

Доказательство гипотезы В.А.Васильева о планарности сингулярных зацеплений

В.О.Мантуров

Аннотация

В работе доказано, что конечный 4-валентный граф с крестовой структурой в вершинах нельзя уложить на плоскость с сохранением этой структуры тогда и только тогда, когда в нем найдутся два цикла с попарно различными ребрами, имеющие ровно одну точку трансверсального (в смысле крестовой структуры) перекрестья. Это дает квадратичный (по числу вершин) алгоритм распознавания планарности графа с такой структурой.

1 Постановка задачи

Мы рассматриваем конечные четырехвалентные графы, в каждой вершине которых четыре исходящих ребра разбиты на две пары; ребра, принадлежащие одной паре, мы будем называть *противоположными* в данной вершине. Конечные четырехвалентные графы с описанной выше структурой мы будем называть *оснащенными 4-графами*. Нас интересует вопрос о том, может ли такой граф быть вложен в плоскость так, чтобы в образе каждой вершины формальное отношение противоположности ребер, определенное на графе, совпадало с естественным отношением противоположности ребер в смысле вложения в плоскость. Оснащенные 4-графы, обладающие вложением такого вида, будем называть *реализуемыми*. Иными словами, реализуемость означает планарность с сохранением дополнительной структуры. В дальнейшем мы будем рассматривать только конечные графы.

Будем рассматривать *циклы* на оснащенных 4-графах. Цикл A — это последовательность попарно различных ребер $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ таких, что A_{i-1}, A_i имеют общую вершину a_i , при этом вершины a_i, a_{i+1} (быть может, совпадающие) соединены ребром A_i . Здесь индексы ребер и вершин рассматриваются по модулю n (число n называется длиной цикла), т.е. $A_0 = A_n, a_0 = a_n$.

Иногда в записи цикла мы будем выписывать одно ребро дважды — в начале и в конце. Так, запись $(A_0, \dots, A_{n-1}, A_n = A_0)$ эквивалентна записи (A_0, \dots, A_{n-1}) .

Определение 1. *Точкой перекрестья* циклов $A = (A_0, A_1, \dots, A_n = A_0)$ и $B = (B_0, B_1, \dots, B_m = B_0)$, не имеющих общих ребер, называется вершина, в которой $a_i = b_j$ для некоторых индексов i, j , причем ребра A_{i-1}, A_i являются противоположными (из чего следует, что ребра B_{j-1}, B_j также являются противоположными). *Точкой самоперекрестья* цикла A длины n называется такая

вершину $a_i = a_j$ ($i \neq j \pmod n$) этого цикла, в которой ребра A_{i-1}, A_i являются противоположными.

Определение 2. Цикл A длины n называется *простым*, если у него $a_i \neq a_j$ для любых i и j не сравнимых по модулю n (здесь требуется не только отсутствие точек самоперекрестья, но вообще точек, через которые цикл проходит дважды).

Вопросы реализуемости четырехвалентных графов погружениями кривых в плоскость общего положения рассматривались различными авторами. Наиболее удобные известные ранее алгоритмы распознавания реализуемости оснащенных 4-графов были предложены в работах [5, 2, 3].

Недавно В.А.Васильев сформулировал следующую гипотезу.

Гипотеза 1. *Оснащенный 4-граф не реализуем тогда и только тогда, когда у него найдутся два цикла, не имеющие общих ребер, имеющие ровно одну точку перекрестья.*

Целью настоящей заметки является доказательство этой гипотезы.

В дальнейшем все оснащенные 4-графы предполагаются связными. Случай несвязных графов очевидным образом сводится к случаю связных графов.

Заметим, что в одну сторону утверждение гипотезы очевидно: если граф реализуем, то он не может иметь двух циклов с ровно одной точкой перекрестья. Это следует из того, что индекс пересечения двух гладких кривых общего положения на плоскости четен.

