УДК 519.12+512.58

А. М. Вершик, Н. И. Нессонов

Стабильные представления бесконечной симметрической группы

Изучается понятие стабильного унитарного представления группы (или $\star$-представления $\mathbf{C}^\star$-алгебры) относительно некоторой группы автоморфизмов этой группы (или алгебры). Приводится полное описание с точностью до квазиэквивалентности представлений группы финитных подстановок счетного множества, стабильных относительно группы всех ее автоморфизмов. В частности, решается старый вопрос о факторпредставлениях, ассоциированных с допустимыми представлениями Ольшанского–Окунькова. Доказывается, что они индуцированы с факторпредставлений типа II_1 двухблочных подгрупп Юнга. Класс стабильных представлений будет предметом дальнейших исследований.

Библиография: 18 наименований.

Ключевые слова: бесконечная симметрическая группа, стабильные представления, факторпредставления, характеры, полупрямые произведения, группоидная модель.

DOI: 10.4213/im8410

§ 1. Введение

1.1. Представления полупрямых произведений и стабильные представления. Непосредственной мотивировкой настоящей работы явился вопрос первого автора статьи, поставленный в начале 1980-х гг. о типе факторпредставлений группы конечных подстановок счетного множества, обозначаемой далее через $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, которые получаются сужением так называемых *допустимых представлений* (см. ниже) ее дубля (группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \times \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$) на компоненты $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \times \mathbf{e}$ и $\mathbf{e} \times \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$; здесь $\mathbf{e}$ – единица группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$. Замечательная классификация допустимых представлений с точностью до унитарной эквивалентности, полученная позже в [1] и [2], не помогает ответить на этот вопрос, а именно, из нее нельзя получить описание факторпредставлений, являющихся компонентами допустимых. Попытка ответить на этот вопрос привела авторов к смене точки зрения на допустимые представления и замене их на более общее понятие *стабильных представлений*. Наш подход позволил найти, наконец, явное описание факторпредставлений подгрупп $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \times \mathbf{e}$ и $\mathbf{e} \times \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$. Одновременно он приводит к новым задачам в общей теории представлений "диких групп".

Работа первого автора выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты № 14-01-00373, № 13-01-12422-офи-м); работа второго автора – гранта "Network of Mathematical Research 2013–2015".

Мы вводим понятие стабильности представления произвольной группы (или алгебры) относительно некоторой группы автоморфизмов. Их полупрямое произведение является именно тем объектом, представления которого следует изучать. Это полупрямое произведение может иметь тип I, и тем самым его неприводимые представления эффективно классифицируются. Но исходная группа (алгебра) может не относиться к типу I, иначе говоря, ограничения неприводимых представлений полупрямого произведения на исходную группу (алгебру), вообще говоря, уже не принадлежат типу I. Возникает общая проблема описания стабильных представлений группы (алгебры) относительно заданной группы автоморфизмов.

Мы решаем задачу описания стабильных представлений группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ относительно группы всех ее автоморфизмов, обозначаемой через $\overline{\mathfrak{S}}_{\mathbb{N}}$. При этом те неприводимые представления полупрямого произведения, для которых ограничение на $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ является стабильным факторпредставлением, фактически и являются допустимыми представлениями (с точностью до того, что в данном случае представление дубля есть то же самое, что и представление полупрямого произведения). Поэтому одновременно с решением исходной задачи мы решаем новую задачу об описании стабильных представлений.

1.2. Детальная постановка вопроса. Рассмотрим унитарное представление π группы G, действующее в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, и некоторый автоморфизм α этой группы. Очевидно, что последовательное применение автоморфизма α и π есть снова представление $\pi \circ \alpha$ группы G. Если новое представление $\pi \circ \alpha$ унитарно эквивалентно представлению π (например, когда α – внутренний автоморфизм), то последнее можно назвать *α-неподвижной точкой* в пространстве всех классов эквивалентных унитарных представлений группы G.

Обозначим через $\operatorname{Aut} G$ группу всех автоморфизмов группы G и рассмотрим подгруппу $\mathcal{R} \subset \operatorname{Aut} G$. Может случиться, что в $\mathcal{H}$ действует унитарное представление (возможно, проективное) U группы $\mathcal{R}$, согласованное с ее действием как группы автоморфизмов, т.е. удовлетворяющее соотношению $\pi(r(x)) = U_r \pi(x) U_r^*$ при всех $x \in G$ и $r \in \mathcal{R}$. В частности, π есть $\mathcal{R}$-неподвижная точка. Эти условия позволяют определить в том же пространстве $\mathcal{H}$ представление (возможно, проективное) полупрямого (или скрещенного) произведения $G \ltimes \mathcal{R}$ группы G на $\mathcal{R}$. Например, это справедливо, когда π – представление с конечным следом, а группа $\mathcal{R}$ его сохраняет. Но приведенные условия можно всегда обеспечить, заменяя представление π на квазиэквивалентное. Заметим, что $G \ltimes \mathcal{R}$ может быть группой типа I (точнее, все ее унитарные представления имеют тип I), хотя сама группа G такой не является. Именно это имеет место, когда $G = \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, а $\mathcal{R}$ – группа всех ее автоморфизмов. Это наблюдение и привело авторов к центральному в настоящей работе понятию стабильного представления группы.

1.3. Основные результаты. Перечислим главные результаты статьи, они в основном посвящены теории представлений бесконечной симметрической группы.

• Введено общее понятие стабильного представления для произвольной группы и $\mathbf{C}^\star$-алгебры относительно группы автоморфизмов.

• Описаны с точностью до квазиэквивалентности все факторпредставления группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, стабильные относительно полной симметрической группы $\overline{\mathfrak{S}}_{\mathbb{N}}$, как группы ее автоморфизмов. Всякое такое представление индуцировано с факторпредставления конечного типа подгруппы Юнга $\mathfrak{S}_{\mathbb{Y}} \subset \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, сохраняющей разбиение множества $\mathbb{N}$ на подмножества $[1,n] = \{1,2,\dots,n\}$ и $\mathbb{N} \setminus [1,n]$, где $n < \infty$. Очевидно, что факторпредставление конечного типа группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{Y}}$ есть тензорное произведение неприводимого представления конечной группы $\mathfrak{S}_n = \{s \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \colon s(k) = k$ для всех $k \in \mathbb{N} \setminus [1,n]\}$ и представления Тома группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}\setminus[1,n]} = \{s \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \colon s(k) = k$ для всех $k \in [1,n]\}$. Следовательно, класс квазиэквивалентности стабильного факторпредставления однозначно определяется диаграммой Юнга λ из n клеток и параметрами Тома α, β. В случае, когда сумма параметров Тома равна единице, это соответствие является взаимно однозначным. Отметим, что класс квазиэквивалентности индуцированного представления в случае суммы параметров Тома, меньшей единицы, не зависит от λ. Для унитарной классификации стабильных представлений названные параметры надо дополнить связывающей константой фон Неймана (coupling constant), которая в случае симметрической группы может быть любым положительным числом или бесконечностью. Но здесь мы на этом не останавливаемся.

• Неприводимое допустимое в смысле Ольшанского представление группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \times \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ при ограничении на подгруппу $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \times \mathbf{e}$ является ее стабильным факторпредставлением. Верно обратное, т. е. по каждому стабильному факторпредставлению группы можно построить неприводимое допустимое представление ее дубля, которое при ограничении на компоненту дает представление, квазиэквивалентное исходному факторпредставлению. Мы обобщаем понятие допустимого представления на произвольные группы. Оно дает возможность перенести соответствие между стабильными и допустимыми представлениями на общий случай групп и $\mathbf{C}^\star$-алгебр.

• Даны явные группоидные реализации стабильных представлений группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$.

Остановимся на последнем вопросе более подробно, поскольку наиболее популярная реализация представлений с помощью алгебр Гельфанда–Цетлина оказалась неуниверсальной. Хорошо известно, что AF-алгебры, которыми являются групповые алгебры локально конечных групп, имеют вид скрещенного произведения коммутативной алгебры (алгебры Гельфанда–Цетлина для симметрической группы) и некоторой группы, действующей на ней. Более точно здесь следует говорить о группоидной структуре. Представления со следом наследуют эту структуру. Например, в случае группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ элементы алгебры Гельфанда–Цетлина образуют картановскую подалгебру в факторе типа II_1, порожденном представлением. Это же справедливо и для представлений типа II_∞ (см. [3, теорема 2]). Но новое и неожиданное обстоятельство заключается в том, что для бесконечных наборов параметров Тома (частот) след в представлении типа II_∞ на всех ненулевых проекторах Юнга равен бесконечности. Поэтому надо искать другую коммутативную подалгебру в факторе, относительно которой представление имеет вид скрещенного произведения. Для решения этой задачи мы расширяем группоидные реализации представлений конечного типа из [4] на факторпредставления типа II_∞. Более глубокая причина возможности применения этой конструкции для построения и конечного, и бесконечного фактора состоит в том, что позже было названо *вполне* *несвободным действием симметрической группы* в пространстве функций на счетном множестве (см. [5]–[7]).

1.4. Структура статьи. В § 2 вводится понятие $\mathcal{R}$-стабильного представления (определение 2) как неподвижной точки относительно группы $\mathcal{R}$ автоморфизмов алгебры или группы, дополненное техническим условием $\mathcal{R}$-стабильности его матричных элементов (определение 1). Для произвольной группы G мы даем определение *ручного* представления (определение 5), которое позволяет сформулировать понятие допустимого представления группы $G \times G$ (определение 6). Эти понятия обобщаются на случай $\mathbf{C}^\star$-алгебр (см. § 7). В п. 3.2 мы напоминаем определение полуконечного следа на $\mathbf{C}^\star$-алгебре. В частности, представление, построенное по полуконечному следу, стабильно относительно группы внутренних автоморфизмов $\mathbf{C}^\star$-алгебры (см. предложение 2). В п. 3.3 мы напоминаем известные результаты о факторпредставлениях группы $\mathfrak{S}_{\mathbf{N}}$. Основные результаты статьи изложены без доказательств в § 5. В § 6 даны группоидные реализации некоторых неприводимых допустимых представлений группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \times \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, которые при ограничении на одну из компонент $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \times \mathbf{e}$ или $\mathbf{e} \times \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ дают примеры факторпредставлений, классы квазиэквивалентности которых накрывают все стабильные факторпредставления. Вытекающее из леммы 3 следствие 4 будет использоваться при доказательстве технически важной леммы 9. В § 7 изложены конструкции и результаты, которые используются при доказательстве основных теорем из § 5. По-видимому, самостоятельный интерес представляет понятие допустимого представления дубля $\mathbf{C}^\star$-алгебры (определение 11). В предложении 9 мы доказываем $\mathcal{R}$-допустимость представления дубля, построенного согласно основной конструкции из п. 7.1 по $\mathcal{R}$-стабильному представлению. Доказательство теоремы 3 изложено в п. 7.3. Результаты § 8 носят вспомогательный характер. Они используются при доказательстве теорем 6, 7 и 8.

1.5. Замечания об абстрактной постановке вопроса. В настоящей статье мы даем определение представления, стабильного относительно группы автоморфизмов $\mathcal{R}$, как $\mathcal{R}$-неподвижной точки, с некоторым дополнительным условием непрерывности действия группы $\mathcal{R}$ на пространстве представлений (см. определение 2). Возможно, это условие следует из условия неподвижности; во всяком случае, это имеет место во многих примерах (например, для представлений с конечным следом), но авторам это неизвестно. Наше определение использует геометрию пространства состояний на $\star$-алгебре (или положительно определенных функций на группе).

Если использовать традиционную терминологию (см. книгу А. Г. Куроша [8]), то мы развиваем фактически теорию представлений группы (алгебры) с операторами. В частности, операторы могут быть и эндоморфизмами, могут образовывать группу, а в наиболее интересном случае, порождать группу всех автоморфизмов самой группы (алгебры). Данное представление группы (алгебры) не обязано продолжаться на эту (полу)группу. Но в пространстве представления должны действовать операторы, индуцирующие то же самое действие и задающие либо обычное, либо проективное представление группы автоморфизмов. В общем случае эти операторы определяются с точностью до элементов из коммутанта представления исходной группы (алгебры). Заменяя последнее на квазиэквивалентное ему представление, действующее в пространстве с бициклическим вектором, можно выбрать операторы, задающие автоморфизмы так, чтобы они образовывали уже обычное представление группы автоморфизмов. Следовательно, мы получаем пример представления полупрямого (скрещенного) произведения группы (алгебры) на рассматриваемую группу автоморфизмов. Оно будет неприводимым, если представление исходной группы (алгебры) есть факторпредставление, а группа автоморфизмов содержит все внутренние автоморфизмы исходной группы (алгебры). Для неприводимых представлений полупрямого (скрещенного) произведения можно ставить вопрос об унитарной эквивалентности. Весьма любопытно отследить при этих условиях связь между классификацией с точностью до квазиэквивалентности стабильных факторпредставлений исходной группы (алгебры) и классификацией неприводимых представлений соответствующего полупрямого произведения. В частности, всегда ли из того, что первая имеет тип I, следует, что и вторая имеет тот же тип? Для группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, как следует из [1] и [2], это так. На наш взгляд и унитарная классификация должна основываться на понятии стабильности и начинаться с классификации с точностью до квазиэквивалентности.

Для группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ стабильными представлениями в нашем смысле являются ручные представления, которые по определению продолжаются по непрерывности на полную симметрическую группу (см. [9], [10]). Нетривиальные примеры связаны с факторпредставлениями типа II_1 (из списка Тома [11] для $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$). Еще более общий класс представлений – это некоторые представления с полуконечным следом. Для симметрической группы возникает еще промежуточный класс, рассмотренный в работе А. М. Вершика и С. В. Керова [3], в котором на групповой $\mathbf{C}^\star$-алгебре группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ есть полуконечный след. В этом классе параметризации используются только конечные наборы параметров Тома. Но имеются и такие стабильные представления типа II_∞, для которых полуконечного следа на групповой алгебре нет. Их абстрактная характеризация пока неизвестна. Для группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ они описаны в настоящей работе. Перенос этих результатов на общие группы или $\mathbf{C}^\star$-алгебры чрезвычайно интересен.

§ 2. Стабильные представления групп и $\mathbf{C}^\star$-алгебр

В этом параграфе вводится понятие стабильности для положительного функционала на $\mathbf{C}^\star$-алгебре и соответствующего представления. Здесь мы акцентируем внимание на случае групповой $\mathbf{C}^\star$-алгебры. Для группы G вводится понятие ручного представления, совпадающее в случае бесконечной симметрической группы с определением из [9] и позволяющее, по аналогии с [1], ввести класс допустимых представлений группы $G \times G$.

2.1. $\mathcal{R}$-стабильные состояния на $\mathbf{C}^\star$-алгебре. Рассмотрим сепарабельную $\mathbf{C}^\star$-алгебру $\mathfrak{A}$ с единицей $\mathrm{I}_{\mathfrak{A}}$. Обозначим через $\operatorname{Aut}\mathfrak{A}$ ее группу автоморфизмов. На $\operatorname{Aut}\mathfrak{A}$ определим *сильную* топологию, в которой базой окрестностей единицы являются множества

$$\{\theta \in \operatorname{Aut}\mathfrak{A} \colon \|\theta(a) - a\| < \varepsilon\}, \qquad a \in \mathfrak{A}, \quad \varepsilon > 0. \tag{1}$$

В важном частном случае, когда $\mathfrak{A}$ совпадает с групповой $\mathbf{C}^\star$-алгеброй $\mathbf{C}^\star(G)$ локально компактной группы G, мы будем отождествлять автоморфизмы группы G с соответствующими автоморфизмами из $\operatorname{Aut}\mathbf{C}^\star(G)$. Понятно, что группа всех автоморфизмов группы G, обозначаемая далее через $\operatorname{Aut}G$, – замкнутая в сильной топологии подгруппа в $\operatorname{Aut}\mathfrak{A}$. Легко видеть, что для счетной группы G базой ограничения сильной топологии (1) на $\operatorname{Aut}G$ являются множества

$$\mathcal{U}_g = \{\theta \in \operatorname{Aut}G \colon \theta(g) = g\}, \qquad g \in G. \tag{2}$$

Пусть $\mathfrak{A}^*$ – пространство, сопряженное к $\mathfrak{A}$. Положительный функционал $\varphi \in \mathfrak{A}^*$ назовем состоянием, если $\varphi(\mathrm{I}_{\mathfrak{A}}) = 1$. Для любого функционала $\varphi \in \mathfrak{A}^*$ и произвольной подгруппы $\mathcal{R} \subset \operatorname{Aut}\mathfrak{A}$ обозначим через $\operatorname{Orb}_\varphi \mathcal{R}$ множество $\{\varphi \circ \theta\}_{\theta\in\mathcal{R}} \subset \mathfrak{A}^*$ (орбиту φ), наделенное топологией нормы сопряженного пространства.

