; x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi T_1 T_2} \int_0^{T_2} \int_0^{T_1} \frac{\langle \int \dot{x}_1(t_1), \dot{x}_2(t_2), x_1(t_1) - x_2(t_2) \rangle}{\|x_1(t_1) - x_2(t_2)\|^3} dt_1 dt_2,$$

$$\Lambda_{\mathbf{B}}(x_1, x_2) = \lim_{T_1, T_2 \to +\infty} \Lambda_{\mathbf{B}}(T_1, T_2; x_1, x_2),$$

где $x_1(t_i) = g^{t_i}(x_i)$–траектория точки x_i, а $\dot{x}_i(t_i) = \frac{d}{dt_i} g^{t_i} x_i$ – соответствующие векторы скорости.

(Лемма 2, [А-Х], стр. 158, Лемма 4.12.)

Предел $\Lambda_{\mathbf{B}}(x_1, x_2)$ существует почти всюду на $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Функция $\Lambda_{\mathbf{B}}(x_1, x_2)$ абсолютно интегрируема и выполнено равенство $\int \Lambda_{\mathbf{B}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \chi_{\mathbf{B}}$, где правая часть равенства определена по формуле (3).

Интересно отметить, что интеграл спиральности имеет порядок гс^{2}см^4, а гауссов коэффициент зацепления имеет топологический порядок 1.

Приступим к определению асимптотического полиномиального инварианта спиральности (асимптотического полиномиального инварианта Хопфа) $\Lambda_{\mathbf{B}}^{(k)}$. Определим гауссов коэффициент зацепления степени k $\Lambda_{\mathbf{B}}^{(k)}(T_1, T_2; x_1, x_2)$ траекторий поля $\mathbf{B}$ за времена T_1, T_2, выпущенных из точек x_1, x_2 следующим образом:

$$\Lambda_{\mathbf{B}}^{(k)}(T_1, T_2; x_1, x_2) = \tag{14}$$

$$\frac{1}{4^k\pi^k T_1^k T_2^k}\int_0^{T_1}\dots\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\dots\int_0^{T_2}\frac{\langle \dot{x}_{1,1}(t_{1,1}),\dot{x}_{2,1}(t_{2,1}),x_{1,1}(t_{1,1})-x_{2,1}(t_{2,1})\rangle}{\|x_{1,1}(t_{1,1})-x_{2,1}(t_{2,1})\|^3}\cdot\dots\cdot$$
$$\frac{\langle \dot{x}_{k,1}(t_{1,k}),\dot{x}_{k,2}(t_{2,k}),x_{1,k}(t_{1,k})-x_{2,k}(t_{2,k})\rangle}{\|x_{1,k}(t_{1,k})-x_{2,k}(t_{2,k})\|^3}dt_{1,1}\dots dt_{1,k}dt_{2,1}\dots dt_{2,k}.$$

В этом кратном интеграле можно положить $T_1 = T_2$, что приводит к небольшому упрощению.

Определим асимптотический гауссов коэффициент зацепления (верхний и нижний) степени k $\Lambda^{(k)}_{\mathbf{B}}(x_1, x_2)$ траекторий поля $\mathbf{B}$, выпущенных из точек x_1, x_2 по формулам:

$$\overline{\Lambda}^{(k)}_{\mathbf{B}}(x_1,x_2) = \overline{\lim}_{T_1,T_2\to+\infty}\Lambda^{(k)}_{\mathbf{B}}(T_1,T_2;x_1,x_2), \tag{15}$$

$$\underline{\Lambda}^{(k)}_{\mathbf{B}}(x_1,x_2) = \underline{\lim}_{T_1,T_2\to+\infty}\Lambda^{(k)}_{\mathbf{B}}(T_1,T_2;x_1,x_2). \tag{16}$$