Далее, если существуют два цикла A и B , имеющие ровно одну точку перекрестья, то существуют два простых цикла A' и B' с той же самой точкой перекрестья: этого легко достичь упрощающей перестройкой циклов A и B . Пусть, например, цикл A не является простым. Рассмотрим некоторую его точку самопересечения X . Тогда легко видеть, что цикл A разбивается вершиной X на два цикла A' и A'' , один из которых (A') имеет ровно одну точку перекрестья с циклом B — ту же, что и цикл A . Упрощающая перестройка состоит в замене A на A' , см. рис. 1.

Так можно продолжать до тех пор, пока оба рассматриваемых цикла A и B не станут простыми.

Мы будем доказывать сложную часть гипотезы Васильева не предполагая простоты графов.

А именно, мы докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть G — не реализуемый оснащенный 4-граф. Тогда найдутся два цикла A, B на графе G , не имеющие общих ребер, такие что количество точек перекрестья циклов A и B равно единице.*

В теории инвариантов Васильева узлов (см. [8, 1]) одним из основных является понятие сингулярного (особого) узла конечного порядка, представляющего собой гладкое погружение окружности в трехмерное пространство, все особенности которого состоят из конечного числа простых точек пересечений. Это подводит к понятию уникарсального графа.

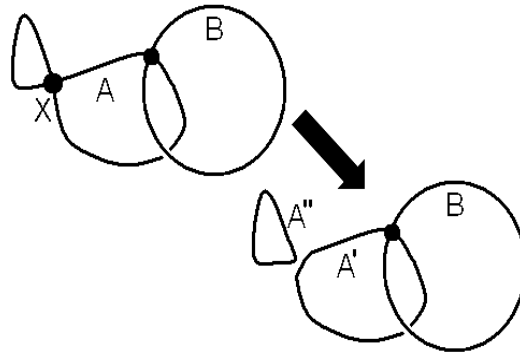


Рис. 1: Упрощение цикла A

Определение 3. *Уникурсальным графом* называется граф, представляющий собой образ иммерсии окружности в трехмерное пространство, все особенности которого исчерпываются конечным числом двойных точек самопересечения, никакая из которых не является точкой касания.

У уникурсального графа имеется естественное оснащение. Рассмотрим вершину X ; у нее имеется два прообраза X_1 на X_2 на окружности. У этих прообразов есть окрестности U_1 и U_2 . Образы двух частей окрестности U_1 определяют одну пару противоположных ребер на графе, а образы двух частей окрестности U_2 определяют другую пару противоположных ребер.

В этом случае имеет смысл говорить об уникурсальном цикле, т.е. таком цикле, который обходит все ребра, переходя с ребра на противоположное ему. Таким графам естественным образом соответствуют хордовые диаграммы (см. определение далее). В дальнейшем мы будем часто пользоваться циклами — *обходами ребер всего графа*, но не уникурсальными. Хордовые диаграммы, которые будут появляться в тексте также соответствуют **не уникурсальным** обходам, см. ниже.

Замечание 1. Оснащенный граф не предполагается ориентированным; при этом в тексте нам понадобится конструкция *обхода*, которая задает некоторую ориентацию всех ребер оснащенного графа.

Замечание 2. Более того, нигде в дальнейшем тексте мы не предполагаем уникурсальности графов и доказываем все утверждения вне зависимости от того, является граф уникурсальным или нет.

2 Доказательство основной теоремы

Начнем с определений, играющих структурную роль в доказательстве.

Пусть дан оснащенный 4-граф Γ , все ребра которого ориентированы некоторым образом.

Определение 4. Данная ориентация ребер задает структуру *источник-сток* в вершине X графа Γ , если некоторые два противоположных ребра в данной вершине являются входящими, а два других — исходящими. В противном случае скажем, что для данной ориентации нарушается условие источник-сток в вершине X .

Ориентация всех ребер оснащенного графа Γ задает структуру *источник-сток* (на графе Γ), если она задает структуру источник-сток в каждой его вершине.

Граф *удовлетворяет условию источник-сток*, если некоторая ориентация всех его ребер задает структуру источник-сток.