Определение 1. Функционал φ назовем $\mathcal{R}$-*стабильным*, если отображение $\mathcal{R} \ni \theta \overset{o_\varphi}{\mapsto} \varphi \circ \theta \in \operatorname{Orb}_\varphi \mathcal{R}$ непрерывно, когда на $\mathcal{R}$ и $\operatorname{Orb}_\varphi \mathcal{R}$ рассматриваются сильная топология (1) и топология нормы сопряженного пространства соответственно.

Для стабильного функционала имеет место соотношение

$$\|\varphi \circ \theta(\,\cdot\,) - \varphi(\,\cdot\,)\| \to 0,$$

когда θ стремится к тождественному автоморфизму в сильной топологии.

Замечание 1. Относительно слабой топологии сопряженного пространства на $\mathfrak{A}^*$ отображение o_ψ непрерывно для любого $\psi \in \mathfrak{A}^*$.

Особый интерес представляет изучение $\mathcal{R}$-стабильных состояний, когда в качестве $\mathcal{R}$ рассматривается группа $\operatorname{Int}\mathfrak{A}$, состоящая из всех внутренних автоморфизмов $\mathfrak{A} \ni a \overset{\operatorname{Ad}u}{\mapsto} uau^*$, где u – унитарный элемент из $\mathfrak{A}$, и ее подгруппы. В случае $\mathfrak{A} = \mathbf{C}^\star(G)$, где G – счетная группа, одна из таких подгрупп, обозначаемая здесь через $\operatorname{Ad}G$, состоит из всех автоморфизмов $G \ni x \overset{\operatorname{Ad}g}{\mapsto} gxg^{-1} \in G$, $g \in G$. Если G – произвольная локально компактная группа, то $\operatorname{Ad}G$, вообще говоря, не является подгруппой в $\operatorname{Int}\mathbf{C}^\star(G)$.

Замечание 2. Если φ – центральное состояние на $\mathfrak{A}$ (конечный след), определяемое условием $\varphi(ab) = \varphi(ba)$ для всех $a, b \in \mathfrak{A}$, а $\mathcal{R}$ – группа внутренних автоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$, то $\operatorname{Orb}_\varphi \mathcal{R} = \varphi$, т.е. конечный след – стабильное состояние относительно внутренних автоморфизмов.

Следовательно, стабильность является естественным ослаблением свойства центральности.

Пусть $\overline{\mathcal{R}}$ – пополнение подгруппы $\mathcal{R} \subset \operatorname{Aut}\mathfrak{A}$ относительно сильной топологии (1). Легко видеть, что $\mathcal{R}$-стабильное состояние $\varphi \in \mathfrak{A}^*$ является также $\overline{\mathcal{R}}$-стабильным.

Замечание 3. Нетрудно понять, что для свободной группы G сильная топология на $\operatorname{Ad}G$ является дискретной. Следовательно, все состояния на свободной группе $\operatorname{Ad}G$-стабильны.

2.2. $\mathcal{R}$-стабильное представление $\mathbf{C}^\star$-алгебры $\mathfrak{A}$. Пусть π – представление $\mathbf{C}^\star$-алгебры $\mathfrak{A}$, действующее в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Определение 2. Представление π будем называть *$\mathcal{R}$-стабильным*, если при каждом $\theta \in \mathcal{R}$ представление $\pi \circ \theta$ квазиэквивалентно π и для любого $\eta \in \mathcal{H}$ функционал ψ_η из $\mathfrak{A}^*$, определяемый соотношением $\psi_\eta(a) = (\pi(a)\eta, \eta)$, $a \in \mathfrak{A}$, является $\mathcal{R}$-стабильным. $\operatorname{Ad} G$-стабильные представления локально компактной группы G (соответствующей групповой $\mathbf{C}^\star$-алгебры) будем называть *стабильными*.

Обозначим через M алгебру фон Неймана, порожденную операторами из $\pi(\mathfrak{A})$. Напомним важное определение.

Определение 3. Пусть ϖ – некоторое представление алгебры $\mathfrak{A}$ и N – алгебра фон Неймана, порожденная $\varpi(\mathfrak{A})$. Представления π и ϖ квазиэквивалентны, если существует изоморфизм $M \overset{\theta}{\mapsto} N$, для которого $\theta(\pi(a)) = \varpi(a)$ при всех $a \in \mathfrak{A}$.

Пусть M_* – множество функционалов на M, непрерывных в слабой операторной топологии. Из определения стабильности легко вывести, что для любого $\psi \in M_*$ функционал $\psi \circ \pi \in \mathfrak{A}^*$, определенный соотношением $\psi \circ \pi(a) = \psi(\pi(a))$, $a \in \mathfrak{A}$, является $\mathcal{R}$-стабильным. Отсюда вытекает важное утверждение.

Предложение 1. *$\mathcal{R}$-стабильность – инвариант квазиэквивалентности представлений.*

Замечание 4. Представление π алгебры $\mathfrak{A}$, построенное согласно конструкции Гельфанда, Наймарка, Сигала (ГНС-конструкции) по $\mathcal{R}$-стабильному состоянию, может не быть $\mathcal{R}$-стабильным. А именно, можно указать примеры $\mathbf{C}^\star$-алгебр, в частности групповых, такие, что существует автоморфизм $\theta \in \mathcal{R}$, для которого представления π и $\pi \circ \theta$ не квазиэквивалентны. Однако функционалы вида $\psi \circ \pi$ будут $\mathcal{R}$-стабильными для всех $\psi \in M_*$.

Положительно определенную функцию f на G назовем *стабильной*, если соответствующее ей состояние φ_f на $\mathbf{C}^\star(G)$ является $\operatorname{Ad} G$-стабильным.

2.3. Действия группы автоморфизмов на представлениях и стабильность. Если π – представление $\mathbf{C}^\star$-алгебры $\mathfrak{A}$ и $\theta \in \operatorname{Aut}\mathfrak{A}$, то операторы $\pi(\theta(a))$, $a \in \mathfrak{A}$, задают представление $\pi \circ \theta$, которое, вообще говоря, не квазиэквивалентно π. В том случае, когда π и $\pi \circ \theta$ квазиэквивалентны, существует автоморфизм $\overline{\theta}$ алгебры фон Неймана, порожденной операторами представления π, для которого $\overline{\theta}(\pi(a)) = \pi(\theta(a))$ при всех $a \in \mathfrak{A}$.

Для широкого класса подгрупп $\mathcal{R}$-стабильное представление π квазиэквивалентно $\pi \circ \theta$ при всех $\theta \in \mathcal{R}$. Например, это условие автоматически выполняется, когда $\mathcal{R} \subset \operatorname{Int}\mathfrak{A}$ или $\mathcal{R} \subset \operatorname{Ad} G$. Легко доказать, что в этом случае π квазиэквивалентно $\pi \circ \theta$ для всех θ из пополнения группы $\mathcal{R}$ относительно сильной топологии (1), (2). Доказательство обратного утверждения нам неизвестно.

Гипотеза. Предположим, что $\mathcal{R}$ – замкнутая относительно сильной топологии подгруппа в $\operatorname{Aut}\mathfrak{A}$ и представление π алгебры $\mathfrak{A}$ квазиэквивалентно $\pi \circ \theta$ при всех $\theta \in \mathcal{R}$. Тогда π – $\mathcal{R}$-стабильное представление.

Эта гипотеза очевидно верна в случае, когда сильная топология на $\mathcal{R}$ дискретна. Особый интерес она представляет для полной бесконечной симметрической группы, элементы которой рассматриваются как автоморфизмы группы конечных подстановок счетного множества, и других индуктивных пределов конечных групп.

§ 3. Стабильные положительно определенные функции на индуктивном пределе локально компактных групп

Определение стабильной положительно определенной функции на локально компактной группе из п. 2.2 опирается на топологии, связанные с групповой $\mathbf{C}^\star$-алгеброй. Индуктивные пределы локально компактных групп, вообще говоря, не являются локально компактными. Для них нет устоявшегося определения групповой $\mathbf{C}^\star$-алгебры. По этой причине понятие стабильности для индуктивного предела нуждается в некоторых уточнениях.

Пусть $G = \varinjlim G_i$ – индуктивный предел последовательности локально компактных групп $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, где G_i – замкнутая подгруппа в G_{i+1} для всех i. Определим систему окрестностей единицы $\mathcal{U}_{n,a,\varepsilon}$ в группе $\operatorname{Ad} G$, где $a \in \mathbf{C}^\star(G_n)$, следующим образом:

$$\mathcal{U}_{n,a,\varepsilon} = \bigl\{\theta \in \operatorname{Ad} G\colon \theta(G_n) = G_n,\ \|\theta(a) - a\|_{\mathbf{C}^\star(G_n)} < \varepsilon\bigr\}. \tag{3}$$

Для определения стабильной положительно определенной функции на индуктивном пределе $G = \varinjlim G_n$ локально компактных групп рассмотрим конус C_G^+ положительно определенных функций на G, снабженный топологией, задаваемой метрикой $\rho(\psi,\varphi) = \sup_n \|\psi - \varphi\|_n$, $\varphi,\psi \in C_G^+$, где $\|\cdot\|_n$ обозначает норму сопряженного пространства $\mathbf{C}^\star(G_n)^*$.

Определение 4. Положительно определенную функцию на G назовем стабильной, если отображение $\operatorname{Ad} G \ni \theta \overset{o_\varphi}{\mapsto} \varphi\circ\theta \in C_G^+$ непрерывно в топологии на $\operatorname{Ad} G$, определяемой согласно (3).

3.1. Ручные представления группы G и допустимые представления группы $G\times G$. Пусть G – локально компактная группа. Будем рассматривать $\operatorname{Ad} G$ как подгруппу группы автоморфизмов алгебры $\mathbf{C}^\star(G)$ с топологией (1). Если G – дискретная группа, то $\operatorname{Ad} G \subset \operatorname{Int} \mathbf{C}^\star(G)$. Зададим на G Ad-индуцированную топологию, соответствующую отображению $G \overset{\operatorname{Ad}}{\mapsto} \operatorname{Ad} G \subset \operatorname{Aut} \mathbf{C}^\star(G)$. Заметим, что Ad-индуцированная топология не разделяет элементы центра группы G.

Пусть унитарное представление Π группы G действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_\Pi$.

Определение 5. Представление Π называется *ручным*, если оно непрерывно относительно Ad-индуцированной топологии на G и сильной операторной топологии на $\Pi(G)$.

По определению ручное представление группы G однозначно определяется представлением $\operatorname{Ad} G \ni \operatorname{Ad} g \overset{\operatorname{Ad}\Pi}{\mapsto} \Pi(g)$, которое продолжается по непрерывности на пополнение $\operatorname{Ad} G$ в сильной топологии.

Если в качестве G рассматривать группу $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ конечных подстановок счетного множества, то данное определение совпадает с понятием ручного представления из [9] (см. также [12]).

Если Π – ручное представление и $\omega_\xi^{(g,h)}$ – функционал на $\mathbf{C}^\star(G)$, определенный соотношением $\omega_\xi^{(g,h)}(b) = (\Pi(gbh^{-1})\xi, \xi)$, где $\xi \in \mathcal{H}_\Pi$, $b \in \mathbf{C}^\star(G)$, то отображение $G \times G \ni (g,h) \mapsto \omega_\xi^{(g,h)} \in \mathbf{C}^\star(G)^*$ непрерывно, когда на $G \times G$ рассматривается топология произведения Ad-индуцированных топологий, а на $\mathbf{C}^\star(G)^*$ – топология нормы сопряженного пространства. В частности, $\omega_\xi^{(g,h)}$ – $\mathrm{Ad}\, G$-стабильный функционал, а Π – стабильное представление (см. п. 2.2).

С помощью топологии (3) аналогично определяется ручное представление индуктивного предела локально компактных групп.

Определение 6. Представление Π^2 группы $G \times G$ назовем допустимым, если отображение $G \ni g \mapsto \Pi^2((g,g))$ является ручным представлением группы G.

В случае группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \times \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ и некоторых других индуктивных пределов это понятие совпадает с классом допустимых представлений, рассмотренных Г. И. Ольшанским [1]. Но наше определение не использует тот факт, что группа является индуктивным пределом. В частности, для счетной группы фиксируется лишь группа автоморфизмов с топологией (2).

3.2. Характеры, следы и факторпредставления. Все представления групп, рассматриваемые здесь, являются унитарными, а представления $\mathbf{C}^\star$-алгебр сохраняют инволюцию.

Определение 7. Положительно определенная функция ϕ на группе G называется *характером*, если $\phi(g_1 g_2) = \phi(g_2 g_1)$ для всех $g_1, g_2 \in G$.

Удобно предполагать, что на единичном элементе группы характер равен единице.

В силу п. 3.3 характер является стабильной функцией на группе G. Пусть W_π – фактор типа II_1. Если tr – единственный нормальный и нормированный ($\mathrm{tr}(I) = 1$) след на W_π, то формула $\phi_\pi(g) = \mathrm{tr}(\pi(g))$ задает *характер* ϕ_π группы G.

Определение 8. Будем говорить, что характер ϕ – *неразложимый*, если представление π_ϕ, построенное по ϕ, является факторпредставлением.

Представление π $\mathbf{C}^\star$-алгебры $\mathfrak{A}$ называется факторпредставлением типа I_n (соответственно II_1, II_∞ или III), если W^*-алгебра, порожденная $\pi(\mathfrak{A})$, есть фактор типа I_n (соответственно II_1, II_∞ или III).

Нормальный полуконечный след τ на факторе W^π определяется с точностью до положительного множителя. Существует понятие полуконечного следа на $\mathbf{C}^\star$-алгебре $\mathfrak{A}$.

Определение 9. Положим $\mathfrak{A}^+ = \{aa^* \colon a \in \mathfrak{A}\}$. Отображение $f \colon \mathfrak{A}^+ \mapsto [0, \infty]$ называется *следом* на $\mathfrak{A}^+$ если выполняются следующие условия:

(i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ для всех x, $y \in \mathfrak{A}^+$;

(ii) если λ – неотрицательное число, то [1] $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ для всех $x \in \mathfrak{A}^+$;
(iii) $f(z^*z) = f(zz^*)$ для всех $z \in \mathfrak{A}$.
След f называется *полуконечным*, если для всех $x \in \mathfrak{A}^+$

$$f(x) = \sup\bigl\{f(y)\colon \mathfrak{A}^+ \ni y \leqslant x,\ f(y) < \infty\bigr\}. \tag{4}$$

Прямым следствием из определения полуконечного следа является следующее свойство: если полуконечный след f не равен тождественно нулю, то существует $a \in \mathfrak{A}^+$, для которого $0 < f(a) < \infty$.

Определение 10. Полуконечный след на $\mathfrak{A}^+$ называется неразложимым, если соответствующее представление является фактором (типа I или II).

Собственно полуконечный (неконечный) след на групповой алгебре $\mathbf{C}^\star(G)$ локально компактной группы G называется *полуконечным характером* на G.

Замечание 5. Пусть π – факторпредставление типа II_∞ $\mathbf{C}^\star$-алгебры $\mathfrak{A}$, $\pi(\mathfrak{A})''$ – фактор фон Неймана, порожденный операторами $\pi(\mathfrak{A})$, и tr – нормальный след на $\pi(\mathfrak{A})''$. Если π построено по полуконечному следу f на $\mathfrak{A}$, то $f(a) = \operatorname{tr}(\pi(a))$, где $a \in \mathfrak{A}$. Заметим также, что существуют $\mathbf{C}^\star$-алгебры и их факторпредставления типа II_∞, для которых $\operatorname{tr}(\pi(a))$ не определяет полуконечный след на $\mathfrak{A}$. Иными словами, $\{\operatorname{tr}(\pi(a))\}_{a\in\mathfrak{A}} \subset \{0,\infty\}$.

Предложение 2. *Если τ – полуконечный след на $\mathfrak{A}$ (см. определение 9) и h – положительный элемент из $\mathfrak{A}$, для которого $\tau(h) < \infty$, то функционал τ_h, определяемый соотношением $\tau_h(a) = \tau(ha)$, $a \in \mathfrak{A}$, является стабильным относительно группы внутренних автоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Заметим, что $\tau(h^2) \leqslant \|h\|\tau(h) < \infty$. Для унитарного U из $\mathfrak{A}$ и произвольного $x \in \mathfrak{A}$ имеем

$$\begin{aligned}|\tau(h^2 \operatorname{Ad} U(x)) - \tau(h^2x)| &\leqslant |\tau(\operatorname{Ad} U^*(h)(\operatorname{Ad} U^*(h) - h)x)| \\ &\quad + |\tau(hx(\operatorname{Ad} U^*(h) - h))| \leqslant 2\tau(h)\|\operatorname{Ad} U^*(h) - h\| \cdot \|x\|.\end{aligned}$$

Из предложения 2 и из п. 2.3 получаем

Следствие 1. *Представление π, построенное по полуконечному следу на $\mathbf{C}^\star$-алгебре, является стабильным относительно пополнения группы внутренних автоморфизмов в топологии (1).*

3.3. Группа конечных подстановок счетного множества и полная симметрическая группа. Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. Биекцию $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ назовем *конечной*, если множество $\{i \in \mathbb{N}\colon s(i) \neq i\}$ конечно. Определим $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$ как группу всех конечных биекций $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Положим $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}\setminus[1,n]} = \{s \in \mathfrak{S}_\mathbb{N}\colon s(k) = k \text{ для всех } k \leqslant n\}$, $\mathfrak{S}_n = \{s \in \mathfrak{S}_\mathbb{N}\colon s(k) = k \text{ для всех } k > n\}$. Подгруппу $\mathfrak{S}_n \cdot \mathfrak{S}_{\mathbb{N}\setminus[1,n]}$ обозначим через $\mathfrak{S}_\mathbb{N}^n$.