Определим асимптотический инвариант спиральности спиральности (верхний и нижний) степени k $\overline{\Lambda}^{(k)}_{\mathbf{B}}$ $\underline{\Lambda}^{(k)}_{\mathbf{B}}$ по формулам:

$$\overline{\chi}^{(k)}_{\mathbf{B}} = \overline{\lim}_{T_1,T_2\to+\infty}\int\Lambda^{(k)}_{\mathbf{B}}(T_1,T_2;x_1,x_2)dx_1dx_2, \tag{17}$$

$$\underline{\chi}^{(k)}_{\mathbf{B}} = \underline{\lim}_{T_1,T_2\to+\infty}\int\Lambda^{(k)}_{\mathbf{B}}(T_1,T_2;x_1,x_2)dx_1dx_2. \tag{18}$$

Для сокращения обозначений и ссылок далее не будем различать верхний и нижний инварианты. Поэтому две пары предыдущих формул объединим:

$$\Lambda^{(k)}_{\mathbf{B}}(x_1,x_2) = \lim_{T_1,T_2\to+\infty}\Lambda^{(k)}_{\mathbf{B}}(T_1,T_2;x_1,x_2), \tag{19}$$

$$\chi^{(k)}_{\mathbf{B}} = \lim_{T_1,T_2\to+\infty}\int\Lambda^{(k)}_{\mathbf{B}}(T_1,T_2;x_1,x_2)dx_1dx_2. \tag{20}$$

В исключительном случае $k = 2$ определим асимптотический инвариант квадратичной спиральности $\Lambda^{(2)}_{\mathbf{B}}$ по формуле:

$$\chi^{(2)}_{\mathbf{B}} = \overline{\lim}_{T_1,T_2\to+\infty}\int\overline{\Lambda}^{(2)}_{\mathbf{B}}(T_1,T_2;x_1,x_2)dx_1dx_2. \tag{21}$$

Нетрудно проверить, что асимптотический инвариант квадратичной спиральности имеет размерность гс^{4}см^4, а порождает его топологический инвариант: квадрат коэффициента зацепления, который имеет топологический порядок 2.

Теорема 3

В предположении о возвращении поля $\mathbf{B}$ верхний и нижний асимптотические гауссовы коэффициенты зацепления порядка k, выпущенные из почти любой пары точек (x_1, x_2), определенные формулами $(15), (16)$, совпадают с коэффициентом $\Lambda^{(k)}_{\mathbf{B}}(x_1, x_2)$, определенном формулой (19). При этом $\Lambda^{(k)}_{\mathbf{B}}(x_1, x_2) = \Lambda^k(x_1, x_2)$. Кроме того, верхний и нижний асимптотические инварианты спиральности степени k, определенные уравнениями $(17), (18)$ совпадают и определен асимптотический инвариант спиральности степени k $\chi^{(k)}_{\mathbf{B}}(x_1, x_2)$ по формуле (20). Этот инвариант является инвариантом векторного поля $\mathbf{B}$ при диффеоморфизмах $\mathbb{R}^3$ с компактным ностиелем, сохраняющих объем. Более того, в формуле (20) сходимость по переменным T_1, T_2 равномерная, причем справедлива формула:

$$\chi^{(k)}_{\mathbf{B}} = \int \Lambda^k_{\mathbf{B}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Доказательство Теоремы 3

Проверим, что неотрицательное число $\left|\chi^k_{\mathbf{B}}\right|$ оценивается сверху сходящимся интегралом, который есть "временное среднее"-интегрируемой функции на компактном многообразии $\Omega^k \times \Omega^k$, на которой действует абелева группа $\{g^{t_{1,1}}\} \times \dots \times \{g^{t_{1,k}}\} \times \{g^{t_{2,1}}\} \times \dots \times \{g^{t_{2,k}}\}$.