Замечание 3. Условие источник-сток возникает в теории виртуальных узлов, предложенной Кауфманом [4]; наличие этого условия связано с ориентируемостью некоторой поверхности, задаваемой диаграммой виртуального узла. Условие источник-сток является ключевым в теории гомологий Хованова для виртуальных узлов, построенной в [7].

Определение 5. Цикл A оснащенного 4-графа Γ называется *поворачивающим*, если любые два последовательных ребра A_i, A_{i+1} в этом цикле не являются противоположными.

Обходом графа Γ называется поворачивающий цикл, содержащий все ребра графа Γ .

Лемма 1. *Каждый связный оснащенный 4-граф Γ имеет обход.*

Доказательство. Очевидно, что у графа Γ существует какой-нибудь поворачивающий цикл A , быть может, не являющийся обходом. Он задает подграф Γ' : граф Γ' состоит из всех ребер и вершин, входящих в цикл A . Доказательство леммы ведется индукцией по числу ребер, входящих в граф Γ , но не в подграф Γ' . Если имеется хотя бы одно такое ребро, то, в силу связности графа Γ имеется вершина a_i графа Γ' такая, что два полуребра x, y , инцидентные этой вершине в графе Γ , не входят в обход A , при этом x противоположно полуребру A_i . Из этого легко следует (см. ниже), что у графа Γ существует цикл вида $A' = A_0, \dots, A_{i-1}, x, \dots, y, A_i, \dots, A_0$, где x, \dots, y — набор последовательно идущих ребер. В этом состоит шаг индукции.

Цикл A' строится следующим образом. Рассмотрим граф Γ'' , получающийся из графа Γ удалением всех ребер графа Γ' и всех вершин графа Γ , для которых все инцидентные им четыре полуребра входят в граф Γ' . По предположению граф Γ' не пуст; по построению все его вершины имеют валентность два или четыре, при этом если вершина a графа Γ' инцидентна ровно двум полуребрам X, Y , то эти полуребра не являются противоположными в графе Γ .

Во всех вершинах графа Γ'' кратности четыре установим порядок противоположности, наследуемый из Γ . Таким образом, на графе Γ'' естественным образом определяются поворачивающие циклы: это циклы, которые в каждой четырехвалентной вершине графа Γ'' переходят с ребра на не противоположное ему. Рассмотрим вершину a_i графа Γ'' и некоторый поворачивающий цикл на графе Γ'' , выходящий из этой вершины. Пусть x — ребро этого цикла, противоположное ребру A_i в графе Γ , а y — ребро, противоположное ребру A_{i-1} в

графе Γ . Рассматриваемый цикл имеет вид: x, \dots, y . Тогда мы имеем поворачивающий цикл $A' = A_0, \dots, A_{i-1}, x, \dots, y, A_i, \dots, A_0$, у которого больше ребер, чем у цикла A . Последнее вытекает из того, что ребро x не является противоположным ребру A_{i-1} , а ребро y не является противоположным ребру A_i (по построению). \square

Лемма 2. Пусть оснащенный 4-граф Γ не удовлетворяет условию источник-сток. Тогда найдутся два цикла A и B на графе Γ , имеющие ровно одну точку перекрестья и не имеющие общих ребер.

Доказательство. Рассмотрим поворачивающий обход O графа Γ , при этом ориентируем ребро O_i от точки o_i к точке o_{i+1} . Мы предполагаем, что граф Γ не удовлетворяет условию источник-сток. Обход O задает некоторую ориентацию всех ребер графа Γ . По предположению найдется вершина, в которой для данной ориентации нарушается условие источник-сток. Пусть $o_j = o_k$ — такая вершина. Рассмотрим два цикла $A = \{O_j, O_{j+1}, \dots, O_{k-1}\}$ и $B = \{O_k, O_{k+1}, \dots, O_{j-1}\}$, на которые делится цикл O точкой $o_j = o_k$. В любой точке, отличной от данной, каждый из двух циклов является поворачивающим (так как локально совпадает с обходом O), поэтому количество точек перекрестья рассматриваемых циклов не превосходит единицы. Единственная точка, в которой такое перекрестье может иметь место — это $o_j = o_k$. Покажем, что она действительно является таковой. Для этого нужно проверить, что цикл A в точке $o_j = o_k$ переходит с ребра на противоположное. В этой точке цикл A переходит с ребра O_{k-1} на ребро O_j . В этой вершине сходятся четыре ребра: $O_{j-1}, O_j, O_{k-1}, O_k$. Ребро O_k не является противоположным ребру O_{k-1} по построению обхода O . Далее, ребро O_{j-1} не может быть противоположным ребру O_{k-1} , так как в этом случае в вершине $o_j = o_k$ выполнялось бы условие источник-сток: мы имели бы два противоположных входящих ребра O_{k-1} и O_{j-1} и два исходящих ребра O_k и O_j . Это противоречит нашему предположению. Таким образом, точка $o_j = o_k$ — единственная точка перекрестья циклов A и B . \square