Полной симметрической группой, обозначаемой далее через $\overline{\mathfrak{S}}_\mathbb{N}$, называют группу всех биекций натурального ряда. Очевидно, $\mathfrak{S}_\mathbb{N} \subset \overline{\mathfrak{S}}_\mathbb{N}$, а отображение $\mathfrak{S}_\mathbb{N} \ni x \overset{\operatorname{Ad} s}{\mapsto} sxs^{-1} \in \mathfrak{S}_\mathbb{N}$ определяет при каждом $s \in \overline{\mathfrak{S}}_\mathbb{N}$ автоморфизм $\operatorname{Ad} s$ группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$, который естественно расширяется до автоморфизма групповой

[1] Мы принимаем, что $0 \cdot \infty = 0$.

$\mathbf{C}^\star$-алгебры $\mathbf{C}^\star(\mathfrak{S}_\mathbb{N})$. Группа $\overline{\mathfrak{S}}_\mathbb{N}$ является замыканием группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$ в слабой топологии, в которой базисом окрестностей единичного элемента являются подгруппы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}\setminus[1,n]}$. В частности, $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$ есть всюду плотная в слабой топологии нормальная подгруппа в $\overline{\mathfrak{S}}_\mathbb{N}$.

Замечание 6. Отображение $\overline{\mathfrak{S}}_\mathbb{N} \overset{\mathrm{Ad}}{\mapsto} \operatorname{Aut}\mathbf{C}^\star(\mathfrak{S}_\mathbb{N})$ непрерывно, если на $\overline{\mathfrak{S}}_\mathbb{N}$ рассматривается слабая топология, а топология на $\operatorname{Aut}\mathbf{C}^\star(\mathfrak{S}_\mathbb{N})$ задана согласно (1). Понятно, что $\operatorname{Ad}\overline{\mathfrak{S}}_\mathbb{N}$ замкнута в $\operatorname{Aut}\mathbf{C}^\star(\mathfrak{S}_\mathbb{N})$, а ядро гомоморфизма Ad тривиально. Нетрудно убедиться, что Ad и Ad^{-1} непрерывны. Принципиально важным является тот факт, что группа всех автоморфизмов группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$ совпадает с $\operatorname{Ad}\overline{\mathfrak{S}}_\mathbb{N}$. В силу сказанного состояние на $\mathbf{C}^\star(\mathfrak{S}_\mathbb{N})$, стабильное относительно $\operatorname{Ad}\mathfrak{S}_\mathbb{N}$, является также $\operatorname{Ad}\overline{\mathfrak{S}}_\mathbb{N}$-стабильным (см. п. 2.1). Таким образом, стабильные состояния на $\mathbf{C}^\star(\mathfrak{S}_\mathbb{N})$ полностью характеризуются тем условием, что отображение $\mathfrak{S}_\mathbb{N} \ni s \overset{o_\varphi}{\mapsto} \varphi\circ\operatorname{Ad}s \in \operatorname{Orb}_\varphi \operatorname{Ad}\mathfrak{S}_\mathbb{N}$ из определения 1 непрерывно относительно слабой топологии на $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$ и топологии нормы на $\operatorname{Orb}_\varphi \operatorname{Ad}\mathfrak{S}_\mathbb{N}$.

Замечание 7. В частности, положительно определенная функция f на $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$, для которой существует $n\in\mathbb{N}$ такое, что f удовлетворяет условию

$$f(tst^{-1}) = f(s) \quad \text{для всех} \quad s\in\mathfrak{S}_\mathbb{N}, \quad t\in\mathfrak{S}_{\mathbb{N}\setminus[1,n]},$$

является стабильной. В теореме 3 доказано, что множество таких функций плотно относительно нормы сопряженного пространства $\mathbf{C}^\star(\mathfrak{S}_\mathbb{N})^*$ в множестве всех стабильных положительно определенных функций.

3.4. Допустимые представления группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}\times\mathfrak{S}_\mathbb{N}$ и стабильные положительно определенные функции на $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$. Г. И. Ольшанский инициировал в [9] изучение класса представлений группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}\times\mathfrak{S}_\mathbb{N}$ – дубля группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$, сужения которых на диагональную подгруппу $\operatorname{diag}\mathfrak{S}_\mathbb{N}\subset\mathfrak{S}_\mathbb{N}\times\mathfrak{S}_\mathbb{N}$ непрерывны в слабой топологии (см. п. 3.3). Такие представления были названы *допустимыми*. Они, как представления дубля, имеют тип I. Очевидно, что сужение допустимого представления на диагональ на самом деле является представлением группы $\operatorname{Ad}\mathfrak{S}_\mathbb{N}$, которое расширяется по непрерывности до представления группы $\operatorname{Aut}\mathfrak{S}_\mathbb{N}$, изоморфной $\overline{\mathfrak{S}}_\mathbb{N}$ (см. п. 3.1). Полная классификация неприводимых допустимых представлений получена Г. И. Ольшанским и А. Ю. Окуньковым в [9] и [13]. Понятно, что ограничение допустимого неприводимого представления группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}\times\mathfrak{S}_\mathbb{N}$ на каждую из компонент $\mathfrak{S}_\mathbb{N}\times\mathbf{e}$ или $\mathbf{e}\times\mathfrak{S}_\mathbb{N}$ ($\mathbf{e}$ – единица группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$) является факторпредставлением в смысле фон Неймана. В настоящей работе мы получаем замкнутое (независимое от представления группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}\times\mathfrak{S}_\mathbb{N}$) описание этого класса факторпредставлений.

Если представление $\Pi^{(2)}$ группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}\times\mathfrak{S}_\mathbb{N}$ действует в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$, то эквивалентное условие допустимости заключается в том, что объединение подпространств $\mathbf{H}_n = \{\eta\in\mathbf{H}\colon \Pi^{(2)}(s,s)\eta = \eta$ при всех $s\in\mathfrak{S}_{\mathbb{N}\setminus[1,n]}\}$ плотно в $\mathbf{H}$ (см. [9]). Отсюда и из замечания 7 вытекает следующее утверждение.

Предложение 3. *Пусть $\Pi^{(2)}$ – допустимое представление группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}\times\mathfrak{S}_\mathbb{N}$, действующее в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$, $\eta\in\mathbf{H}$ и $f_\eta(s) = (\Pi^{(2)}(s,\mathbf{e})\eta,\eta)$. Тогда при любом $\eta\in\mathbf{H}$ положительно определенная функция f_η на $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$ является стабильной.*

Замечание 8. Мы докажем, что любое представление, построенное по стабильной положительно определенной функции, можно получить с точностью до квазиэквивалентности сужением некоторого допустимого представления (не единственного по модулю унитарной эквивалентности!) дубля $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \times \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ на одну из компонент (см. теорему 4 или предложение 7).

3.5. Характеры на $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$. Фундаментальным результатом теории представлений группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ является полное описание неразложимых характеров. Для его формулировки введем необходимые обозначения.

Пусть (α, β) – две последовательности положительных чисел $\alpha = \{\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \dots \geqslant \alpha_k \geqslant \cdots\}$ и $\beta = \{\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \dots \geqslant \beta_l \geqslant \cdots\}$ такие, что

$$\sum_k \alpha_k + \sum_k \beta_k \leqslant 1.$$

Обозначим через Δ множество всех таких пар (α, β).

Представим подстановку $s \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ в виде произведения независимых циклов. Пусть r_m – количество циклов в s длины m. По $(\alpha, \beta) \in \Delta$ зададим функцию $\chi_{\alpha\beta}$ на $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$:

$$\chi_{\alpha\beta}(s) = \prod_{m>1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^m + (-1)^{m+1} \beta_k^m) \right)^{r_m}. \tag{5}$$

Э. Тома [11] доказал следующее важное утверждение.

Теорема 1. *Функциями вида $\chi_{\alpha\beta}$, $(\alpha, \beta) \in \Delta$, исчерпываются все неразложимые характеры группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$.*

Координаты α_k, β_k принято называть *параметрами Тома* неразложимого характера $\chi_{\alpha\beta}$.

§ 4. Факторпредставления типа II_∞ группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$

Полуконечные следы (см. определение 9) на $\mathbf{C}^\star(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})$ были описаны в [3] и [14]. Соответствующие им представления, следуя Л. Пуканскому, называют *нормальными*. Для формулировки этого результата введем необходимые обозначения.

Пусть λ – разбиение числа n ($\lambda \vdash n$) и T_λ – соответствующее представление группы $\mathfrak{S}_n = \{s \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}} : s(k) = k \text{ для всех } k > n\}$. Для $g \in \mathfrak{S}_n$ и $h \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}\setminus[1,n]}$ положим $T_{\lambda\alpha\beta}(gh) = T_\lambda(g) \otimes \pi_{\alpha\beta}(h)$, где $\pi_{\alpha\beta}$ – представление $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}\setminus[1,n]}$, соответствующее характеру Тома $\chi_{\alpha\beta}$ (см. (5)). Обозначим через $\Pi_{\lambda\alpha\beta}$ представление группы $\mathfrak{S}_n$, индуцированное с представления $T_{\lambda\alpha\beta}$ подгруппы $\mathfrak{S}_n \cdot \mathfrak{S}_{\mathbb{N}\setminus[1,n]}$. Пусть $\Pi_{\lambda\alpha\beta}(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})''$ – бикоммутант множества $\Pi_{\lambda\alpha\beta}(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})$.

Полное описание полуконечных неразложимых характеров на $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ получено [2] в [3] и [14]. Сформулируем этот результат.

Теорема 2. *Пусть $n \geqslant 1$ и существуют $k, l \in \mathbb{N} \cup 0$, для которых $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k + \beta_1 + \dots + \beta_l = 1$. Тогда имеют место следующие свойства:*

(i) $\Pi_{\lambda\alpha\beta}$ – *факторпредставление группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$;*

[2] В [14] рассмотрен случай, когда набор ненулевых параметров α, β конечен.

(ii) *если* tr *– точный нормальный полуконечный след на факторе* $\Pi_{\lambda\alpha\beta}(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})''$, *то отображение* $\mathbf{C}^\star(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})^+ \ni A \overset{\tau_{\lambda\alpha\beta}}{\mapsto} \operatorname{tr}(\Pi_{\lambda\alpha\beta}(A))$ *задает полуконечный след* $\tau_{\lambda\alpha\beta}$ *на* $\mathbf{C}^\star(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})$;

(iii) *если* $k+l>1$, *то* $\Pi_{\lambda\alpha\beta}(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})''$ *– фактор типа* II_∞;

(iv) *если* $k+l=1$, *то* $\Pi_{\lambda\alpha\beta}(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})''$ *– фактор типа* I_∞.

Верно обратное утверждение. А именно, для любого неразложимого полуконечного следа f *на* $\mathbf{C}^\star(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})$ *существуют натуральное* n, $\lambda\vdash n$ *и параметры Тома* (α,β) *со свойствами* (i)–(iv) *такие, что* $f=\tau_{\lambda\alpha\beta}$.

Замечание 9. В силу предложения 2 представления $\Pi_{\lambda\alpha\beta}$ стабильны относительно группы всех внутренних автоморфизмов алгебры $\mathbf{C}^\star(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})$.

Замечание 10. В случае, когда набор параметров Тома бесконечен, но $\sum\alpha_k+\sum\beta_k=1$, представления $\Pi_{\lambda\alpha\beta}$ опять же имеют тип II_∞. Далее будет доказано, что при этом условии след $\tau_{\lambda\alpha\beta}$ из теоремы 2 равен бесконечности на любом ненулевом элементе из $\mathbf{C}^\star(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})^+$, т. е. не существует соответствующего полуконечного следа на групповой $\mathbf{C}^\star$-алгебре. Несмотря на это, мы покажем, что $\Pi_{\lambda\alpha\beta}$ будет стабильным представлением по отношению к группе $\operatorname{Ad}\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$. Вопрос о стабильности по отношению ко всей группе внутренних автоморфизмов алгебры $\mathbf{C}^\star(G)$ остается открытым.

Замечание 11. В случае, когда $\sum\alpha_k+\sum\beta_k<1$, мы показываем, что представления $\Pi_{\lambda\alpha\beta}$ имеют тип II_1 с этими же параметрами Тома.

§ 5. Классификация стабильных представлений группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ относительно квазиэквивалентности

В § 5 мы изложим без доказательств результаты о классификации стабильных представлений группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$. Доказательство будет дано в следующих пунктах.

5.1. Асимптотический характер стабильного факторпредставления. Со стабильным факторпредставлением π группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ свяжем инвариант $\chi^{\pi a}$, называемый *асимптотическим характером.* Для его определения выберем в классе сопряженности $\mathcal{C}(g)=\{sgs^{-1}\}_{s\in\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}}$ произвольного $g\in\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ последовательность g_n, для которой $\min\{k\in\mathbb{N}\colon g_n(k)\neq k\}>n$. Используя определение стабильности факторпредставления π, легко доказать следующее утверждение.

Предложение 4. *Для каждого* $g\in\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ *и любого положительного нормального состояния* ψ *на* $\pi(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})''$ *существует предел* $\lim_{n\to\infty}\psi(\pi(g_n))=\chi^{\pi a}(g)$, *который не зависит от выбора* ψ *и последовательности* $g_n\in\mathcal{C}(g)$. *Предельная функция* $\chi^{\pi a}$ *является неразложимым характером на* $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ (*см. определение* 7).

Следствие 2. *Для квазиэквивалентных факторпредставлений асимптотические характеры совпадают.*

5.2. Стабильные представления $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ и допустимые представления группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}\times\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$. Обозначим через M_* множество функционалов на W^*-алгебра M, непрерывных в сильной операторной топологии. Для представления π

группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ положим

$$M_*(n) = \{\phi \in \pi(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})''_*\colon \phi(\pi(s)x\pi(s^{-1})) = \phi(x) \ \ \forall\, x \in \pi(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})'',\ s \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}\setminus[1,n]}\}.$$

Теорема 3. *Следующие условия эквивалентны*:

(i) π – *стабильное представление* (*см. п.* 2.2);

(ii) *если* $M_*^+(n)$ – *множество положительных функционалов из* $M_*(n)$, *то* $\bigcup_n M_*^+(n)$ *плотно относительно нормы сопряженного пространства в множестве всех положительных функционалов из* $\pi(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})''_*$.

Доказательство этой теоремы приведено в п. 7.3.

Наименьшее n, для которого $M_*^+(n) \neq 0$ (теорема 3 (ii)), будем называть *центральной глубиной* представления π и обозначать через $\mathrm{cd}(\pi)$. Понятно, что центральная глубина является инвариантом квазиэквивалентности. По функционалу $\psi \in M_*^+(n)$ определяется положительно определенная функция f на $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$: $f(s) = \psi(\pi(s))$, удовлетворяющая соотношению $f(st) = f(ts)$ при всех $s \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ и $t \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}\setminus[1,n]}$. При $n = 0$ функция f является характером (центральной положительно определенной функцией). В общем случае такие функции мы будем называть *почти центральными*.

Следующее утверждение является частным случаем общего предложения 9.

Теорема 4. *Пусть* π – *стабильное представление счетной группы* G (*см. п.* 2.2). *Тогда существует допустимое представление* $\Pi^{(2)}$ *группы* $G \times G$ (*см. п.* 3.4) *такое, что сужение* $\Pi^{(2)}$ *на* $G \times \mathbf{e}$ *квазиэквивалентно* π, *центр* $\mathcal{C}$ *алгебры* $\Pi^{(2)}(G \times G)''$ *совпадает с центром* $\Pi^{(2)}(G \times \mathbf{e})''$, *а компоненты разложения* $\Pi^{(2)}$ *по* $\mathcal{C}$ *есть неприводимые представления*.

Доказательство. Представление $\Pi^{(2)}$ связано с представлением $\Pi^{\diamond}$ из предложения 9 соотношением $\Pi^{(2)}(g,h) = \Pi^{\diamond}(g \otimes h^*)$. Утверждение теоремы о квазиэквивалентности следует из предложения 7. Совпадение центров и неприводимость компонент вытекает из определения $\Pi^{\diamond}$ (см. (15)) и свойства c) п. 7.1 настоящей работы.