Перепишем интеграл (20), заменив области интегрирования $[0, T_1]$ (соответственно $[0, T_2]$) по каждой переменной $t_{1,j}$, $1 \le j \le k$, (соответственно по каждой переменной $t_{2,j}$, $1 \le j \le k$), введя дополнительный параметр интегрирования $\varepsilon > 0$:

$$\Lambda^{(k)}_{\mathbf{B}}(T_1, T_2; x_1, x_2; \varepsilon) = \tag{22}$$

$$\frac{1}{16^k \pi^k T_1^k T_2^k} \int_{-T_1}^{T_1} \dots \int_{-T_1}^{T_1} \int_{-T_2}^{T_2} \dots \int_{-T_2}^{T_2} K_\varepsilon(x_{1,1}, x_{2,1}, \dots, x_{1,k}, x_{2,k}) dt_{1,1} \dots dt_{1,k} dt_{2,1} \dots dt_{2,k},$$

где интегральное ядро K_ε вычисляется по формуле:

$$K_\varepsilon(x_{1,1}, x_{2,1}, \dots, x_{1,k}, x_{2,k}) = \tag{23}$$

$$\varepsilon^{-k} \int_0^\varepsilon \dots \int_0^\varepsilon \int_0^\varepsilon \dots \int_0^\varepsilon \frac{\langle \dot{x}_{1,1}(t_{1,1}), \dot{x}_{2,1}(t_{2,1}), x_{1,1}(t_{1,1}) - x_{2,1}(t_{2,1}) \rangle}{\left| x_{1,1}(t_{1,1}) - x_{2,1}(t_{2,1}) \right|^3} \cdot \dots$$

$$\cdot \frac{\langle \dot{x}_{k,1}(t_{1,k}), \dot{x}_{k,2}(t_{2,k}), x_{1,k}(t_{1,k}) - x_{2,k}(t_{2,k}) \rangle}{\left| x_{1,k}(t_{1,k}) - x_{2,k}(t_{2,k}) \right|^3} dt_{1,1} \dots dt_{1,k} dt_{2,1} \dots dt_{2,k}.$$

Очевидно, для произвольных T_1, T_2 при $\varepsilon \to 0+$ интеграл (22) стремится к интегралу (19) (равномерно по T_1, T_2). Разница значений допредельного и предельного интегралов обусловлена граничными условиями, когда один из параметров интегрирования принимает значения $\{-T_1, T_1\}$, $\{-T_2, T_2\}$. Поэтому для произвольного $\varepsilon > 0$ при $T_1 \to +\infty$, $T_2 \to +\infty$, почти при любых x_1, x_2 интеграл (22) стремится к интегралу (19). Интеграл (23) преобразуется в произведение интегралов по формуле:

$$K_\varepsilon(x_{1,1}, x_{2,1}, \dots, x_{1,k}, x_{2,k}) = \tag{24}$$

$$\varepsilon^{-k} \prod_{j=1}^{k} \int_0^\varepsilon \int_0^\varepsilon \frac{\langle \dot{x}_{1,j}(t_{1,j}), \dot{x}_{2,j}(t_{2,j}), x_{1,j}(t_{1,j}) - x_{2,j}(t_{2,j}) \rangle}{|x_{1,j}(t_{1,j}) - x_{2,j}(t_{2,j})|^3} dt_{1,j} dt_{2,j}.$$

Воспользуемся тем, что среднее геометрическое неотрицательных чисел не превышает среднего геометрического. Тогда

$$K_\varepsilon(x_{1,1}, x_{2,1}, \dots, x_{1,k}, x_{2,k}) \leq \tag{25}$$

$$\frac{1}{k\varepsilon^k} \sum_{j=1}^{k} (\int_0^\varepsilon \int_0^\varepsilon \left| \frac{\langle \dot{x}_{1,j}(t_{1,j}), \dot{x}_{2,j}(t_{2,j}), x_{1,j}(t_{1,j}) - x_{2,j}(t_{2,j}) \rangle}{\|x_{1,j}(t_{1,j}) - x_{2,j}(t_{2,j})\|^3} \right| dt_{1,j} dt_{2,j})^k.$$

Правую часть подынтегральной функции в каждом сомножителе выражения (25) при достаточно малом фиксированном ε оценивается величиной

$$C \ln(\rho(x_{1,j}, x_{2,j})), \tag{26}$$

где коэффициент C зависит от значений частных производных первого порядка компонет векторного поля $\mathbf{B}$, $\rho(x_{1,j}, x_{2,j})$–длина перпендикуляра, опущенного из точки $x_{1,j}$ на прямую, проходящую через точку $x_{2,j}$ с направляющим вектором $\dot{x}_{2,j}$.