Определение 6. Хордовой диаграммой называется трехвалентный граф, у которого выделен ориентированный цикл, проходящий через все вершины по одному разу. Этот цикл также называется *окружностью хордовой диаграммы*. Ребра, не принадлежащие выделенному циклу, не ориентированы; они называются *хордами* хордовой диаграммы.

Дугами называются ребра хордовой диаграммы, не являющиеся хордами.

Поддиаграммой хордовой диаграммы называется подграф хордовой диаграммы, сам являющийся хордовой диаграммой, окружность которого совпадает с окружностью исходной хордовой диаграммы, при этом ориентации этих окружностей одинаковы.

Определение 7. Две хорды хордовой диаграммы называются *зацепленными*, если концы любой из них разделены в окружности хордовой диаграммы концами другой хорды.

Замечание 4. Обычно в теории узлов хордовую диаграмму изображают как обычную окружность, некоторые точки которой соединены между собой пря-

молинейными хордами. В этом смысле зацепленными являются те пары хорд, изображения которых на плоскости пересекаются.

Определение 8. *d -Диаграмма* — это хордовая диаграмма, хорды которой могут быть разбиты на два семейства, так что любые две хорды из одного семейства не зацеплены между собой.

Замечание 5. Иногда в определении понятия d -диаграммы требуется фиксировать способ разбиения хорд на два семейства. Мы этого не требуем.

Важным свойством d -диаграмм является их вложимость в плоскость (как графов).

Пусть Γ — оснащенный 4-граф с m вершинами, A — его обход. Ему можно сопоставить следующую хордовую диаграмму $D(\Gamma, A)$. Расположим на окружности $2m$ точек $\{x_j\} = \{\frac{2\pi j}{2m}\}$ и соединим различные точки x_j и $x_{j'}$ хордой тогда и только тогда, когда $a_j = a_{j'}$. Здесь j, j' пробегают значения от 1 до $2m$.

Лемма 3. *Пусть оснащенный 4-граф Γ таков, что для любых двух циклов A и B , не имеющих общих ребер, количество точек перекрестья отлично от единицы. Тогда для любого обхода O графа Γ хордовая диаграмма $D(\Gamma, O)$, является d -диаграммой.*

Замечание 6. Условие леммы 3 означает отсутствие препятствия, сформулированного в гипотезе Васильева.

Доказательство леммы 3. Отметим сначала следующий факт [6]. Хордовая диаграмма является d -диаграммой тогда и только тогда, когда она не имеет поддиаграммы Δ_{2n+1} вида “ $(2n + 1)$ -угольник”, т.е. хордовой диаграммы из $2n + 1$ хорды ($n > 0$), в которой хорда j зацеплена лишь с хордами с номерами $j + 1$ и $j - 1$ (нумерация взята по модулю $2n + 1$), см. рис. 2. Отметим, что для каждого n хордовая диаграмма, обладающая описанными выше условиями, единственна. На рисунке 2 номера хорд не изображены.

Пусть выполнено условие леммы. В силу леммы 2 оснащенный 4-граф Γ обладает свойством источник-сток.

Таким образом, нам достаточно доказать, что в случае, если граф Γ обладает свойством источник-сток, наличие $(2n + 1)$ -угольника в качестве поддиаграммы влечет наличие на исходном графе двух не имеющих общих ребер циклов, имеющих ровно одну точку перекрестья.