5.3. Индуцирование стабильных представлений с представлений конечного типа. Ключевым результатом статьи является следующее утверждение, доказанное в п. 8.2.

Теорема 5. *Пусть* π – *стабильное факторпредставление*, $n = \mathrm{cd}(\pi)$ *и состояние* $\psi \in \pi(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})''_*$ *удовлетворяет условию*: $\psi(\pi(tst^{-1})) = \psi(\pi(s))$ *при всех* $s \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ *и* $t \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}^n = \mathfrak{S}_n \cdot \mathfrak{S}_{\mathbb{N}\setminus[1,n]}$. *Если* E – *носитель* [3] ψ, *то*

$$EA = AE \ \ \textit{при всех} \ \ A \in \pi(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}^n)'', \qquad E\pi(s)E = 0 \ \ \textit{при всех} \ \ s \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}^n. \tag{6}$$

Следствие 3. *Представление* π_E *группы* $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}^n$, *образованное операторами* $E\pi(s)E$, *квазиэквивалентно представлению вида* $T_\lambda \otimes \pi_{\alpha\beta}$, *где* $\lambda \vdash n$, T_λ – *соответствующее неприводимое представление группы* $\mathfrak{S}_n$, *а* $\pi_{\alpha\beta}$ – *представление группы* $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}\setminus[1,n]}$, *построенное по характеру* $\chi_{\alpha\beta}$ (*см.* (5)). *Следовательно*, π *квазиэквивалентно представлению*, *индуцированному* $T_\lambda \otimes \pi_{\alpha\beta}$. *В частности*, *представление* π *имеет тип* I *или* II.

[3] По определению E – наименьший проектор из $\pi(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})''$ такой, что $\psi(\mathrm{I} - E) = 0$.

Ответ о возможных значениях центральной глубины стабильных факторпредставлений и ее зависимости от параметров Тома α, β содержится в следующем утверждении, которое доказано в п. 9.2.

Теорема 6. *Пусть $n \geqslant 1$, $\lambda \vdash n$, T_λ, $\pi_{\alpha\beta}$ – такие же, как в следствии 3. Если $\sum \alpha_i + \sum \beta_i = 1$, то $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}^n}^{\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}}(T_\lambda \otimes \pi_{\alpha\beta})$ является стабильным факторпредставлением типа I_∞ или II_∞ и его центральная глубина равна n. В случае, когда $\sum \alpha_i + \sum \beta_i < 1$, представление $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}^n}^{\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}}(T_\lambda \otimes \pi_{\alpha\beta})$ есть факторпредставление типа II_1.*

Теорема 7. *Пусть λ и $\widetilde{\lambda}$ – разбиения чисел $n, \widetilde{n} \geqslant 1$, T_λ, $\pi_{\alpha\beta}$ – такие же, как в теореме 6. Если $\sum \alpha_i + \sum \beta_i = 1$ и $\sum \widetilde{\alpha}_i + \sum \widetilde{\beta}_i = 1$, то представления $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}^n}^{\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}}(T_\lambda \otimes \pi_{\alpha\beta})$ и $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}^{\widetilde{n}}}^{\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}}(T_{\widetilde{\lambda}} \otimes \pi_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}})$ тогда и только тогда квазиэквивалентны, когда $\alpha_i = \widetilde{\alpha}_i$, $\beta_i = \widetilde{\beta}_i$, а $\lambda = \widetilde{\lambda}$.*

Доказательство этого утверждения дано в п. 9.3.

Таким образом, класс стабильных факторпредставлений исчерпывается представлениями вида $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}^n}^{\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}}(T_\lambda \otimes \pi_{\alpha\beta})$. Причем из условия $\sum \alpha_i + \sum \beta_i < 1$ вытекает, что центральная глубина представления $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}^n}^{\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}}(T_\lambda \otimes \pi_{\alpha\beta})$ равна нулю. Иными словами, в этом случае класс квазиэквивалентности не зависит от n и λ.

Следующая теорема единственности доказана в п. 9.4.

Теорема 8. *Пусть π – стабильное факторпредставление и $n = \mathrm{cd}(\pi)$. Предположим, что положительно определенная функция f удовлетворяет следующим условиям:*

(i) *представление π_f, построенное по f, квазиэквивалентно π;*

(ii) $f(tst^{-1}) = f(s)$ *при всех $s \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ и $t \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}^n$;*

(iii) $f(\mathbf{e}) = 1$.

Тогда существуют $\lambda \vdash n$ и параметры Тома α, β такие, что

$$f(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{\dim \lambda} \chi_\lambda(s_1) \chi_{\alpha\beta}(s_2), & \text{если } \ s_1 \in \mathfrak{S}_n, \ s_2 \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}\setminus[1,n]}, \ s = s_1 s_2, \\ 0, & \text{если } \ s \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}^n, \end{cases} \tag{7}$$

где χ_λ – характер неприводимого представления группы $\mathfrak{S}_n$, соответствующий λ, а $\dim \lambda$ – его размерность.

§ 6. Группоидные реализации стабильных представлений

В силу теоремы 4 при ограничении неприводимых допустимых представлений группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \times \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ на одну из компонент, например $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \times \mathbf{e}$, мы получаем представления группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, классы квазиэквивалентности которых после объединения дают все стабильные факторпредставления. Пусть $\mathrm{Irr}^a(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \times \mathfrak{S}_{\mathbb{N}})$ – множество всех классов унитарной эквивалентности неприводимых допустимых представлений группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \times \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, а $\mathrm{Stab}^f(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})$ – множество всех классов квазиэквивалентности стабильных факторпредставлений группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$. Представления $\Pi \in \mathrm{Irr}^a(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \times \mathfrak{S}_{\mathbb{N}})$ параметризуются параметрами Тома $({}^\Pi\alpha, {}^\Pi\beta)$ и парами $({}^\Pi\Lambda, {}^\Pi\Delta)$ полей диаграмм Юнга [2], [13]. Заметим, что $({}^\Pi\alpha, {}^\Pi\beta)$ однозначно восстанавливаются по факторпредставлению ${}^{\mathfrak{l}}\Pi$ группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, которое является ограничением Π на подгруппу $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \times \mathbf{e}$. А именно, параметры

Тома являются инвариантом квазиэквивалентности стабильного факторпредставления группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ (см. предложение 4). Так как $\operatorname{Irr}^a_{\alpha\beta}(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \times \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}) = \{\Pi \in \operatorname{Irr}^a(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \times \mathfrak{S}_{\mathbb{N}})\colon ({}^{\Pi}\alpha, {}^{\Pi}\beta) = (\alpha, \beta)\}$ есть счетное множество (см. [2], [13]), то множество

$$\operatorname{Stab}^f_{\alpha\beta}(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}) = \bigl\{\pi \in \operatorname{Stab}^f(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})\colon \text{ существует } \Pi \in \operatorname{Irr}^a_{\alpha\beta}(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \times \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}), \text{ для которого } {}^{\mathfrak{l}}\Pi \in \pi\bigr\}$$

не более чем счетно. А именно, если $\sum \alpha_i + \sum \beta_i = 1$, то в силу теорем 6 и 7 множество $\operatorname{Stab}^f_{\alpha\beta}(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})$ счетно, и $\#\operatorname{Stab}^f_{\alpha\beta}(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}) = 1$ при условии, что $\sum \alpha_i + \sum \beta_i < 1$. Можно доказать, что диаграмма λ из условий теорем 6 и 7 есть значение поля ${}^{\Pi}\Lambda$ в нуле.

В этом параграфе для каждого $\pi \in \operatorname{Stab}^f_{\alpha\beta}(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})$, используя конструкцию из [4], мы построим реализацию одного из представлений $\Pi \in \operatorname{Irr}^a(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \times \mathfrak{S}_{\mathbb{N}})$, для которого ${}^{\mathfrak{l}}\Pi \in \pi$. Так как реализации представлений конечного типа хорошо известны (см. [4], [15], [16]), то новыми здесь являются примеры факторпредставлений типа II_∞.

6.1. Пространство представления. Пусть $\alpha = (\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \dots \geqslant \alpha_n \geqslant \cdots)$, $\beta = (\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \dots \geqslant \beta_n \geqslant \cdots)$ – параметры Тома. Предполагается, что $\alpha_i, \beta_j > 0$ для всех индексов i, j и $\sum \alpha_i + \sum \beta_i = 1 - \gamma$, где $\gamma \in [0, 1]$. Таким образом, рассматривая α и β как упорядоченные множества, имеем: $\#\alpha = \#\{i\colon \alpha_i > 0\}$, $\#\beta = \#\{j\colon \beta_j > 0\}$. Введем множество $\mathfrak{N}$, которое является дизъюнктным объединением множеств: ${}^{\alpha}\mathfrak{N} = \{{}^{\alpha}1, {}^{\alpha}2, \dots, {}^{\alpha}a\}$, ${}^{\beta}\mathfrak{N} = \{{}^{\beta}1, {}^{\beta}2, \dots, {}^{\beta}b\}$, одноэлементного множества ${}^{\star}\mathfrak{N} = \{\star\}$ и одноэлементного множества ${}^{\gamma}\mathfrak{N} = \{{}^{\gamma}1\}$, где $a = \#\alpha$, $b = \#\beta$. Обозначим через X множество всех последовательностей $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ с координатами из $\mathfrak{N}$.

6.2. Действие и коцикл. На X рассмотрим действие $\mathcal{P}$ группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ перестановками координат: $\mathcal{P}_s x = (x_{s^{-1}(i)})$, $s \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$.

Теперь построим коциклы $c^\sharp\colon X \times \mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \mapsto \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, которые параметризуются компонентами ${}^{\sharp}\mathfrak{N}$ ($\sharp = *, \alpha, \beta, \gamma$) множества $\mathfrak{N}$ и будут использоваться для реализации операторов представления группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \times \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ в п. 6.4.

Для этого в $x = (x_i) \in X$ отметим все координаты, принадлежащие ${}^{\sharp}\mathfrak{N}$. Они образуют подпоследовательность $x^\sharp = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots)$. Обозначим через ${}^{\sharp}\mathfrak{I}(x)$ упорядоченное подмножество индексов $\{i_1 < i_2 < \cdots\} \subset \mathbb{N}$. Понятно, что $S\,{}^{\sharp}\mathfrak{I}(x) = \{S(i_1), S(i_2), \dots\}$ – множество всех индексов координат последовательности $\mathcal{P}_S x = (x_{S^{-1}(i)})$, принадлежащих ${}^{\sharp}\mathfrak{N}$. Существует единственная подстановка S_x такая, что для $j_k = i_{S_x(k)}$

$$S^{-1}(j_1) < S^{-1}(j_2) < \cdots. \tag{8}$$

Прямая проверка показывает, что $c^\sharp(x, S) = S_x$ удовлетворяет соотношению

$$c^\sharp(x, TS) = c^\sharp(x, T) \cdot c^\sharp(\mathcal{P}_{T^{-1}} x, S) \quad \text{для всех} \quad x \in X, \quad S, T \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}. \tag{9}$$

6.3. Инвариантные эргодические меры на X. Здесь мы определим на X семейство σ-конечных (конечных в случае пустого множества ${}^{*}\mathfrak{N}$) мер $\nu^{(n)}$, где $n \in 0 \cup \mathbb{N}$. Носитель меры $\nu^{(n)}$ будет содержаться в множестве X_n тех последовательностей $x = (x_i) \in X$, у которых ровно n координат равны $\star$.

По подмножеству $\mathbb{A} \subset \mathbb{N}$ такому, что $\#\mathbb{A} = n$, определим $X_n^{\mathbb{A}} = \{x = (x_i) \in X_n \colon x_i = \star$ при всех $i \in \mathbb{A}\}$. Понятно, что $X_n^{\mathbb{A}} \cap X_n^{\mathbb{B}} = \varnothing$ при $\mathbb{A} \neq \mathbb{B}$ и $X_n = \bigcup_{\mathbb{A}\colon \#\mathbb{A}=n} X_n^{\mathbb{A}}$.

На множестве $\mathfrak{N} \setminus \{\star\}$ зададим вероятностную меру μ, полагая $\mu({}^{\alpha}k) = \alpha_k$, $\mu({}^{\beta}k) = \beta_k$ и $\mu({}^{\gamma}1) = \gamma$.

Если $C_{\underline{x_1},x_2,\dots,x_k}$ – цилиндрическое подмножество в $X_n^{\mathbb{A}}$, задаваемое $(x_1, x_2, \dots, x_k)$, и $\overline{\mathbb{A}}_k$ – подмножество в $\{1, 2, \dots, k\}$, состоящее из чисел, не принадлежащих к $\mathbb{A}$, то $\nu^{(n)}(C_{x_1,x_2,\dots,x_k}) = \prod_{i\in\overline{\mathbb{A}}_k} \nu_i(x_i)$. Так как $\gamma + \sum_{l=1}^{\#\alpha} \alpha_l + \sum_{l=1}^{\#\beta} \beta_l = 1$, то $\nu^{(n)}(X_n^{\mathbb{A}}) = 1$. Продолжая $\nu^{(n)}$ на все X_n по аддитивности, мы получаем $\mathcal{P}$-инвариантную и σ-конечную (вероятностную при $n = 0$) меру. Следующее утверждение очевидно.

Лемма 1. *Мера $\nu^{(n)}$ инвариантна и эргодична относительно действия $\mathcal{P}$ группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$.*

6.4. Представления. Рассмотрим подмножество $\widetilde{X}_n \subset X_n \times X_n$, состоящее из всех пар (x, y), где $y = (y_i) = \mathcal{P}_s(x) = (x_{s^{-1}(i)})$ для некоторого $s \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$. Обозначим через $\mathcal{L}^2(\widetilde{X}_n)$ множество комплекснозначных функций F на $\widetilde{X}_n$ таких, что

$$\int_{X_n} \sum_{y\colon y=\mathcal{P}_s(x)} |F(x,y)|^2 \, d\nu^{(n)} < \infty.$$

Скалярное произведение, заданное формулой

$$\langle F_1, F_2\rangle = \int_{X_n} \sum_{y\colon y=\mathcal{P}_s(x)} F_1(x,y) \cdot \overline{F_2(x,y)} \, d\nu^{(n)},$$

превращает $\mathcal{L}^2(\widetilde{X}_n)$ в гильбертово пространство, которое удобно представлять в виде прямого интеграла

$$\mathcal{L}^2(\widetilde{X}_n) = \int_{X_n} l_x^2 \, d\nu^{(n)},$$

где l_x^2 есть l^2-пространство на счетном множестве $\{\mathcal{P}_s(x)\}_{s\in\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}}$. Таким образом,

$$\langle F_1, F_2\rangle = \int_{X_n} \bigl\langle F_1(x,\,\cdot\,), F_2(x,\,\cdot\,)\bigr\rangle_{l_x^2} \, d\nu^{(n)}.$$

Для построения допустимого представления $\Pi^{(2)}$ группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \times \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ выберем неприводимые представления T_λ группы $\mathfrak{S}_n = \{s \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \colon s(i) = i$ для всех $i > n\}$, действующие в гильбертовых пространствах H_λ. Обозначим через $\mathfrak{B}$ бирегулярное представление группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \times \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$. Операторы представления $\Pi^{(2)}$ действуют в пространстве $H_\lambda \otimes H_\lambda \otimes l^2(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}) \otimes \mathcal{L}^2(\widetilde{X}_n)$, элементы которого удобно рассматривать как функции на $\widetilde{X}_n$ со значениями в $H_\lambda \otimes H_\lambda \otimes l^2(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})$, следующим образом:

$$\begin{aligned}(\Pi^{(2)}(g,h)F)(x,y) &= \operatorname{sign}(c^{\beta}(x,g) \cdot c^{\beta}(y,h)) \\ &\quad\times \bigl(T_\lambda(c^{\star}(x,g)) \otimes T_\lambda(c^{\star}(y,h)) \otimes \mathfrak{B}(c^{\gamma}(x,g), c^{\gamma}(y,h))\bigr) F(\mathcal{P}_{g^{-1}}x, \mathcal{P}_{h^{-1}}y). \qquad (10)\end{aligned}$$

Замечание 12. Тот факт, что отображение $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \times \mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \ni (g,h) \mapsto \Pi^{(2)}(g,h)$ является гомоморфизмом, вытекает из (9), а унитарность оператора $\Pi^{(2)}(g,h)$ – следствие инвариантности меры $\nu^{(n)}$ (см. лемму 1). При $n=0$ эти представления изучались в [3].

Замечание 13. Из характеризации допустимых представлений Ольшанского (см. п. 3.4) вытекает, что $\Pi^{(2)}$ – допустимое представление в смысле определения 6.

Положим для удобства $\mathfrak{L}(g) = \Pi^{(2)}(g,\mathbf{e})$ и $\mathfrak{R}(g) = \Pi^{(2)}(\mathbf{e},g)$.