Подставим неравенства (25), (26) в выражение (24). Это доставляет следующую оценку для абсолютной величины интегрального ядра (23) интеграла (22):

$$K_\varepsilon(x_{1,1}, x_{2,1}, \dots, x_{1,k}, x_{2,k}) \leq \frac{C^k}{\varepsilon^k k} \ln^k(\rho(x_1, x_2).$$

Поскольку интеграл

$$\int \ln^k(\rho(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

сходится по компактной подобласти в $\mathbb{R}^3(x_1)\times\mathbb{R}^3(x_2)$ при произвольном k, то при некотором конечном ε интеграл (20) оценивается сверху по абсолютной величине. Интеграл (22) приближает интеграл (20) равномерно по ε при произвольных T_1, T_2. Этим доказано, что интеграл (20) абсолютно сходится.

Докажем, что $\chi^{(k)}_{\mathbf{B}}$ является инвариантом векторного поля $\mathbf{B}$ при диффеоморфизмах $\mathbb{R}^3$ с компактным ностиелем, сохраняющих объем. Для простоты обозначений предположим, что $k=2$, общий случай полностью аналогичен. Пусть $D(s):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $s\in[0,s_0]$ – однопараметрическое гладкое семейство диффеоморфизмов, сохраняющих объем (вообще говоря, не являющееся инвариантным на области Ω), которое переводит тождественное преобразование $Id:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ в заданный диффеоморфизм $D(s_0)$ (существование такого семейства диффеоморфизмов следует из теоремы А.И.Шнирельмана ([А-Х], раздел 7, гл. IV)). При каждом значении параметра s рассмотрим функцию от переменной T

$$\chi^{(k)}_{D(s)_*(\mathbf{B})}(T,s)=\int\Lambda^{(k)}_{D(s)_*(\mathbf{B})}(T;x_1,x_2)dx_1dx_2, \qquad (27)$$

где интегрирование проводится по области $D(s)(\Omega)\times D(s)(\Omega)$. Из полученных выше оценок сразу вытекает, что функция $\chi^{(k)}_{\mathbf{B}}(T)$ ограничена снизу и сверху на всей своей области определения $(0,+\infty)$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 5

Функция

$$\frac{d}{ds}\int\Lambda^{(k)}_{D(s)_*(\mathbf{B})}(T_1=T,T_2=T;x_1,x_2)dx_1dx_2dt_2, \qquad (28)$$

переменной T, зависящая от параметра s, при $T\to+\infty$ мажорируется по абсолютной величине функцией CT^{-1} для подходящего значения константы $0<C$, которая зависит лишь от значений частных производных $\frac{dD}{ds}$.

Доказательство Леммы 5

Для простоты обозначений рассмотрим случай $k=2$, общий случай совершенно аналогичен. Из стандартных вычислений (см., например,

[Mo])

$$\frac{d}{ds}\int \Lambda^{(2)}_{D(s)_*(\mathbf{B})}(T_1,T_2;x_1,x_2)dx_1dx_2dt_1dt_2 = \tag{29}$$

$$\frac{1}{16\pi^2T_1^2T_2^2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}$$

$$\frac{\langle \dot{x}_1(t_1,t),\dot{x}_2(t_2,t),x_1(t_1,t)-x_2(t_2,t)\rangle\psi}{|x_1(t_1,t)-x_2(t_2,t)|^3} \quad dx_1dx_2dt_1dt_2,$$

где ψ–ограниченная функция, $|\psi|<C$, зависящая от вектора скорости $\frac{D(s)}{ds}$ выбранного семейства $D(s)$. Отсюда каждого s правая часть выражения (29) оценивается, при $T_1=T_2=T\to+\infty$ для подходящего C интегралом

$$\frac{1}{16\pi^2T^4}\int_0^T\int_0^T C\,|\chi_{\mathbf{B}}|\,dt_1dt_2,$$

который, очевидно, имеет порядок малости T^{-1} при каждом $s\in[0,s_0]$. Лемма 5 доказана.