Ребрам графа соответствуют дуги хордовой диаграммы, а вершинам — ее хорды.

При этом если граф обладает свойством источник-сток, то отношение противоположности ребер-дуг таково: для каждой хорды с концами X, Y дуга, входящая в вершину X , противоположна дуге, входящей в вершину Y . В дальнейшем мы будем говорить: “дуга хордовой диаграммы принадлежит некоторому циклу”, подразумевая, что этому циклу принадлежит соответствующее данной дуге ребро оснащенного 4-графа.

Дальнейшее доказательство леммы 3 таково. Для каждого n мы строим явно два цикла A, B , состоящие из дуг хордовой диаграммы Δ_{2n+1} . Если хордовая диаграмма D содержит Δ_{2n+1} как поддиаграмму, то каждая дуга диаграммы

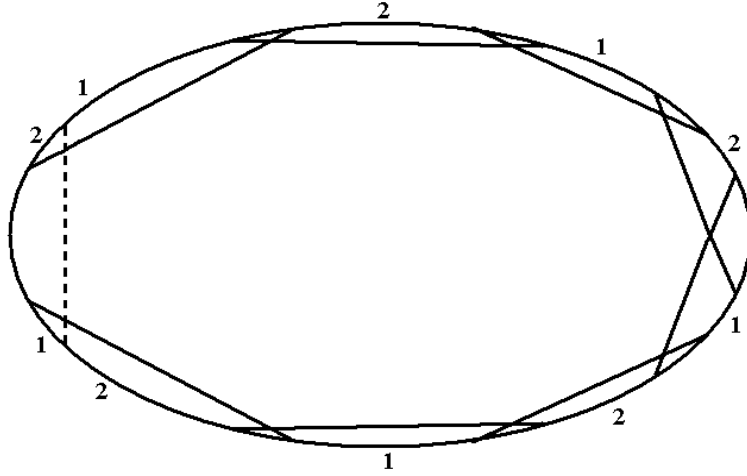


Рис. 2: Граф Δ_{2n+1} и циклы 1 и 2 на нем

Δ_{2n+1} подразбивается на дуги диаграммы D концами хорд. В этом случае наши циклы также подразбиваются: ребра, соответствующие дугам диаграммы Δ_{2n+1} будут разбиты на ребра, соответствующие дугам диаграммы D . При таком разбиении появятся новые вершины, соответствующие концам хорд, входящих в D , но не в Δ_{2n+1} . Но эти вершины не влияют на количество точек перекрестья исследуемых циклов, ибо по построению рассматриваемые циклы в этих вершинах переходят с ребра на не противоположное, следовательно, если эта вершина и будет встречаться в обоих циклах, то она не будет являться точкой перекрестья.

Пример двух циклов для $(2n + 1)$ -угольника показан на рис. 2; дуги, соответствующие первому циклу помечены цифрой 1, а дуги, соответствующие второму циклу, — цифрой 2. Хорда, соответствующая единственной их точке перекрестья, изображена пунктирной линией. \square

Лемма 4. Пусть оснащенный 4-граф Γ обладает свойством источник-сток. Пусть хордовая диаграмма D , соответствующая некоторому обходу графа Γ , является d -диаграммой. Тогда граф Γ реализуем.

Иллюстрация доказательства леммы приведена на рис. 3. В средней части рисунка показано, как по хорде восстанавливается окрестность вершины графа. В нижней части указано, что в случае d -диаграммы соответствующий граф укладывается на плоскость, причем структура противоположности ребер в вершинах сохраняется. Из этого следует реализуемость графа.

Доказательство. Рассмотрим d -диаграмму D и вложим ее в плоскость следующим образом. Разобьем хорды этой диаграммы на два семейства хорд F_1, F_2 так, что любые две хорды из одного семейства не зацеплены между собой (в остальном разбиение выбирается произвольным образом). Далее вложим

окружность в плоскость стандартным образом, расположив концы хорд на окружности так, чтобы никакие два образа концов хорд не были диаметрально противоположными. Хорды первого семейства расположим внутри окружности, а хорды второго семейства — вне. Это можно сделать без пересечений, отобразив хорды первого семейства в прямолинейные отрезки, а хорды второго семейства — в образы прямолинейных отрезков относительно инверсии в рассматриваемой окружности.