6.5. Свойства представлений $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{R}$. Обозначим через $\mathfrak{I}^n$ множество $\{1,2,\dots,n\}$. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{\dim H_\lambda}$ – ортонормальный базис в H_λ и $\mathfrak{i}_{\mathbf{e}}$ – индикатор единичного элемента $\mathbf{e} \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$. Определим функцию ξ_0 на $\widetilde{X}_n$ формулой

$$\xi_0(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq y \text{ или } x \notin X_n^{\mathfrak{I}^n}, \\ \dfrac{1}{\dim H_\lambda}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{\dim H_\lambda} e_k \otimes e_k\right) \otimes \mathfrak{i}_{\mathbf{e}} & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{11}$$

Следующее утверждение нетрудно вывести из (10).

Лемма 2. *Если $n=0$, то $(\mathfrak{L}(g)\xi_0,\xi_0) = (\mathfrak{R}(g)\xi_0,\xi_0) = \chi_{\alpha\beta}(g)$ (см. п. 3.5).*

Лемма 3. *Пусть$(k\ l)$ – транспозиция, меняющая местами k и l. Для каждого k относительно слабой операторной топологии существуют пределы*

$$^{\mathfrak{l}}\mathcal{O}_k = \lim_{l\to\infty} \mathfrak{L}((k\ l)), \qquad ^{\mathfrak{r}}\mathcal{O}_k = \lim_{l\to\infty} \mathfrak{R}((k\ l)), \tag{12}$$

которые являются операторами умножения на функции $^{\mathfrak{l}}f_k$ и $^{\mathfrak{r}}f_k$, соответственно определяемые формулами

$$^{\mathfrak{l}}f_k(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_k \in \{\star,\gamma\}, \\ \alpha_k, & \text{если } x_k = {}^{\alpha}k, \\ -\beta_k, & \text{если } x_k = {}^{\beta}k, \end{cases} \qquad ^{\mathfrak{r}}f_k(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y_k \in \{\star,\gamma\}, \\ \alpha_k, & \text{если } y_k = {}^{\alpha}k, \\ -\beta_k, & \text{если } y_k = {}^{\beta}k. \end{cases}$$

Следствие 4. *Если $n=0$, а $\sum\alpha_i + \sum\beta_i = 1$, то операторы $^{\mathfrak{l}}\mathcal{O}_k$ и $^{\mathfrak{r}}\mathcal{O}_k$ имеют нулевые ядра.*

Обозначим через $\mathcal{H}_0$ подпространство, являющееся замыканием линейной оболочки множества векторов $\Pi^{(2)}(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \otimes \mathfrak{S}_{\mathbb{N}})\xi_0$. Пусть $\Pi_0^{(2)}$, $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{R}_0$ – сужения представлений $\Pi^{(2)}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{R}$ на подпространство $\mathcal{H}_0$ соответственно. Имеет место следующее утверждение.

Предложение 5. *Представление $\Pi_0^{(2)}$ неприводимо. Факторпредставления $\mathfrak{L}_0$ и $\mathfrak{R}_0$ квазиэквивалентны представлению $\operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}^n}^{\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}}(T_\lambda \otimes \pi_{\alpha\beta})$ из теоремы 6.*

§ 7. Конструкция допустимых представлений по стабильным

Для перенесения понятия допустимого представления пары $(G \times G, \operatorname{diag} G)$ (см. определение 6) на $\mathbf{C}^\star$-алгебру $\mathfrak{A}$ естественно вместо группы $G \times G$ рассматривать алгебраическое тензорное произведение $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$, а $\operatorname{diag} G$ заменить на подгруппу в $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$, состоящую из элементов вида $u \otimes u$, где u из унитарной подгруппы в $\mathfrak{A}$, которую мы будем обозначать через $U(\mathfrak{A})$. Если $u, v \in U(\mathfrak{A})$ и $v = \zeta u$, где ζ – элемент центра алгебры $\mathfrak{A}$, то автоморфизмы $\operatorname{Ad} u$ и $\operatorname{Ad} v$ совпадают. Поэтому естественно потребовать, чтобы для допустимого представления Π алгебры $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$ выполнялось условие:

$$\Pi(u \otimes u) = \Pi(v \otimes v). \tag{13}$$

Но, с другой стороны, $\Pi(v \otimes v) = \Pi(\zeta \otimes \zeta) \cdot \Pi(u \otimes u)$. В частности, для $\zeta = \gamma \mathrm{I}_{\mathfrak{A}}$, где γ – скаляр, имеем $\Pi(v \otimes v) = \gamma^2 \cdot \Pi(u \otimes u)$.

Для того чтобы исключить данное противоречие, надо говорить о допустимом представлении алгебры $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}^\diamond$, где алгебра $\mathfrak{A}^\diamond$, называемая далее *зеркальной* по отношению к $\mathfrak{A}$, получается из $\mathfrak{A}$ заменой порядка множителей при умножении на обратный. А именно, операция умножения в $\mathfrak{A}^\diamond$, обозначаемая знаком $\diamond$, имеет вид: $a \diamond b = ba$. По отношению к норме и инволюции в исходной алгебре зеркальная алгебра есть $\mathbf{C}^\star$-алгебра.

Зафиксируем подгруппу $\mathcal{R}$ в $U(\mathfrak{A})$ и положим $\operatorname{Ad} \mathcal{R} = \{\operatorname{Ad} h \colon h \in \mathcal{R}\} \subset \operatorname{Aut} \mathfrak{A}$, $\operatorname{diag}^\diamond \mathcal{R} = \{(h \otimes h^\star) \colon h \in \mathcal{R}\} \subset \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}^\diamond$. Очевидно, что $\operatorname{diag}^\diamond \mathcal{R}$ – подгруппа в $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}^\diamond$. На $\mathcal{R}$ зададим Ad-индуцированную топологию, определяемую отображением $U(\mathfrak{A}) \ni u \mapsto \operatorname{Ad} u \in \operatorname{Aut} \mathfrak{A}$ и сильной топологией на $\operatorname{Aut} \mathfrak{A}$ (см. (1)).

Определение 11. Представление $\Pi^\diamond$ алгебры $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}^\diamond$ будем называть $\mathcal{R}$-*допустимым*, если отображение

$$\mathcal{R} \ni h \mapsto \Pi^\diamond((h \otimes h^\star)) \tag{14}$$

является непрерывным представлением группы $\mathcal{R}$ относительно Ad-индуцированной топологии на $\mathcal{R}$ и сильной операторной топологии на $\Pi^\diamond(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}^\diamond)$. В случае $\mathcal{R} = U(\mathfrak{A})$ будем называть $\mathcal{R}$-допустимое представление просто *допустимым*.

Если Π – допустимое представление пары $(G \times G, \operatorname{diag} G)$ в смысле определения 6, то представление $\Pi^\diamond$, определяемое соотношением $\Pi^\diamond(g, h) = \Pi(g, h^{-1})$, расширяется до G-допустимого в смысле определения 11 представления алгебры $\mathbf{C}^\star(G) \otimes \mathbf{C}^\star(G)^\diamond$.

В этом параграфе по $\operatorname{Ad} \mathcal{R}$-стабильному представлению алгебры $\mathfrak{A}$ строится $\operatorname{Ad} \mathcal{R}$-допустимое представление алгебры $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}^\diamond$.

7.1. Стандартные представления. В этом пункте мы напоминаем некоторые конструкции и факты из теории операторных алгебр, которые используются при доказательстве основных результатов, изложенных в § 5.

Пусть π – представление сепарабельной $\mathbf{C}^\star$-алгебры $\mathfrak{A}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_\pi$. Мы будем предполагать, что в $\mathfrak{A}$ есть единица $\mathrm{I}_{\mathfrak{A}}$, а $\pi(\mathrm{I}_{\mathfrak{A}}) = \mathrm{I}_{\mathcal{H}_\pi}$, где $\mathrm{I}_{\mathcal{H}_\pi}$ – единичный оператор в $\mathcal{H}_\pi$. По счетной полной в $\mathcal{H}_\pi$ системе векторов $\{\eta_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ найдем положительные числа c_i, для которых $\sum_{i \in \mathbb{N}} c_i \|\eta_i\|^2 = 1$. При этих условиях положительный функционал φ_π из $\mathfrak{A}^*$, определенный согласно формуле

$$\varphi_\pi(a) = \sum_{i \in \mathbb{N}} c_i (\pi(a)\eta_i, \eta_i),$$

является состоянием на $\mathfrak{A}$. Имеет место следующее, хорошо известное в теории операторных алгебр, утверждение.

Предложение 6. *Представление π квазиэквивалентно представлению Π алгебры $\mathfrak{A}$, построенному по φ_π согласно ГНС-конструкции. Если ξ_Π – циклический вектор для Π такой, что $\varphi_\pi(a) = (\Pi(a)\xi_\Pi, \xi_\Pi)$ при всех $a \in \mathfrak{A}$, то ξ_Π является также циклическим вектором для коммутанта $\Pi(\mathfrak{A})'$ алгебры $\Pi(\mathfrak{A})$. Иными словами, если $A\xi_\Pi = 0$ для некоторого A из слабого замыкания $\Pi(\mathfrak{A})''$ алгебры $\Pi(\mathfrak{A})$, то $A = 0$.*

Обозначим через $\mathcal{H}_\Pi$ гильбертово пространство, в котором действует представление Π из предложения 6. Так как ξ_Π – одновременно циклический вектор для $\Pi\,(\mathfrak{A})$ и $\Pi(\mathfrak{A})'$, то отображение

$$\Pi(\mathfrak{A})''\xi_\Pi \ni A\xi_\Pi \mapsto A^*\xi_\Pi$$

задает предзамкнутый антилинейный оператор (см. [17]) с плотной областью определения $\Pi(\mathfrak{A})''\xi_\Pi \subset \mathcal{H}_\Pi$. Обозначим через $\mathcal{S}$ его минимальное замыкание. Если $\mathcal{S} = \mathcal{J}\Delta^{1/2}$ – полярное разложение $\mathcal{S}$, то имеют место следующие свойства (см. [17]):

a) $\mathcal{J}(c\eta) = \overline{c}\mathcal{J}\eta$ и $(\mathcal{J}\eta, \mathcal{J}\zeta) = (\zeta, \eta)$ для всех $c \in \mathbb{C}$, $\eta, \zeta \in \mathcal{H}_\Pi$;

b) $\mathcal{J}^2 = \mathrm{I}_{\mathcal{H}_\pi}$ и $\mathcal{J}\Delta\mathcal{J} = \Delta^{-1}$;

c) $\mathcal{J}\Pi(\mathfrak{A})''\mathcal{J} = \Pi(\mathfrak{A})'$.

Для $a \otimes b \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}^\diamond$ положим

$$\Pi^\diamond(a \otimes b) = \Pi(a)\mathcal{J}\Pi(b^*)\mathcal{J}. \tag{15}$$

Из определения алгебры $\mathfrak{A}^\diamond$ вытекает, что $\Pi^\diamond$ есть $\star$-представление алгебры $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}^\diamond$. Если $\mathfrak{A}$ – групповая $\mathbf{C}^\star$-алгебра $\mathbf{C}^\star(G)$ счетной группы G, то, рассматривая $g, h \in G$ как элементы из $\mathbf{C}^\star(G)$, имеем

$$\Pi^\diamond(g \otimes h) = \Pi(g)\mathcal{J}\Pi(h^{-1})\mathcal{J}. \tag{16}$$

Предложение 7. *Отождествим алгебру $\mathfrak{A}$ с подалгеброй $\mathfrak{A} \otimes \mathrm{I}_{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}^\diamond$. Тогда сужение представления $\Pi^\diamond$ на $\mathfrak{A} \otimes \mathrm{I}_{\mathfrak{A}}$ унитарно эквивалентно Π и квазиэквивалентно π (см. предложение 6).*

Замыкание множества векторов $\{a\mathcal{J}a\xi_\Pi\}_{a\in\Pi(\mathfrak{A})''}$ образует в $\mathcal{H}_\Pi$ конус $\mathfrak{P}_\Pi$, имеющий ряд полезных свойств. Приведем два из них, которые будут использоваться далее.

Предложение 8 (см. [17]). *Для любого положительного нормального[4] функционала ϕ на $\Pi(\mathfrak{A})''$ существует единственный вектор $\eta_\phi \in \mathfrak{P}_\Pi$ такой, что $\phi(a) = (a\eta_\phi, \eta_\phi)$ для всех $a \in \Pi(\mathfrak{A})''$. Пусть ϕ_1, ϕ_2 – два нормальных положительных функционала на $\Pi(\mathfrak{A})''$, а η_{ϕ_1} и η_{ϕ_2} – соответствующие им векторы из $\mathfrak{P}_\Pi$. Тогда имеет место следующая оценка:*

$$\|\eta_{\phi_1} - \eta_{\phi_2}\| \leqslant \|\phi_1 - \phi_2\| \leqslant \|\eta_{\phi_1} - \eta_{\phi_2}\| \cdot \|\eta_{\phi_1} + \eta_{\phi_2}\|. \tag{17}$$

[4] Нормальность означает непрерывность в слабой операторной топологии.

7.2. Стабильность представления π влечет допустимость $\Pi^\diamond$. Пусть $U(\mathfrak{A})$ состоит из унитарных элементов $\mathbf{C}^\star$-алгебры $\mathfrak{A}$, $\mathcal{R}$ – подгруппа в $U(\mathfrak{A})$, а $\operatorname{Ad}\mathcal{R}$ – соответствующая ей подгруппа в $\operatorname{Aut}\mathfrak{A}$.

Предложение 9. *Если π – $\operatorname{Ad}\mathcal{R}$-стабильное представление $\mathbf{C}^\star$-алгебры $\mathfrak{A}$ (см. п. 2.1), а Π и $\Pi^\diamond$ – представления алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{A}^\diamond$ соответственно, построенные согласно предложению 6 и соотношению (15), то $\Pi^\diamond$ – $\mathcal{R}$-допустимое представление (см. определение 11).*

Доказательство. Пусть η произвольный элемент из множества векторов $\{a\mathcal{J}b\xi_\Pi\}_{a,b\in\Pi(\mathfrak{A})''}$, которое плотно по норме в H_Π и $\varphi_\eta(a)=(\Pi(a)\eta,\eta)$, $a\in\mathfrak{A}$. Если $\eta=a\mathcal{J}b\xi_\Pi$, то

$$\eta=\frac{1}{4}\bigl[(a+b)\mathcal{J}(a+b)\xi_\Pi-(a-b)\mathcal{J}(a-b)\xi_\Pi \\ +i(a+b)\mathcal{J}(a+ib)\xi_\Pi-i(a-ib)\mathcal{J}(a-ib)\xi_\Pi\bigr],$$

где каждое слагаемое в правой части принадлежит конусу $\mathfrak{P}_\Pi$ (см. п. 7.1).

Поэтому наше предложение будет следовать из оценки

$$\|\Pi^\diamond(u\otimes u^*)\eta-\eta\|\leqslant\|\varphi_\eta\circ\operatorname{Ad}u^*-\varphi_\eta\|, \tag{18}$$

которую достаточно доказать для $\eta\in\mathfrak{P}_\Pi$.

Так как $\Pi^\diamond(a\otimes a^*)x\mathcal{J}x\xi_\Pi=\Pi(a)x\mathcal{J}\Pi(a)x\xi_\Pi$ для всех $x\in\Pi(\mathfrak{A})''$ и $a\in\mathfrak{A}$, то

$$\Pi^\diamond(\operatorname{diag}^\diamond U(\mathfrak{A}))\mathfrak{P}_\Pi=\mathfrak{P}_\Pi.$$

Отсюда, опираясь на соотношение

$$\bigl(\Pi(u^*)x\Pi(u)\eta,\eta\bigr)=\bigl(x\Pi^\diamond(u\otimes u^*)\eta,\Pi^\diamond(u\otimes u^*)\eta\bigr),$$

где $u\in U(\mathfrak{A})$, $x\in\Pi(\mathfrak{A})''$, и учитывая неравенство из предложения 8, получаем

$$\|\Pi^\diamond(u\otimes u^*)\eta-\eta\|\leqslant\sup_{x\in\Pi(\mathfrak{A})'':\ \|x\|\leqslant1}|(\Pi(u^*)x\Pi(u)\eta,\eta)-(x\eta,\eta)| \\ =\sup_{a\in\mathfrak{A}:\ \Pi(a)\neq0}\frac{|(\Pi(u^*au)\eta,\eta)-(\Pi(a)\eta,\eta)|}{\|\Pi(a)\|}. \tag{19}$$

Теперь оценим последнее выражение через норму пространства $\mathfrak{A}^*$. А именно, докажем, что если $\Pi(a)\neq0$, то

$$\frac{|(\Pi(u^*au-a)\eta,\eta)|}{\|\Pi(a)\|}\leqslant\sup_{b\in\mathfrak{A}}\frac{|(\Pi(u^*bu-b)\eta,\eta)|}{\|b\|}=\|\varphi_\eta^\Pi\circ\operatorname{Ad}u^*-\varphi_\eta^\Pi\|. \tag{20}$$

Пусть $\mathfrak{I}=\{a\in\mathfrak{A}\colon\Pi(a)=0\}$. Тогда $\mathfrak{I}$ – замкнутый двусторонний идеал в $\mathfrak{A}$, а факторалгебра $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$, снабженная естественной структурой $\star$-алгебры и факторнормой $\|\cdot\|_{\mathfrak{A}/\mathfrak{I}}$, есть $\mathbf{C}^\star$-алгебра. Представление Π является инъективным $\star$-морфизмом факторалгебры $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$ в $\Pi(A)''$. Следовательно,

$$\|\Pi(a)\|=\|\widetilde{a}\|_{\mathfrak{A}/\mathfrak{I}}=\inf_{\mathfrak{i}\in\mathfrak{I}}\|a+\mathfrak{i}\|,$$

где $\widetilde{a}=a+\mathfrak{I}$ – образ элемента $a\in\mathfrak{A}$ при каноническом отображении $\mathfrak{A}\mapsto\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$ (см. [18]). Отсюда

$$\frac{|(\Pi(u^*au-a)\eta,\eta)|}{\|\Pi(a)\|}=\sup_{\mathfrak{e}\in\mathfrak{I}}\frac{|(\Pi(u^*(a+\mathfrak{e})u-(a+\mathfrak{e}))\eta,\eta)|}{\|a+\mathfrak{e}\|}.$$

Следовательно, неравенство (20) доказано.