Из доказанного вытекает, что

$$\frac{d}{ds}\overline{\chi}^{(2)}_{\mathbf{B}}=0,$$

$$\frac{d}{ds}\underline{\chi}^{(2)}_{\mathbf{B}}=0.$$

При условии возвращения несобственный интеграл (20) по переменным x_1,x_2 сходится равномерно при $T\to\infty$. В результате переходу к пределу получим, что при каждом $s\in[0,s_0]$

$$\frac{d}{ds}\chi^{(2)}_{D(s)_*(\mathbf{B})}=0.$$

Откуда интегрированием по s получается, что $\chi^{(2)}$ является инвариантом диффеоморфизмов, сохраняющих объем. Теорема 3 доказана.

Замечание

Очевидно, что построенный в Теореме 3 асимптотический полиномиальный инвариант можно обобщить и рассматривать асимптотический инвариант, построенный по набору из r, $r\geq 2$ силовых линий при помощи полинома от попарных коэффициентов зацепления этих линий.

Теперь переходим к основному результату.

Основная Теорема 6

При условии строгой эргодичности определен высший асимптотический инвариант $\mu_{\mathbf{B}}$ диффеоморфизмов с компактным носителем, сохраняющих объем, построенный как асимптотический предел интегралов в формуле (13) по всевозможным тройкам траекторий поля $\mathbf{B}$. Размерность инварианта $\mu_{\mathbf{B}}$ равна гс^{12}см^{6}.

Для доказательства Основной Теоремы 6 нам потребуется один технический результат. Это доставляет оценку роста главного слагаемого в интеграле (13) при переходе к асимптотическому пределу. Обозначим несобственный интеграл $\int \frac{\langle \vec{\alpha}(\dot{x}_2(t_2), \dot{x}_1(t_1); y), \vec{\alpha}(\dot{x}_3(t_3), \dot{x'}_1(t'_1); z), y-z \rangle}{\|y-z\|^3} dydz$ через $a(x_1(t_1), x'_1(t'_1), x_2(t_2), x_3(t_3))$.

Лемма 7

Существуют числа $C_0 > 0, C_1 > 0$ такие, что при некотором фиксированном $\varepsilon > 0$

$$\int_0^\varepsilon \int_0^\varepsilon \int_0^\varepsilon \int_0^\varepsilon a(x_1(t'_1), x'_1(t'1), x_2(t_2), x_3(t_3)) dt_1 dt'_1 dt_2 dt_3$$

оценивается по абсолютной величине выражением $\max(C \ln(r_{x_2}^{-1}) \ln(r_{x_3}^{-1}))$, где C– некоторая постоянная, зависящая лишь от абсолютных величин и абсолютных значений первых частных производных поля $\mathbf{B}$, r_{x_2} (r_{x_2}) – длина перпендикуляра, опущенного из точки x_2 (x_3) на прямую, проходящую через точку x_1 (x'_1) с направляющим вектором $\dot{x}_1$ $(\dot{x'}_1)$.