Ориентируем окружность против часовой стрелки. Каждая хорда c соединяет пару точек на окружности: X и Y . Рассмотрим на окружности точки $X_1 = X - \varepsilon$, $X_2 = X + \varepsilon$, $Y_1 = Y - \varepsilon$, $Y_2 = Y + \varepsilon$. Здесь ε — некоторое малое число (угол), а операции $+$ и $-$ понимаются в смысле малого сдвига точки на угол $\pm\varepsilon$. Удалим теперь хорду c вместе с двумя дугами $[X_1, X_2]$ и $[Y_1, Y_2]$. Вместо нее разместим в окрестности удаленной хорды два (криволинейных) отрезка $[X_1, Y_1]$ и $[X_2, Y_2]$ так, чтобы они пересекались трансверсально ровно в одной точке Z (скажем, в середине удаленной хорды). Прделав эту операцию для всех хорд диаграммы D , мы получим четырехвалентный граф Δ .

По построению граф Δ изоморфен графу Γ .

Нам осталось доказать, что они изоморфны как оснащенные 4-графы.

Из того, что граф Γ обладает свойством источник-сток следует, что полученное вложение является реализацией, т.е. на оснащённом 4-графе Γ ребро, соответствующее $[X_1, Z]$, противоположно ребру, соответствующему $[Z, Y_1]$.

Это вытекает из следующих соображений. Так как оснащенный 4-граф Γ обладает свойством источник-сток, то любой его обход можно сделать *ориентированным* согласно правилу источник-сток: каждое ребро, входящее в вершину, продолжается ребром, исходящим из нее.

Нам осталось заметить, что при любом поворачивающем обходе графа Δ ребро $[Z, X_2]$ следует непосредственно за ребром $[X_1, Z]$ в том и только в том случае, если ребро $[Z, Y_2]$ следует за ребром $[Y_1, Z]$. Последнее вытекает из того, что любой поворачивающий обход четырехвалентного графа на плоскости аппроксимируется вложением окружности.

Лемма доказана. □

Суммируя доказанное в леммах 1,2,3,4, мы получаем утверждение гипотезы.

Заметим, что в лемме 3 доказывается, что в случае отсутствия препятствия (двух циклов с единственной точкой перекрестья) хордовая диаграмма, соответствующая **любому обходу**, будет d -диаграммой, а в лемме 4 требуется лишь условие источник-сток и наличие d -диаграммы, соответствующей **некоторому обходу**. На самом деле в случае, если оснащенный 4-граф удовлетворяет условию источник-сток, верно следующее утверждение.

Утверждение 1. *Если хордовая диаграмма, соответствующая некоторому поворачивающему обходу оснащенного 4-графа, является d -диаграммой, то d -диаграммой является также диаграмма, соответствующая любому поворачивающему обходу.*

Приведем пример. Рассмотрим оснащенный граф, изображенный в левом верхнем углу на рис. 4. Этот граф не реализуем. При этом обход $psqr$ его ребер, изображенный в правом верхнем углу на том же рисунке, задает хордовую

диаграмму из двух зацепленных хорд, являющуюся d -диаграммой. Из этого следует, что вложенный в плоскость граф (левая нижняя часть рисунка 4) изоморфен изначальной графу. Однако обход $psqr$ не удовлетворяет условию источник-сток в вершине X : противоположные ребра p и r таковы, что p входит в вершину X , а r из нее выходит. Поэтому граф, изображенный в левом нижнем углу, имеет другое оснащение в вершине X : у него противоположными в этой вершине являются ребра p и q , а не p и r , как у изначального графа.