7.3. Доказательство теоремы 3. В этом пункте мы докажем теорему 3, из которой следует существование почти центральных состояний.

Рассматриваемые ниже представления Π и $\Pi^\diamond$ связаны с π из условия теоремы 3 с помощью конструкции, изложенной в п. 7.1.

Так как свойства (i), (ii) из условия теоремы 3 инвариантны относительно квазиэквивалентности представлений, то согласно предложению 6 мы будем предполагать, не ограничивая общности, что π и Π совпадают.

Если имеет место свойство (i), то в силу предложения 9 представление $\Pi^\diamond$ алгебры $\mathbf{C}^\star(\mathfrak{S}_\mathbb{N})\otimes\mathbf{C}^\star(\mathfrak{S}_\mathbb{N})^\diamond$ (группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}\times\mathfrak{S}_\mathbb{N}^\diamond$) является $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$-допустимым (см. п. 3.4, определение 11).

Следовательно, представление $\mathfrak{S}_\mathbb{N}\ni s\mapsto\Pi^\diamond(s\otimes s^*)$ (см. (16)) действует в $\mathcal{H}_\Pi$ непрерывно, если на $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$ рассматривается слабая топология (см. п. 3.3). Поэтому для каждого вектора $\eta\in\mathcal{H}_\Pi$ и любого числа $\varepsilon>0$ существует $n\in\mathbb{N}$ со свойством

$$\|\Pi^\diamond(s\otimes s^*)\eta-\eta\|_{H_\Pi}<\varepsilon \quad \text{при} \ \ s\in\mathfrak{S}_{\mathbb{N}\setminus[1,n]}. \tag{21}$$

Пусть ω – положительный функционал из $\Pi(\mathfrak{S}_\mathbb{N})''_*$, а ξ_ω – единственный вектор из конуса $\mathfrak{P}_\Pi$ (см. п. 7.1), для которого $\omega(m)=(m\xi_\omega,\xi_\omega)$ при всех $m\in\Pi(\mathfrak{S}_\mathbb{N})''$. Если в (21) вектор $\eta=\xi_\omega$ и

$$P_n^{(k)}=\frac{1}{k!}\sum_{s\in\mathfrak{S}_{n+k}\cap\mathfrak{S}_{\mathbb{N}\setminus[1,n]}}\Pi^\diamond(s\otimes s^*),$$

то

$$\|P_n^{(k)}\xi_\omega-\xi_\omega\|<\varepsilon. \tag{22}$$

Так как $\{P_n^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ – убывающая последовательность самосопряженных проекторов, то существует предел $P_n=\lim_{k\to\infty}P_n^{(k)}$ и в силу (22)

$$\|P_n\xi_\omega-\xi_\omega\|<\varepsilon, \quad \Pi^\diamond(s\otimes s^*)P_n\xi_\omega=P_n\xi_\omega \quad \text{для всех} \ \ s\in\mathfrak{S}_{\mathbb{N}\setminus n}. \tag{23}$$

Так как конус $\mathfrak{P}_\Pi$ инвариантен относительно операторов $\Pi^\diamond(s\otimes s^*)$, $s\in\mathfrak{S}_\mathbb{N}$, то $P_n\xi_\omega\in\mathfrak{P}_\Pi$. Отсюда, полагая $\omega_\varepsilon(m)=(mP_n\xi_\omega,P_n\xi_\omega)$, $m\in M_\Pi$, применяя (23) и (17), получаем

$$\omega_\varepsilon\in M_*^+(n), \qquad \|\omega-\omega_\varepsilon\|<\varepsilon\|\xi_\omega+P_n\xi_\omega\|.$$

Свойство (ii) из условия теоремы 3 доказано. Обратное утверждение (т. е. (ii) $\Longrightarrow$ (i)) очевидно.

§ 8. Свойства стабильных представлений группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$

В § 8 будет дано доказательство теоремы 5. Предполагая, что представление π удовлетворяет условиям теоремы 5, мы вначале докажем четыре вспомогательные леммы.

Пусть Π и $\Pi^\diamond$ – представления алгебр $\mathbf{C}^\star(\mathfrak{S}_\mathbb{N})$ и $\mathbf{C}^\star(\mathfrak{S}_\mathbb{N})\otimes\mathbf{C}^\star(\mathfrak{S}_\mathbb{N})^\diamond$ соответственно, построенные по π согласно п. 7.1.

8.1. Асимптотические проекторы. Так как Π – факторпредставление, то $\Pi^\diamond$ – неприводимое представление алгебры $\mathbf{C}^\star(\mathfrak{S}_\mathbb{N})\otimes\mathbf{C}^\star(\mathfrak{S}_\mathbb{N})^\diamond$. В силу предложения 8 для состояния ψ из формулировки теоремы 5 существует вектор ξ_ψ из конуса $\mathfrak{P}_\Pi$ со свойствами:

$$\begin{gathered}\psi(a)=(a\xi_\psi,\xi_\psi)\quad \text{для всех}\ \ a\in\Pi(\mathfrak{S}_\mathbb{N})'',\\ \Pi^\diamond(s\otimes s^{-1})\xi_\psi=\xi_\psi\quad \text{для всех}\ \ s\in\mathfrak{S}_{\mathbb{N}\setminus[1,n]},\ \text{где}\ n=\operatorname{cd}\Pi.\end{gathered}\tag{24}$$

Так как Π – стабильное факторпредставление, то в силу предложения 9 представление $\Pi^\diamond$ является допустимым. Поэтому, используя характеризацию допустимых представлений из п. 3.4, получаем следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть* $\mathcal{H}_\Pi^{(n)}=\{\eta\in\mathcal{H}_\Pi\colon \Pi^\diamond(s\otimes s^{-1})\eta=\eta$ *для всех* $s\in\mathfrak{S}_{\mathbb{N}\setminus[1,n]}\}$. *Представление* $\Pi^\diamond$ *неприводимо, а множество* $\mathcal{H}_\Pi^{(\infty)}=\bigcup_{n=1}^\infty\mathcal{H}_\Pi^{(n)}$ *плотно по норме в* $\mathcal{H}_\Pi$.

Лемма 5. *Пусть* (mn) *обозначает транспозицию* m *и* n. *Обозначим для удобства* $\Pi^\diamond(s\otimes s^{-1})$ *через* $D(s)$. *Тогда в слабой операторной топологии существует*

$$\lim_{N\to\infty}D((mN))=P_m^\diamond,$$

который является самосопряженным проектором, и имеет место соотношение

$$D(s)P_m^\diamond D(s^{-1})=P_{s(m)}^\diamond.\tag{25}$$

Доказательство. Если $\eta_1,\eta_2\in H_\Pi^{(n)}$, то при $m<n<k<N$

$$\bigl(D((mN))\eta_1,\eta_2\bigr)=\bigl(D((mk))\eta_1,\eta_2\bigr).\tag{26}$$

Отсюда и из леммы 4 вытекает существование слабого предела, определяющего $P_m^\diamond$. Опираясь на соотношение

$$\bigl(D(s)D((mN))D(s^{-1})\eta_1,\eta_2\bigr)=\bigl(D((s(m)\,N))\eta_1,\eta_2\bigr),$$

которое выполняется при каждом $s\in\mathfrak{S}_\mathbb{N}$ для всех достаточно больших N, получаем (25). Понятно, что $P_m^\diamond=(P_m^\diamond)^*$. Докажем, что $P_m^\diamond=(P_m^\diamond)^2$.

Действительно, при $m<n<k$ имеем

$$\begin{aligned}((P_m^\diamond)^2\eta_1,\eta_2)&=\lim_{N\to\infty}\bigl(P_m^\diamond D((mN))\eta_1,\eta_2\bigr)\overset{(26)}{=}(P_m^\diamond D((mk))\eta_1,\eta_2)\\&=\lim_{N\to\infty}\bigl(D((mN))D((mk))\eta_1,\eta_2\bigr)=\lim_{N\to\infty}\bigl(D((mk))D((kN))\eta_1,\eta_2\bigr)\\&=\bigl(D((mk))\eta_1,\eta_2\bigr)\overset{(26)}{=}(P_m^\diamond\eta_1,\eta_2).\end{aligned}$$

Отсюда и из леммы 4 получаем требуемое соотношение.

Докажем еще одну техническую лемму.

Лемма 6. *При любых* $l,m\in\mathbb{N}$ *проекторы* $P_l^\diamond$ *и* $P_m^\diamond$, *определенные в лемме* 5, *удовлетворяют соотношениям*

$$P_l^\diamond P_m^\diamond=P_m^\diamond P_l^\diamond,\qquad D((l\,m))P_l^\diamond P_m^\diamond=P_l^\diamond P_m^\diamond.\tag{27}$$

Доказательство. Тот факт, что $P_l^\diamond$ и $P_m^\diamond$ коммутируют, легко доказывается с помощью предельного перехода в соотношении (25).

Для доказательства второго соотношения зафиксируем натуральные числа $N > k > n > \max\{l, m\}$ и векторы $\eta_1, \eta_2 \in H_\Pi^{(n)}$. Опираясь на соотношение $(lm)(lk)(mN) = (lk)(mN)(kN)$, получаем

$$\begin{aligned}\bigl(D((lm))P_l^\diamond P_m^\diamond \eta_1, \eta_2\bigr) &= \bigl(D((lk))D((mN))D((kN))\eta_1, \eta_2\bigr) \\ &= \bigl(D((lk))D((mN))\eta_1, \eta_2\bigr) \overset{(26)}{=} (P_l^\diamond P_m^\diamond \eta_1, \eta_2).\end{aligned}$$

Теперь наше утверждение вытекает из леммы 4.

Прямым следствием лемм 4, 5 и 6 является следующее утверждение.

Лемма 7. *Пусть $\mathcal{S}$ – подмножество в $\mathbb{N}$, а $\mathfrak{S}_\mathcal{S} = \{s \in \mathfrak{S}_\mathbb{N} \colon s(k) = k$ при всех $k \in \mathbb{N} \setminus \mathcal{S}\}$. Тогда существует сильный предел*

$$\mathcal{P}_\mathcal{S} = \lim_{N\to\infty} \prod_{k\in\mathcal{S}, k\leqslant N} P_k^\diamond$$

и $\mathcal{P}_\mathcal{S} H_\Pi = \{v \in H_\Pi \colon D(s)v = v$ для всех $s \in \mathfrak{S}_\mathcal{S}\}$.

8.2. Доказательство теоремы 5. Для состояния ψ из формулировки теоремы 5 существует единственный вектор $\eta_\psi \in \mathfrak{P}_\Pi$ (см. п. 7.1), для которого

$$\psi(a) = (\Pi(a)\eta_\psi, \eta_\psi), \qquad a \in \pi(\mathfrak{S}_\mathbb{N})''.$$

Так как ψ – $\mathfrak{S}_\mathbb{N}^n$-инвариантно и $\Pi^\diamond(s \otimes s^{-1})\mathfrak{P}_\Pi = \mathfrak{P}_\Pi$ (см. (15)), то

$$\Pi^\diamond(s \otimes s^{-1})\eta_\psi = \eta_\psi \quad \text{для всех} \quad s \in \mathfrak{S}_\mathbb{N}^n.$$

В силу леммы 7

$$\mathcal{P}_{]n,\infty[}\eta_\psi = \eta_\psi, \qquad \text{где} \quad]n,\infty[= \{n+1, n+2, \dots\}. \tag{28}$$

Для любого $s \in \mathfrak{S}_\mathbb{N}$, опираясь на леммы 5 и 7, имеем

$$\Pi^\diamond(s \otimes s^{-1})\mathcal{P}_{]n,\infty[}\Pi^\diamond(s^{-1} \otimes s) = \mathcal{P}_{s(]n,\infty[)}, \quad \mathcal{P}_{]n,\infty[} \cdot \mathcal{P}_{s(]n,\infty[)} = \mathcal{P}_{]n,\infty[\,\cup\, s(]n,\infty[)}. \tag{29}$$

Отсюда и из леммы 7, учитывая равенство $n = \mathrm{cd}(\Pi)$, получаем, что при условии $s(]n,\infty[) \neq\,]n,\infty[$

$$\mathcal{P}_{]n,\infty[} \cdot \mathcal{P}_{s(]n,\infty[)} = 0.$$

Из этого свойства и (28), (29) имеем

$$s(]n,\infty[) \neq\,]n,\infty[\quad \Longrightarrow \quad \eta_\psi \perp \Pi^\diamond(s \otimes s^{-1})\eta_\psi. \tag{30}$$

Обозначим через $\psi_{s^{-1}}$ состояние на $\Pi(\mathfrak{S}_\mathbb{N})$, определяемое вектором $\Pi^\diamond(s \otimes s^{-1})\eta_\psi$. В силу (15)

$$\psi_{s^{-1}}(a) = (a\Pi^\diamond(s \otimes s^{-1})\eta_\psi, \Pi^\diamond(s \otimes s^{-1})\eta_\psi) = \psi(\Pi(s^{-1})a\Pi(s)).$$

Так как векторы η_ψ и $\Pi^\diamond(s \otimes s^{-1})\eta_\psi$ принадлежат конусу $\mathfrak{P}_\Pi$, то можно применить лемму 1.12 из [17], согласно которой при $s \notin \mathfrak{S}_\mathbb{N}^n$ в силу (30) носители состояний ψ и $\psi_{s^{-1}}$ ортогональны.

§ 9. Структура стабильных факторпредставлений группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$

В § 9 мы докажем теоремы 6, 7 и 8. Для этого нам потребуется техническое свойство представлений Тома, которое будет следовать из их группоидной реализации (см. лемму 3).

9.1. Свойства асимптотических операторов для индуцированных представлений. Предположим, что T_λ и $\pi_{\alpha\beta}$ такие же, как в теореме 6, а $\pi = \operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}^n}^{\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}} T_\lambda \otimes \pi_{\alpha\beta}$. Пусть $\mathcal{H}_\lambda$ – гильбертово пространство, в котором действует T_λ, $M = \pi_{\alpha\beta}(\mathfrak{S}_{n\infty})''$ и tr – нормированный след на II_1-факторе M. Предположим, что $\pi_{\alpha\beta}$ реализовано в $L^2(M, \mathrm{tr})$ операторами левого умножения. Обозначим через X пространство левых классов смежности в группе $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ относительно подгруппы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}^n$ и зафиксируем отображение $X \ni x \xmapsto{\mathfrak{s}} \mathfrak{s}(x) \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ такое, что $x = \mathfrak{s}(x)\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}^n$ и $\mathfrak{s}(x) = \mathbf{e}$ при $x = \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}^n$. Тогда операторы представления π действуют на $v \in \mathcal{H}_{\lambda\alpha\beta} = l^2(\mathcal{H}_\lambda \otimes L^2(M, \mathrm{tr}), X)$ согласно формуле

$$(\pi(g)v)(x) = c(g, x)v(g^{-1}x), \tag{31}$$

где $c(g, x) = (T_\lambda \otimes \pi_{\alpha\beta})\big((\mathfrak{s}(x))^{-1} g \mathfrak{s}(g^{-1}x)\big)$. Для $g \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ обозначим через $\widetilde{g}$ класс из X, содержащий g. Положим

$$\xi(x) = \begin{cases} v_\lambda \otimes \mathrm{I}_M, & \text{если} \quad x = \widetilde{\mathbf{e}}, \\ 0, & \text{если} \quad x \neq \widetilde{\mathbf{e}}, \end{cases}$$

где v_λ – единичный вектор из $\mathcal{H}_\lambda$, I_M – единичный оператор из $M \subset L^2(M, \mathrm{tr})$.