Набросок доказательства Леммы 7 и Теоремы 6

Доказательство Леммы 7 получается прямой оценкой порядка особенности подынтегральной функции. Инвариант $\mu_{\mathbf{B}}$ в Теореме 6 определяется в результате перехода к пределу в каждом слагаемом формулы (13) инварианта M, которое вычисляется для каждой тройки силовых линий поля $\mathbf{B}$. Оценка сходимости проводится аналогично Теореме 3, что доставляет верхнюю и нижнюю оценку интегала всех таких слагаемых по тройке траекторий, выпущенных из произвольных трех точек $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3$. При условии о возвращении сходимость каждого слагаемого в формуле инварианта для заданной тройки силовых линий вытекает из утверждения 1 Теоремы 1 и $\mu_{\mathbf{B}}$ корректно определен.

Гипотеза

Асимптотический высший инвариант $\mu_{\mathbf{B}}$ является простейшим инвариантом в бесконечной серии асимптотических высших инвариантов $\mu^{(l)}_{\mathbf{B}}$, $l = 3, 4, \ldots$, $\mu^{(l)}_{\mathbf{B}} = \mu_{\mathbf{B}}$.

5. Корреляционный тензор μ–инварианта, закон сохранения и другие топологические обсуждения

Для приложений важны приближенные выражения высших топологических инвариантов, которые можно приближенно вычислять и точно оценивать по корреляционным тензорам. Вопрос о том, насколько корреляционный тензор является хорошим приближением соответствующего топологического инварианта сложен и не является предметом анализа данной работы.

Корреляционный тензор $\tilde{\delta}(\mathbf{B})$

С асимптотическим инвариантом $\chi^{(2)}_{\mathbf{B}}$, построенным в Теореме 3, ассоциирован корреляционный тензор

$$\delta(\mathbf{B}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathbf{B}^2(x_1)\mathbf{B}^2(x_2)(< \vec{e}_1(x_1), \vec{e}_2(x_2), x_1 - x_2 >)^2}{\|x_1 - x_2\|^6} dx_1 dx_2.$$

Размерность корреляционного тензора $\delta(\mathbf{B})$ равна гс^{4}см^2. Справедливо равенство:

$$\chi^{(2)}_{\mathbf{B}} \leq \delta(\mathbf{B}).$$

Итак, значение $\delta(\mathbf{B})$ легко вычисляется и служит верхней оценкой для инварианта квадратичной спиральности $\chi^{(2)}_{\mathbf{B}}$.

Корреляционный тензор W_3

С асимптотическим инвариантом $\mu_{\mathbf{B}}$ (см. Гипотезу 5) ассоциирован корреляционный тензор W_3:

$$\int_{x_1,x_2,x_3} \mathbf{B}^4(x_1)\mathbf{B}^4(x_2)\mathbf{B}^4(x_3)\gamma(x_1,x_2)\gamma^2(x_2,x_3)\gamma(x_3,x_1)\Gamma(x_1,x_1,x_2,x_3)$$

где $\gamma(x_i, x_{i+1}) = \frac{\langle \vec{e}_i(x_i), \vec{e}_{i+1}(x_{i+1}), x_i - x_{i+1}\rangle}{\|x_i - x_{i+1}\|^3}$, а $\Gamma(x_1, x'_1, x_2, x_3)$ – интеграл Гаусса для пары полей $\frac{\mathbf{A}_1(x_1,y)\times\mathbf{A}_2(x_2,y)}{|\mathbf{B}_1(x_1)||\mathbf{B}_2(x_2)|}$, $\frac{\mathbf{A}_1(x_1,z)\times\mathbf{A}_3(x_1,z)}{|\mathbf{B}_1(x_1)||\mathbf{B}_3(x_3)|}$.

Корреляционный тензор W_3 имеет размерность гс^{12}см$^{-3}$. Отрицательная размерность главного слагаемого корреляционного тензора по пространственным координатам показывает, что интеграл имеет особенность. Для вычисления спектральных коэффициентов указанного корреляционного тензора следует воспользоваться тем, что кратный интегра абсолютно сходится. Выдвигается гипотеза, согласно которой корреляционный тензор $W_3(\mathbf{B})$ является приближением инварианта $\mu_{\mathbf{B}}$ таким образом, что после перехода к случайным полям (см. [R]) значения $\mu_{\mathbf{B}}$ и $W_3(\mathbf{B})$ совпадут. Кроме того, выдвигается гипотеза, согласно которой существует корреляционный тензор W_4, который значительно точнее приближает следующий инвариант $\mu_{\mathbf{B}}^{(4)}$ в бесконечной серии высших асимптотических инвариантов.