3 Сложность алгоритма

Описанный выше критерий доставляет быстрый (квадратичной сложности) алгоритм определения, является ли оснащенный граф реализуемым, и в случае, если он не является таковым, выдает два цикла с ровно одной такой точкой перекрестья. При этом сложность считается относительно числа вершин.

Основные шаги этого алгоритма таковы.

Занумеруем ребра и вершины графа в произвольном порядке и выпишем в каждой вершине, какие ребра ей инцидентны, при этом также укажем соотношение противоположности ребер в этой вершине.

Нумерация ребер имеет линейную сложность, как и нумерация вершин и запоминание информации о ребрах, инцидентных вершине.

Далее мы строим обход графа. Эта операция также имеет линейную сложность.

Имея обход, мы можем проверить, задает ли он условие источник-сток в каждой вершине. Если нет, то, согласно лемме 2, мы получаем два цикла, имеющие ровно одну точку перекрестья. Эта операция — линейна.

Пусть обход имеет структуру источник-сток. Построим соответствующую ему хордовую диаграмму. Операция построения хордовой диаграммы линейна. Далее, определение зацепленности хорд хордовой диаграммы имеет квадратичную сложность (нужно рассмотреть все пары хорд). Тем самым мы получили матрицу пересечений хордовой диаграммы или, что то же самое, *граф пересечений* хордовой диаграммы (см., напр., [7]). После этого вопрос о том, является ли исходная диаграмма d -диаграммой переформулируется так: является ли граф пересечений двудольным графом?

Вопрос определения, является ли граф двудольным можно решить за квадратичное число операций. Более того, за квадратичное число операций в графе, не являющимся двудольным можно найти минимальный (по включению) цикл нечетной длины — в терминах хордовых диаграмм — $(2n + 1)$ -угольник. После этого пара циклов, имеющих единственную точку перекрестья, строится согласно лемме 3. Такое построение имеет линейную сложность.

Я благодарен В.А.Васильеву за постановку задачи и плодотворные консультации.

Список литературы

- [1] Bar-Natan, D. (1995), On the Vassiliev knot invariants, *Topology* **34**, pp. 423–475.

- [2] Cairns, G., Elton, D. (1993), The planarity problem for signed Gauss words, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **2**, No.4., pp. 359-367.
- [3] Cairns, G., Elton, D. (1996), The planarity problem II, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **5**, No.2., pp. 137-144.
- [4] Kauffman, L. H. (1999), Virtual knot theory, *European Journal of Combinatorics* **20**(7), pp. 662-690.
- [5] Lovász, L., Marx, M. (1976), A forbidden substructure characterization of Gauss codes, *Acta Sci. Math. (Szeged)* 38, no. 1-2, 115-119,
short version: *Bull. Amer. Math. Soc.* 82 (1976), no. 1, 121-122.
- [6] Мантуров, В.О. (1998), Атомы, высотные атомы, хордовые диаграммы и узлы. Перечисление атомов малой сложности с использованием языка Mathematica 3.0., *Топологические методы в теории гамильтоновых систем*, сс. 203-212, М.: Факториал.
- [7] Мантуров, В.О. (2005), Теория узлов, *Регулярная и хаотическая динамика*, Москва-Ижевск, 512 стр.
- [8] Vassiliev, V. A. (1990), Cohomology of knot spaces, in: Theory of Singularities and its applications, *Advances in Soviet Mathematics*,**1**, pp. 23-70.