Замечание 14. Вектор ξ является циклическим для представления π (см. формулу (31)).

Если $g, h \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ и $M(g, h) = \max\{k \colon g(k) \neq k \text{ или } h(k) \neq k\}$, то

$$\big(\pi((k\ n))\pi(g)\xi, \pi(h)\xi\big) = \big(\pi((k\ m))\pi(g)\xi, \pi(h)\xi\big) \quad \text{при всех} \quad m, n > M(g, h).$$

Отсюда вытекает

Лемма 8. *Для всех $k \in \mathbb{N}$ существуют слабые пределы*

$$\mathcal{O}_k = \underset{n \to \infty}{w\text{-}\lim}\, \pi((k\, n)),$$

удовлетворяющие соотношениям $\mathcal{O}_k \mathcal{O}_l = \mathcal{O}_l \mathcal{O}_k$ и $\pi(s)\mathcal{O}_k \pi(s^{-1}) = \mathcal{O}_{s(k)}$.

Лемма 9. *Пусть $\operatorname{Ker} \mathcal{O}_k$ – ядро оператора $\mathcal{O}_k$, а $\mathcal{H}_{\lambda\alpha\beta}^{\widetilde{\mathbf{e}}} = \{v \in \mathcal{H}_{\lambda\alpha\beta} \colon v(x) = 0$ при $x \neq \widetilde{\mathbf{e}}\}$. Если $\sum \alpha_k + \sum \beta_k = 1$, то $\mathcal{H}_{\lambda\alpha\beta}^{\widetilde{\mathbf{e}}} = \bigcap_{k=1}^n \operatorname{Ker} \mathcal{O}_k$.*

Доказательство. Тот факт, что $\mathcal{H}_{\lambda\alpha\beta}^{\widetilde{\mathbf{e}}} \subset \bigcap_{k=1}^n \operatorname{Ker} \mathcal{O}_k$, легко вытекает из леммы 8 и (31).

Любой вектор $\eta \in \bigcap_{k=1}^n \operatorname{Ker} \mathcal{O}_k$ записывается в виде

$$\eta = \sum_{x \in X} \pi(\mathfrak{s}(x)^{-1})\eta_x, \quad \text{где} \quad \eta_x \in \mathcal{H}_{\lambda\alpha\beta}^{\widetilde{\mathbf{e}}}.$$

Если $\eta \notin \mathcal{H}^{\widetilde{\mathrm{e}}}_{\lambda\alpha\beta}$, то $\eta_x \neq 0$ для $x = \widetilde{s}$, где $s \notin \mathfrak{S}^n_{\mathbb{N}}$. Так как $\mathcal{H}^{\widetilde{\mathrm{e}}}_{\lambda\alpha\beta} \subset \bigcap_{k=1}^n \operatorname{Ker} \mathcal{O}_k$, то при $\eta \in \bigcap_{k=1}^n \operatorname{Ker} \mathcal{O}_k$ и $k \leqslant n$, опираясь на лемму 8, имеем

$$0 = \mathcal{O}_k \eta = \sum_{x \in X \colon \mathfrak{s}(x)(k) > n} \pi(\mathfrak{s}(x)^{-1}) \mathcal{O}_{\mathfrak{s}(x)(k)} \eta_x.$$

Следовательно, $\mathcal{O}_{\mathfrak{s}(\widetilde{s})(k)} \eta_{\widetilde{s}} = 0$ для всех $k \leqslant n$ таких, что $\mathfrak{s}(x)(k) > n$. Отсюда, учитывая тот факт, что $s \notin \mathfrak{S}^n_{\mathbb{N}}$, находим $N > n$, для которого $\mathcal{O}_N \eta_{\widetilde{s}} = 0$. Но согласно следствию 4 при условии $\sum \alpha_k + \sum \beta_k = 1$ в подпространстве $\mathcal{H}^{\widetilde{\mathrm{e}}}_{\lambda\alpha\beta}$ нет векторов, принадлежащих $\operatorname{Ker} \mathcal{O}_N$.

9.2. Доказательство теоремы 6. Если $\pi = \operatorname{Ind}^{\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}}_{\mathfrak{S}^n_{\mathbb{N}}} T_\lambda \otimes \pi_{\alpha\beta}$ и $\sum \alpha_k + \sum \beta_k = 1$, то в силу леммы 9 проектор P на подпространство $\mathcal{H}^{\widetilde{\mathrm{e}}}_{\lambda\alpha\beta}$ лежит в $\pi(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})''$. Так как $\sum_{x \in X} \pi(\mathfrak{s}(x)) P \pi(\mathfrak{s}(x)^{-1}) = \mathrm{I}$, то центральный носитель проектора P равен I. Следовательно, отображение $\pi(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})' \ni a' \mapsto Pa'P \in P\pi(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})'P$ является изоморфизмом. Но $P\pi(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})'P$ в силу теоремы 5 совпадает с алгеброй $((T_\lambda \otimes \pi_{\alpha\beta})(\mathfrak{S}^n_{\mathbb{N}}))'$, которая является фактором типа II. Поэтому $\pi(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})''$ – фактор типа II. Так как при $n \geqslant 1$ проекторы $\pi(\mathfrak{s}(x))^{-1} P \pi(\mathfrak{s}(x))$, $x \in X$, попарно ортогональны, то $\pi(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})''$ – фактор типа II_∞ или I_∞. Тип I получается лишь при условии, когда единственный параметр Тома α_1 или β_1 равен единице.

Заметим, что стабильность представления π вытекает из того свойства, что вектор ξ из п. 9.1 задает стабильное состояние на $\mathbf{C}^\star(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})$.

Пусть d – центральная глубина представления π. Тогда

$$(\pi(s)\xi, \xi) = (\pi(tst^{-1})\xi, \xi)$$

при всех $s \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ и $t \in \mathfrak{S}^n_{\mathbb{N}}$. Следовательно,

$$d \leqslant n. \tag{32}$$

Предположим, что $d < n$. По теореме 5 $\pi = \operatorname{Ind}^{\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}}_{\mathfrak{S}^d_{\mathbb{N}}} T_\mu \otimes \pi_{\alpha'\beta'}$, где $\mu \vdash n$. В силу предложения 4 $\alpha' = \alpha$ и $\beta' = \beta$. Согласно лемме 9 $E = \bigcap_{k=1}^d \operatorname{Ker} \mathcal{O}_k \geqslant P$ и алгебра $E\pi(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})''E$ является фактором типа II_1 или $\mathrm{I}_{\dim\mu}$, где $\dim\mu$ – размерность представления T_μ. Но множество $\{\pi(s)P\pi(s^{-1})\}_{s \in \mathfrak{S}^d_{\mathbb{N}}} \subset E\pi(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})''E$ содержит бесконечный набор попарно ортогональных ненулевых проекторов. По этой причине $E\pi(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})''E$ – фактор типа II_∞ или I_∞. Следовательно, $d = n$.

Перейдем к доказательству части теоремы 6, относящейся к случаю, когда $\sum \alpha_k + \sum \beta_k < 1$. Вначале заметим, что представление $\pi = \operatorname{Ind}^{\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}}_{\mathfrak{S}^n_{\mathbb{N}}} T_\lambda \otimes \pi_{\alpha\beta}$ квазиэквивалентно представлению группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, построенному по положительно определенной функции ω, задаваемой формулой

$$\omega(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{\dim \lambda} \chi_\lambda(s_1) \chi_{\alpha\beta}(s_2), & \text{если} \ \ s = s_1 s_2, \ \text{где} \ s_1 \in \mathfrak{S}_n, \ s_2 \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N} \setminus [1,n]}, \\ 0, & \text{если} \ \ s \notin \mathfrak{S}^n_{\mathbb{N}}. \end{cases}$$

Пусть $\pi_{\alpha\beta}$ – факторпредставление группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ типа II_1, построенное по характеру Тома $\chi_{\alpha\beta}$, а tr – нормированный нормальный след на факторе фон Неймана

$\pi_{\alpha\beta}(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})''$, порожденном операторами $\pi_{\alpha\beta}(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})$. Для доказательства того факта, что представление π имеет тип II_1, достаточно найти нормальный функционал φ на $\pi_{\alpha\beta}(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})''$ такой, что

$$\varphi(\pi_{\alpha\beta}(s)) = \omega(s) \quad \text{для всех} \quad s \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}. \tag{33}$$

Построение φ основано на свойствах спектрального проектора $E_k(0)$ оператора

$$\mathcal{O}_k = \operatorname*{w-lim}_{n\to\infty} \pi_{\alpha\beta}((k\,n)),$$

соответствующего нулевой точке спектра. Согласно лемме 3

$$\operatorname{tr}(E_k(0)) = 1 - \sum \alpha_i - \sum \beta_i = \gamma > 0.$$

Положим

$$\varphi(a) = \frac{1}{\gamma^n \dim\lambda} \cdot \operatorname{tr}\biggl(a\biggl(\prod_{k=1}^n E_k(0) \sum_{g\in\mathfrak{S}_n} \overline{\chi}_\lambda(g)\pi_{\alpha\beta}(g)\biggr)\biggr), \qquad a \in \pi_{\alpha\beta}(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})''.$$

Тогда при $s \in \mathfrak{S}_n$, $t \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}\setminus[1,n]}$

$$\begin{aligned} \varphi(\pi_{\alpha\beta}(st)) &= \frac{1}{\gamma^n \dim\lambda} \cdot \operatorname{tr}\biggl(\prod_{k=1}^n E_k(0) \sum_{g\in\mathfrak{S}_n} \overline{\chi}_\lambda(g)\pi_{\alpha\beta}(sg)\biggr) \operatorname{tr}(\pi_{\alpha\beta}(t)) \\ &= \varphi(\pi_{\alpha\beta}(st)) = \frac{1}{\gamma^n \dim\lambda} \cdot \operatorname{tr}\biggl(\prod_{k=1}^n E_k(0) \sum_{g\in\mathfrak{S}_n} \overline{\chi}_\lambda(s^{-1}g)\pi_{\alpha\beta}(g)\biggr) \operatorname{tr}(\pi_{\alpha\beta}(t)). \end{aligned} \tag{34}$$

Но в силу [13, лемма 2]

$$\gamma^{-n} \operatorname{tr}\biggl(\pi_{\alpha\beta}(g) \prod_{k=1}^n E_k(0)\biggr) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad g \notin \mathfrak{S}_{\mathbb{N}\setminus[1,n]}, \\ \chi_{\alpha\beta}(g), & \text{если} \quad g \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}\setminus[1,n]}. \end{cases}$$

Отсюда для $s \in \mathfrak{S}_n$, $t \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}\setminus[1,n]}$, опираясь на (34), имеем

$$\varphi(\pi_{\alpha\beta}(st)) = \frac{1}{\dim\lambda} \cdot \chi_\lambda(s)\chi_{\alpha\beta}(t)$$

и $\varphi(\pi_{\alpha\beta}(g)) = 0$ при $g \notin \mathfrak{S}_n\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}^n$. Соотношение (33) доказано.

9.3. Доказательство теоремы 7. Пусть $\pi = \operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}^n}^{\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}} T_\lambda \otimes \pi_{\alpha\beta}$ и $\widetilde{\pi} = \operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}^{\widetilde{n}}}^{\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}} T_{\widetilde{\lambda}} \otimes \pi_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}}$. Предположим, что π квазиэквивалентно $\widetilde{\pi}$. Так как центральная глубина является инвариантом квазиэквивалентности, то по теореме 6 получаем, что $\widetilde{n} = n$.

Пусть θ – изоморфизм $\pi(\mathfrak{S}_\infty)''$ на $\widetilde{\pi}(\mathfrak{S}_\infty)''$, сплетающий π и $\widetilde{\pi}$:

$$\theta(\pi(s)) = \widetilde{\pi}(s) \quad \text{для всех} \quad s \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}.$$

По построению π и $\widetilde{\pi}$ являются стабильными факторпредставлениями. Из их квазиэквивалентности и предложения 4 вытекает равенство асимптотических характеров $\chi^{\pi a}$ и $\chi^{\widetilde{\pi} a}$. Следовательно, $\alpha_i = \widetilde{\alpha}_i$, $\beta_i = \widetilde{\beta}_i$.

Следуя лемме 8, введем операторы

$$\mathcal{O}_k = \operatorname*{w\text{-}lim}_{n\to\infty} \pi((k\,n)), \qquad \widetilde{\mathcal{O}}_k = \operatorname*{w\text{-}lim}_{n\to\infty} \widetilde{\pi}((k\,n)).$$

Обозначим через E и $\widetilde{E}$ ортопроекторы на пересечение ядер семейств операторов $\mathcal{O}_1,\dots,\mathcal{O}_n$ и $\widetilde{\mathcal{O}}_1,\dots,\widetilde{\mathcal{O}}_n$ соответственно. Для любых $s_1\in\mathfrak{S}_n$ и $s_2\in\mathfrak{S}_{\mathbb{N}\setminus n}$, опираясь на лемму 9, имеем

$$\begin{aligned}\theta(E\pi(s_1s_2)E) &= \theta(T_\lambda(s_1)\otimes\pi_{\alpha\beta}(s_2)) = \theta(E)\widetilde{\pi}(s_1s_2)\theta(E)\\ &= \widetilde{E}\widetilde{\pi}(s_1s_2)\widetilde{E} = T_{\widetilde{\lambda}}(s_1)\otimes\pi_{\alpha\beta}(s_2).\end{aligned}$$

Следовательно, неприводимые представления T_λ и $T_{\widetilde{\lambda}}$ группы $\mathfrak{S}_n$ квазиэквивалентны. По этой причине $\lambda=\widetilde{\lambda}$.

9.4. Доказательство теоремы 8. Если $n=0$, то $\pi(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})''$ является фактором типа II_1. Из условий теоремы вытекает, что $f(s)=\operatorname{tr}(\pi(s))$ для всех $s\in\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, где tr – нормированный нормальный след на $\pi(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})''$. Следовательно, в этом случае утверждение теоремы 8 вытекает из [11].

При $n\geqslant 1$, опираясь на теоремы 5 и 6, мы можем считать, что $\pi=\operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}^n}^{\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}} T_\lambda\otimes\pi_{\alpha\beta}$, а $\sum\alpha_i+\sum\beta_i=1$.

По функции f из теоремы 8 определим на комплексной линейной оболочке множества $\pi(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})$ функционал φ_f по формуле

$$\varphi_f\Bigl(\sum c_k\pi(s_k)\Bigr)=\sum c_k f(s_k), \qquad c_k\in\mathbb{C}, \quad s_k\in\mathfrak{S}_k.$$

Ввиду условия (i) φ_f расширяется по непрерывности относительно сильной операторной топологии до нормального состояния на $\pi(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})''$. Носитель E состояния φ_f удовлетворяет соотношениям (6) из теоремы 5. Используя эти соотношения и определение операторов $\mathcal{O}_k$ (см. лемму 8), легко вывести, что при $s\notin\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}^n$

$$\varphi_f(\pi(s))=f(s)=0. \tag{35}$$

По той же причине алгебра $(E\pi(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}^n)E)''$ есть конечный фактор с нормальным нормированным следом tr. Отсюда, опираясь на условия (ii), (iii), при любых $s_1\in\mathfrak{S}_n$ и $s_2\in\mathfrak{S}_{\mathbb{N}\setminus[1,n]}$ имеем

$$f(s_1s_2)=\varphi_f(E\pi(s_1s_2)E)=\operatorname{tr}(E\pi(s_1s_2)E)=\operatorname{tr}(E\pi(s_1)E)\operatorname{tr}(E\pi(s_2)E).$$

Из этого соотношения и из предложения 4 вытекает, что (см. (5))

$$\operatorname{tr}(E\pi(s_2)E)=\chi_{\alpha\beta}(s_2). \tag{36}$$

По той же причине $\operatorname{tr}(E\pi(s_1)E)=\chi_\lambda(s_1)/\dim\lambda$, где χ_λ – характер некоторого неприводимого представления группы $\mathfrak{S}_n$.

9.5. Интерпретация полуконечного следа. В этом пункте рассматриваются стабильные факторпредставления с ненулевой центральной глубиной, для которых сумма параметров Тома (α,β) равна единице. В силу теоремы 6 они имеют тип II_∞. Если наборы $\alpha=(\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\dots\geqslant\alpha_k)$ и

$\beta = (\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \dots \geqslant \beta_l)$ конечны, т. е. $k, l \in \mathbb{N} \cup 0$, то нормальный след на соответствующем факторе фон Неймана можно интерпретировать как полуконечную меру на пространстве путей графа Юнга (см. предложение 3). Построение такой меры возможно ввиду того, что представления $\Pi_{\lambda\alpha\beta}$ из теоремы 2 удовлетворяют следующему условию: для достаточно большого $n \in \mathbb{N}$ в конечномерной подалгебре $\Pi_{\lambda\alpha\beta}(\mathfrak{S}_n)''$ из II_∞-фактора $\Pi_{\lambda\alpha\beta}(\mathfrak{S}_\mathbb{N})''$ существуют проекторы с ненулевым конечным следом. Если хотя бы один из наборов параметров α или β бесконечен, то имеет место следующее утверждение.