Закон сохранения

Пусть $W(\mathbf{B}(t))$–произвольный корреляционный тензор поля $\mathbf{B}(t)$. Определим полную производную $w_i(t)$ порядка i тензора W при $t \in (-T_0, +T_0)$, по формуле $w_i(t) = \frac{d^i W(\mathbf{B}(t))}{dt^i}$. Значение $w_i(t)$ вычисляется в произвольный момент времени по векторам $V(t)$, $\mathbf{B}(t)$, входящих в систему уравнений МГД.

В работе [А-К] определено однопараметрическое (по параметру t_0) семейство формальных рядов, которое определяет семейство формальных первых интегралов (по времени t) системы уравнений МГД:

$$\mathbf{W}(t, t_0) = W(t) \,-\, w_1(t)(t - t_0) \,+\, w_2(t)\frac{(t - t_0)^2}{2!}$$

$$+ \,\dots\, + \,(-1)^i w_i \frac{(t - t_0)^i}{i!} \,+\, \dots\,.$$

Проф. Ю.Н.Смолин объяснил автору, что изложенный выше метод построения законов сохранения повторяет метод Лагранжа варации (бесконечного числа) постоянных.

Примеры корреляционных тензоров

Приведем примеры корреляционных тензоров, которые сами не определяют законы сохранения, но порождают (формальный) закон сохранения, описанный выше.

1. Интеграл гидродинамической спиральности в присутствии магнитного поля.

2. Интегралы магнитной и перекрестной магнитной спиральностей в присутствии гидродинамической и магнитной вязкости.

3. Корреляционный тензор $\tilde{\tilde{\delta}}$ асимптотической квадратичной спиральности.

4. Корреляционные тензоры $W_3, W_4, \dots$ асимптотических высших магнитных спиральностей.

Топологический смысл асимптотической высшей магнитной спиральности

Рассмотрим многочлен Конвея m–компонентного зацепления $\mathbf{L}$:

$$\nabla_{\mathbf{L}}(z) = z^{m-1}(c_0 + c_1 z^2 + \cdots + c_n z^{2n}).$$

Будем рассматривать нварианты зацепления, которые выражается алгебраически через коэффициенты c_0, c_1 этого многочлена (который будет также применятся и для всех подзацеплений зацепления $\mathbf{L}$ с меньшим числом компонент). Простейший инвариант такого вида (Обобщенный Инвариант Сато-Левина) определен для $m = 2$ (см. работу [Me], где приводится определение обобщенного инварианта Сато-Левина, которое отличается от определения, предложенного автором в работе [Akh2], на полином третьей степени от коэффициента зацепления компонент). Обобщенный инвариант Сато-Левина не имеет асимптотического аналога: значение инварианта растет пропорционально k^4 на двух далеких замкнутых кривых, пройденных k раз каждая. На паре близких кривых, в окрестности общей замкнутой кривой, пройденной k раз значение инварианта растет пропорционально k^5. Инвариант $M = M_3$, определяющий согласно Гипотезе 5 асимптотический инвариант магнитного поля, выражен как алгебраическая комбинация инвариантов α (коэффициентов зацепления) β (обобщенного инварианта Сато-Левина) и γ, построенного в работе [Me], по формуле

$$M(L) = \alpha(1,2)\alpha(2,3)\alpha(3,1)\gamma(1,2,3)+$$

$$\alpha(2,3)^2\alpha(3,1)^2\beta(1,2) + \alpha(3,1)^2\alpha(1,2)^2\beta(2,3) + \alpha(1,2)^2\alpha(2,3)^2\beta(3,1),$$

где соответствующие мультииндексы обозначают соответствующие подзацепления трехкомпонентного зацепления.