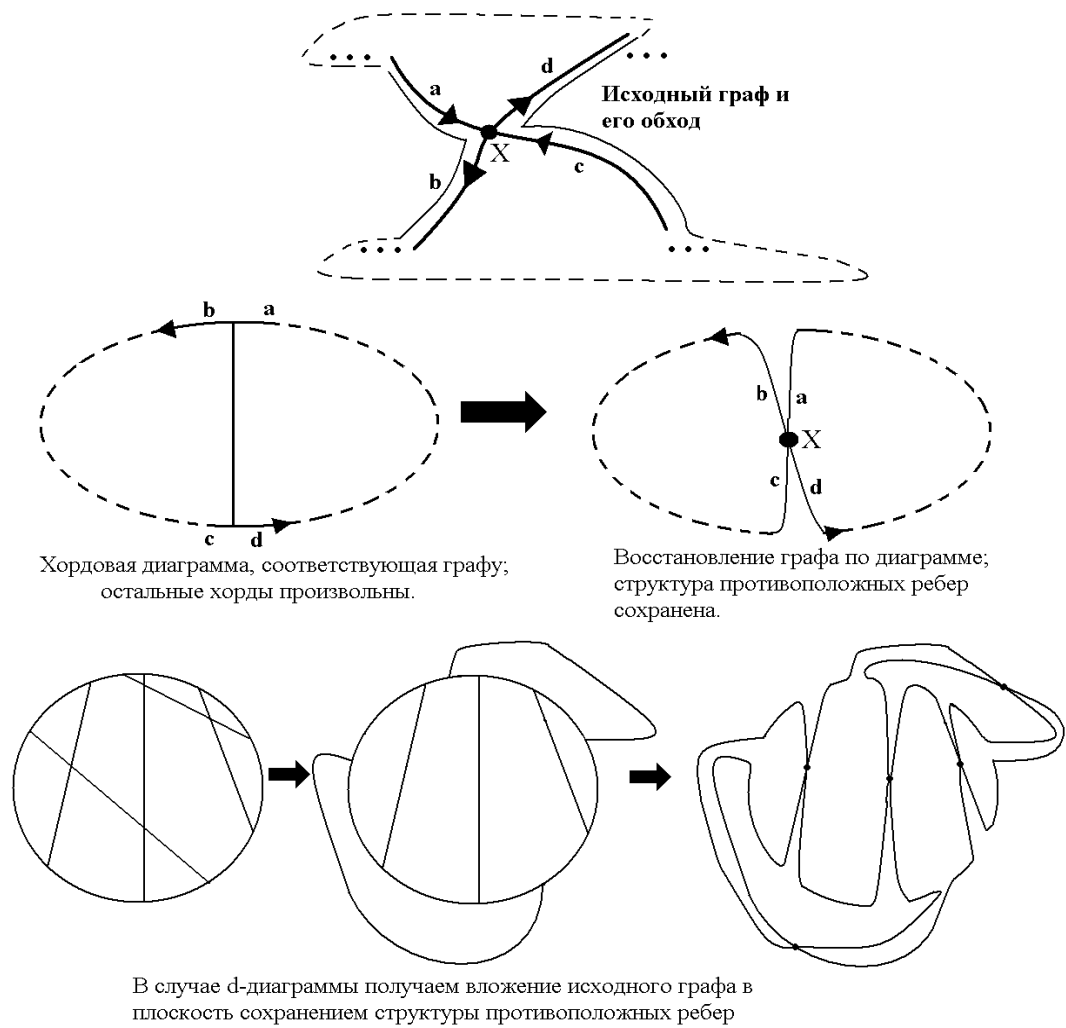


Рис. 3: Восстановление графа по d -диаграмме

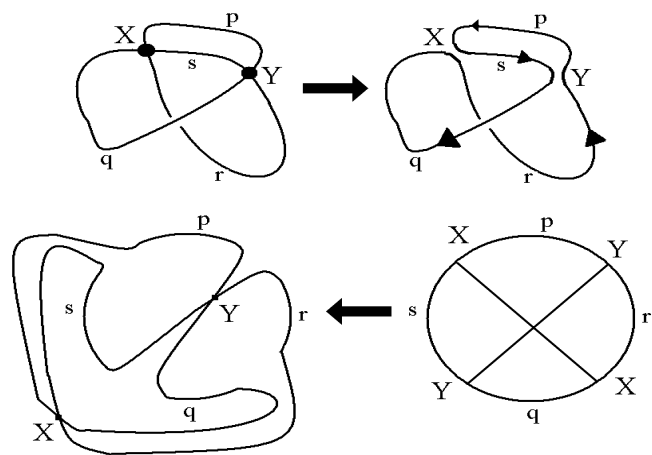


Рис. 4: Отсутствие структуры источник-сток влечет нереализуемость