Предложение 10. *Пусть* π, $n \geqslant 1$, $\lambda \vdash n$, T_λ, $\pi_{\alpha\beta}$ *– такие же, как в теореме* 6, *и* $\pi = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\mathbb{N}^n}^{\mathfrak{S}_\mathbb{N}} T_\lambda \otimes \pi_{\alpha\beta}$. *Обозначим через* tr *полуконечный след на* II_∞*-факторе* $\pi(\mathfrak{S}_\mathbb{N})''$. *Если хотя бы один из наборов* $\alpha = (\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \dots \geqslant \alpha_k)$, $\beta = (\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \dots \geqslant \beta_l)$ *бесконечен, то для любого* $m \in \mathbb{N}$ *и произвольного ненулевого проектора* $p \in \mathbf{C}^\star(\mathfrak{S}_m)$ *след* $\mathrm{tr}(\pi(p)) = \infty$. *В частности, это свойство не позволяет интерпретировать след* tr *как меру на пространстве путей графа Юнга.*

Доказательство. Обозначим через E ортогональный проектор на подпространство $\mathcal{H}_{\lambda\alpha\beta}^{\tilde{\mathrm{e}}}$, введенное в условии леммы 9. По утверждению этой же леммы $E \in \pi(\mathfrak{S}_\mathbb{N})''$. Введем счетное подмножество $\mathbb{M} \subset \mathfrak{S}_\mathbb{N}$ со свойством $s_1\mathfrak{S}_\mathbb{N}^n \cap s_2\mathfrak{S}_\mathbb{N}^n = \varnothing$ для всех $s_1 \neq s_2$ из $\mathbb{M}$ и $\bigcup_{s\in\mathbb{M}} s\mathfrak{S}_\mathbb{N}^n = \mathfrak{S}_\mathbb{N}$. Положим $p_s = \pi(s^{-1}) \cdot \pi(p) \cdot \pi(s)$ и $\mathbb{P} = \{s \in \mathbb{M}\colon p_s \in \pi(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}\setminus[1,n]})''\}$. Тогда $\mathbb{P}$ – счетное множество и $\mathrm{tr}(p_sE) = \mathrm{tr}(p_tE) = \kappa$ для всех $s, t \in \mathbb{P}$. Но в силу теоремы 6

$$\mathrm{tr}(\pi(p)) = \sum_{s\in\mathbb{M}} \mathrm{tr}\bigl(\pi(p) \cdot \pi(s)E\pi(s^{-1})\bigr) \geqslant \sum_{s\in\mathbb{P}} \mathrm{tr}(p_s \cdot E) = \#\mathbb{P} \cdot \kappa.$$

Используя это соотношение, схему ветвления представлений групп $\mathfrak{S}_l$, $l \in \mathbb{N}$, и вид аппроксимации характеров Тома характерами конечных групп подстановок (см. [3]), легко увидеть, что в случае бесконечного набора параметров Тома число $\kappa > 0$. Следовательно, $\mathrm{tr}(\pi(p)) = \infty$.

На самом деле неудобства, связанные с предложением 10, можно обойти, используя следующее наблюдение.

Пусть π – стабильное представление полуконечного типа. В силу предложения 6 $\pi = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\mathbb{N}^n}^{\mathfrak{S}_\mathbb{N}} T_\lambda \otimes \pi_{\alpha\beta}$, где $n \geqslant 1$. Используя леммы 8 и 9, получаем, что операторы $\mathcal{O}_k \in \pi(\mathfrak{S}_\mathbb{N})''$, $k \in \mathbb{N}$, построенные по представлению π согласно лемме 8, удовлетворяют условиям:

$$\begin{gathered} \mathcal{O}_k \neq 0 \text{ и } \pi(s)\mathcal{O}_k\pi(s^{-1}) = \mathcal{O}_{s(k)} \quad \text{для всех} \ \ s \in \mathfrak{S}_\mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}, \\ \mathcal{H}_{\lambda\alpha\beta}^{\tilde{\mathrm{e}}} = \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}\,\mathcal{O}_k \neq 0. \end{gathered} \tag{37}$$

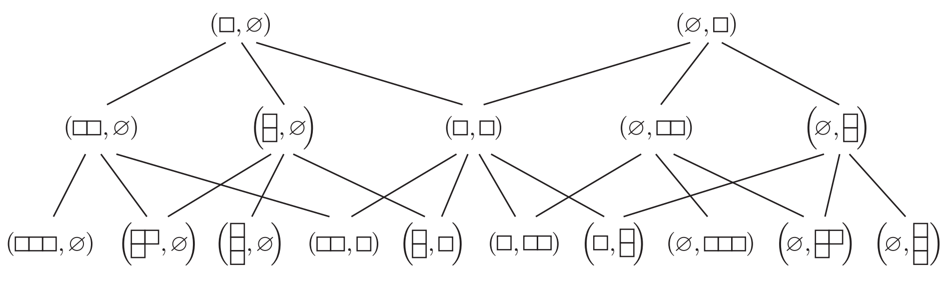
С их помощью представление π расширяется до представления $\widetilde{\pi}$ группы $B_\mathbb{N}$, которая является полупрямым произведением $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$ на группу $\mathbb{Z}_2^\mathbb{N} = \bigoplus_{i=1}^\infty \mathbb{Z}_2(i)$, где $\mathbb{Z}_2(i)$ – копия аддитивной группы $\mathbb{Z}_2$ и $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$ действует на $\mathbb{Z}_2^\mathbb{N}$ перестановками координат. Группу $\mathbb{Z}_2^\mathbb{N}$ мы отождествляем с подгруппой в $B_\mathbb{N}$, а ее элементы записываем в виде последовательностей из $\{0, 1\}$. Обозначим через $\mathfrak{K}_k$ ортогональный проектор на $\mathrm{Ker}\,\mathcal{O}_k$ и положим $U_k = I - 2\mathfrak{K}_k$. Тогда $\widetilde{\pi}$, определенное согласно соотношениям

$$\widetilde{\pi}(s) = \pi(s), \qquad s \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}, \quad \widetilde{\pi}((z_1, z_2, \dots, z_j, \dots)) = U_k^{z_k}, \tag{38}$$

в силу (37) является унитарным представлением группы $B_{\mathbb{N}}$ и

$$\widetilde{\pi}(B_{\mathbb{N}})'' = \pi(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}})''. \tag{39}$$

Обозначим через B_m подгруппу в $B_{\mathbb{N}}$, порожденную $\mathfrak{S}_m$ и $\mathbb{Z}_2^m = \{(z_1, z_2, \dots, z_j, \dots) \in \mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}} : z_j = 0$ для всех $j > m\}$. Кратность вхождения произвольного неприводимого представления π_m группы B_m в любое неприводимое представление π_{m+1} не более единицы. Неприводимые представления группы B_m параметризуются упорядоченными парами диаграмм Юнга (ν_m, μ_m), для которых $|\nu_m| + |\mu_m| = m$. Представление $\pi_{(\nu_m, \mu_m)}$ тогда и только тогда содержится в $\pi_{(\nu_{m+1}, \mu_{m+1})}$, когда (ν_{m+1}, μ_{m+1}) получается из (ν_m, μ_m) добавлением к одной из диаграмм единственной клетки. Соответствующий граф ветвления имеет следующий вид:



Пространство $\mathcal{H}$, в котором действуют представления π и $\widetilde{\pi}$, есть ортогональная сумма подпространств $\mathcal{H}_m^k$, инвариантных относительно операторов $\widetilde{\pi}(B_m)$. Каждое $\mathcal{H}_m^k$ порождается всеми собственными подпространствами $\mathcal{H}_m^k(\delta)$, где $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_m)$ – последовательность из нулей и единиц длины m операторов $\widetilde{\pi}(\mathbb{Z}_2^m)$. А именно, если $z = (z_1, \dots, z_m, 0, 0, \dots) \in \mathbb{Z}_2^m$, то

$$\mathcal{H}_m^k(\delta) = \biggl\{\eta \in \mathcal{H} : \widetilde{\pi}(z)\eta = \prod_j (-1)^{\delta_j \cdot z_j} \eta \text{ и } \sum \delta_j = k\biggr\}. \tag{40}$$

Не ограничивая общности, мы будем далее предполагать, что компонента сужения представления $\widetilde{\pi}$ на подгруппу B_m, которая кратна неприводимому представлению с параметрами (ν, μ), $|\nu| + |\mu| = m$, лежит в подпространстве $\mathcal{H}_m^{|\nu|}$. При этом условии, используя определение $\widetilde{\pi}$ (см. (38), (39)) и леммы 8 и 9, получаем следующие утверждения.

Предложение 11. *Пусть $m \geqslant n$ и $P_{(\nu,\mu)}$ – проектор из центра алгебры $\widetilde{\pi}(B_m)''$, соответствующий факторпредставлению, кратному неприводимому представлению с параметрами (ν, μ). Тогда имеют место следующие свойства*:

- *если $|\nu| > |\lambda| = n$, то $\operatorname{tr}(P_{(\nu,\mu)}) = 0$;*
- *$\operatorname{tr}(P_{(\nu,\mu)}) < \infty$ при $|\nu| = n$ и всех μ;*

• *существуют диаграммы* μ, *для которых*

$$0 < \mathrm{tr}(P_{(\lambda,\mu)}) < \infty.$$

Предложение 12. *Пусть* $\mathcal{C}_m$ *– центр алгебры* $\widetilde{\pi}(B_m)''$ *и* $\mathcal{C}$ *– абелева алгебра фон Неймана, порожденная* $\{\mathcal{C}_m\}_{m=1}^{\infty}$. *Тогда* $\mathcal{C}$ *– картановская подалгебра в* $\widetilde{\pi}(B_{\mathbb{N}})''$. *А именно,*

• $\mathcal{C}$ *– максимальная абелева подалгебра фактора* $\widetilde{\pi}(B_{\mathbb{N}})''$ *и существует точное нормальное условное ожидание* $\mathcal{E}$ *из* $\widetilde{\pi}(B_{\mathbb{N}})''$ *на* $\mathcal{C}$: $\mathcal{E}(c_1bc_2) = c_1\mathcal{E}(b)c_2$ *для всех* $b \in \widetilde{\pi}(B_{\mathbb{N}})''$ *и* $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$;

• *сужение* tr *на* $\mathcal{C}$ *является полуконечным следом на* $\mathcal{C}$ *и* $\mathrm{tr}(b) = \mathrm{tr}(\mathcal{E}(b))$ *для всех* $b \in \widetilde{\pi}(B_{\mathbb{N}})''$;

• *в* $\widetilde{\pi}(B_{\mathbb{N}})''$ *существует семейство* $\mathcal{U}$ *унитарных операторов со свойством* $U\mathcal{C}U^* = \mathcal{C}$ *для всех* $U \in \mathcal{U}$, *порождающих вместе с* $\mathcal{C}$ *фактор* $\widetilde{\pi}(B_{\mathbb{N}})''$.

Список литературы

1. Г. И. Ольшанский, “Унитарные представления (G, K)-пар, связанных с бесконечной симметрической группой $S(\infty)$”, *Алгебра и анализ*, **1**:4 (1989), 178–209; англ. пер.: G. I. Olshanskii, “Unitary representations of (G, K)-pairs connected with the infinite symmetric group $S(\infty)$”, *Leningrad Math. J.*, **1**:4 (1990), 983–1014.
2. А. Ю. Окуньков, “Теорема Тома и представления бесконечной бисимметрической группы”, *Функц. анализ и его прил.*, **28**:2 (1994), 31–40; англ. пер.: A. Yu. Okounkov, “Thoma's theorem and representations of the infinite bisymmetric group”, *Funct. Anal. Appl.*, **28**:2 (1994), 100–107.
3. А. М. Вершик, С. В. Керов, “Асимптотическая теория характеров симметрической группы”, *Функц. анализ и его прил.*, **15**:4 (1981), 15–27; англ. пер.: A. M. Vershik, S. V. Kerov, “Asymtotic theory of characters of the symmetric group”, *Funct. Anal. Appl.*, **15**:4 (1981), 246–255.
4. А. М. Вершик, С. В. Керов, “Характеры и факторпредставления бесконечной симметрической группы”, *Докл. АН СССР*, **257**:5 (1981), 1037–1040; англ. пер.: A. M. Vershik, S. V. Kerov, “Characters and factor representations of the infinite symmetric group”, *Soviet Math. Dokl.*, **23**:2 (1981), 389–392.
5. А. М. Вершик, “Несвободные действия счетных групп и их характеры”, *Теория представлений, динамические системы, комбинаторные методы. XVIII*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **378**, ПОМИ, СПб., 2010, 5–16; англ. пер.: A. M. Vershik, “Nonfree actions of countable groups and their characters”, *J. Math. Sci.* (*N. Y.*), **174**:1 (2011), 1–6.
6. A. M. Vershik, “Totally nonfree actions and the infinite symmetric group”, *Mosc. Math. J.*, **12**:1 (2012), 193–212.
7. А. М. Вершик, “Оснащенные градуированные графы, проективные пределы симплексов и их границы”, *Теория представлений, динамические системы, комбинаторные методы. XXIV*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **432**, ПОМИ, СПб., 2015, 83–104; англ. пер.: A. M. Vershik, “Equipped graded graphs, projective limits of simplices, and their boundaries”, *J. Math. Sci.* (*N. Y.*), **209**:6 (2015), 860–873.
8. А. Г. Курош, *Теория групп*, 3-е изд., Наука, М., 1967, 648 с.; нем. пер.: A. G. Kurosch, *Gruppentheorie*, v. I, 2., überarbeitete und erweiterte Aufl., Math. Lehrbücher und Monogr., **III/I**, Akademie-Verlag, Berlin, 1970, xxii+360 pp.; v. II, Math. Lehrbücher und Monogr., **III/II**, 1972, xiv+358 pp.

9. G. I. Olshansky, “Unitary representations of the infinite symmetric group: a semigroup approach”, *Representations of Lie groups and Lie algebras* (Budapest, 1971), Acad. Kiadó, Budapest, 1985, 181–197.
10. G. I. Ol’shanskii, “On semigroups related to infinite-dimensional groups”, *Topics in representation theory*, Adv. Soviet Math., **2**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, 67–101.
11. E. Thoma, “Die unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen symmetrischen Gruppe”, *Math. Z.*, **85**:1 (1964), 40–61.
12. A. Lieberman, “The structure of certain unitary representations of infinite symmetric groups”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **164** (1972), 189–198.
13. А. Ю. Окуньков, “О представлениях бесконечной симметрической группы”, *Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы. II*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **240**, ПОМИ, СПб., 1997, 166–228; англ. пер.: A. Yu. Okounkov, “On representations of the infinite symmetric group”, *J. Math. Sci.* (*New York*), **96**:5 (1999), 3550–3589; arXiv: math/9803037.
14. A. M. Vershik, S. V. Kerov, “The Grothendieck group of infinite symmetric group and symmetric functions (with the elements of the theory of K_0-functor of AF-algebras)”, *Representation of Lie groups and related topics*, Adv. Stud. Contemp. Math., **7**, Gordon and Breach, New York, 1990, 39–117.
15. Ю. А. Неретин, “Одно замечание о представлениях бесконечных симметрических групп”, *Теория представлений, динамические системы, комбинаторные методы. XXI*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **403**, ПОМИ, СПб., 2012, 103–109; англ. пер.: Yu. A. Neretin, “A remark on representations of infinite symmetric groups”, *J. Math. Sci.* (*New York*), **190**:3 (2013), 464–467.
16. Н. И. Нессонов, “О реализациях представлений бесконечной симметрической группы”, *Теория представлений, динамические системы, комбинаторные методы. XXI*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **403**, ПОМИ, СПб., 2012, 110–117; англ. пер.: N. I. Nessonov, “On realizations of representations of the infinite symmetric group”, *J. Math. Sci.* (*New York*), **190**:3 (2013), 468–471.
17. M. Takesaki, *Theory of operator algebras*, v. II, Encyclopaedia Math. Sci., **125**, Springer-Verlag, Berlin, 2003, xxii+518 pp.
18. Ж. Диксмье, *$C^\star$-алгебры и их представления*, Наука, М., 1974, 399 с.; пер. с фр.: J. Dixmier, *Les $C^\star$-algèbres et leurs représentations*, 2ème éd., Cahiers Scientifiques, **XXIX**, Gauthier-Villars, Paris, 1969, xv+390 pp.

Анатолий Моисеевич Вершик
(Anatolii M. Vershik)
Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук;
Санкт-Петербургский государственный университет;
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича Российской академии наук,
г. Москва
E-mail: avershik@gmail.com

Поступило в редакцию
15.05.2015
09.06.2015

Николай Иванович Нессонов
(Nikolai I. Nessonov)
Физико-технический институт низких температур
им. Б. И. Веркина НАН Украины, г. Харьков
E-mail: n.nessonov@gmail.com