Причина того, что M порождает асимптотический инвариант, состоит в том, что инвариант M обращается в нуль на произвольном зацеплении, которое является зацеплением-сателлитом двухкомпонентного зацепления, у которого одна из компонент заменяется на произвольное (обобщенное) хопфовское зацепление. Вероятно, аналогичное утверждение верно и для инварианта $M_4, \dots$ (и остальных) в изучаемой серии инвариантов и соответствующие формулы выражают эти инварианты через инварианты более высокого порядка.

В заключении отмечу, что при наличии магнитной (гидродинамической) вязкости топологические приложения, связанные с системой уравнений МГД по-прежнему возможны. Например, в работе [A-K-K] предложено топологическое объяснение формулы ([A-X] Гл.3, раздел 7.3, замечание 7.19) для диссипации интеграла магнитной спиральности в присутствии магнитной вязкости на основе формулы Калугариану для коэффициентов верчения и скручивания (см. [A-X], раздел 7.4).

Список литературы

[Arn] Арнольд, В.И., Задачи Арнольда, Москва, Фазис, 2000.

[Arn-Kh] Арнольд В.И., Хесин Б.А., Топологические Методы в Магнитной Гидродинамике Москва МЦНМО 2007, in English: Arnold, V.I. and Khesin, B.A., Topological methods in hydrodynamics, Applied Mathematical Sciences, vol. 125, Springer, 1998.

[Akh] Akhmetiev, P.M., On a new integral formula for an invariant of 3-component oriented links, Journal of Geometry and Physics, 53 (2005) 180-196.

[Akh2] Akhmetiev, P.M., On a higher analog of the linking number of two curves, Topics in Quantum Groups and Finite-Type Invariants, Amer. Math. Soc. Transl., Ser 2, vol 185, Amer. Vath. Soc., Providence, RI, pp. 113-127.

[A-K-K] П.М.Ахметьев, О.В.Кунаковская, В.А.Кутвицкий, Замечание о диссипации интеграла магнитной спиральности, ТМФ, (2009) том 158, номер 1, страницы 150–160.

[A-K] П.М.Ахметьев, О.В.Кунаковская, Интегральная формула для Обобщенного Инварианта Сато-Левина в магнитной гидродинамике. (2009) Математические Заметки (принята к публикации).

[Fri] Frish, U., Turbulence. The legacy of A.N. Kolmogorov, Cambridge University Press (1995). Перевод: У. Фриш, Турбулентность, наследие А.Н. Колмогорова, Москва (1998), Фазис.

[TGKMSV] Dennis DeTurck, Herman Gluck, Rafal Komendarczyk, Paul Melvin, Clayton Shonkwiler, David Shea Vela-Vick, Triple linking numbers, ambiguous Hopf invariants and integral formulas for three-component links arXiv:0901.1612

[K] Кадомцев Б.Б., Перезамыкание магнитных силовых линий УФН, (1987) Том 151, вып. 1, 3-29.

[Me] Melikhov, S.A., Colored finite type invariants and a multi-variable analogue of the Conway polynomial, Preprint. http//front.math.ucdavis.edu/math.GT/0312007.

[Mo] Moffatt H.K., Magnetic Field Generation in Electrical Conductive Fluids. Cambridge University Press. (1978).

[M-R] Monastyrsky, M.V., Retakh, V.S., Topology of linked defects in condensed matter, Commun. Math. Phys., 103 (1986) 445-459.

[R] K.-H. Rädler, The Generation of Cosmic Magnetic Fields, Lecture Notes in Physics, From the Sun to the Great Attractor, Guanajuato Lectures on Astrophysics, D.Page and J.G.Hirsh (Eds.) Springer (1999)

[T] J.B.Taylor, Relaxation revisited, Physics of Plasmas Vol. 7, N5 (2000) 1623-1629.