А. М. Вершик

Информация, энтропия, динамика

Статья состоит из двух частей. В первой части мы напоминаем историю открытия А. Н. Колмогоровым *энтропии динамических систем* и подчеркиваем исключительное значение этого открытия для теории динамических систем, ее приложений и для математики в целом. При этом мы ни в коем случае не претендуем ни на полноту исторических сведений, ни на обзор, ни даже на перечисление значительных научных достижений в этой и смежных областях математики за последующий пятидесятилетний период[1].

Во второй части статьи — Дополнении, более подробное изложение которого будет опубликовано в журнале «Markov Processes and related fields» (2010), — мы приводим несколько точных формулировок, связанных с работой А. Н. Колмогорова, и затем определяем деформацию колмогоровской энтропии, называемую далее *масштабированной энтропией*, которая является более мощным метрическим инвариантом, чем обычная энтропия. Для ее определения мы привлекаем понятие эпсилон-энтропии метрики в пространстве с мерой, также предложенное А. Н. Колмогоровым несколько ранее. Традиционную для энтропийной теории технику измеримых разбиений мы предлагаем заменить техникой итераций метрик или полуметрик; это подводит нас к главной идее дополнения — описанию естественного контекста, в котором следовало бы рассматривать энтропию действия групп с инвариантной мерой, ее обобщения и более общие вопросы эргодической теории. А именно, мы предлагаем некоторую программу исследований, называемую *асимптотической динамикой метрик в пространстве с мерой*, в которой, например, обобщенная энтропия истолковывается как асимптотическая хаусдорфова размерность последовательности метрических пространств. Предположительно, и проблема метрического изоморфизма динамических систем в целом получает новое геометрическое истолкование.

Шенноновская теория информации и колмогоровская энтропия

Точный научный смысл и прикладное значение слова «информация» появились и вошли в обиход науки лишь в середине XX века.

Автор благодарит за поддержку РФФИ (грант 08-01-00379) и НШ-2460.2008.1112, а также фонд Александра фон Гумбольдта (Германия) и институт им. Макса Планка (Бонн) за прекрасные возможности для научной работы.

[1] Мы приводим минимум литературных ссылок, ограничиваясь лишь самыми необходимыми; причина этого в том, что в первой части речь в основном идет об очень известных работах, а тематика Дополнения — новая, и работ по ней почти нет.

В наши дни это понятие ассоциируется с огромным кругом разделов науки и техники и областей знания: от математики и теории передачи связи до лингвистики и философии. Под научно-технической революцией, произошедшей во второй половине XX века, точнее в первые послевоенные десятилетия, имеют в виду прежде всего появление вычислительных машин и других технических средств, которые позволили реализовать идеи кибернетики и теории информации. Среди первооткрывателей этих идей — Клод Шеннон (1916—2001), Джон фон Нейман (1903—1957), Норберт Винер (1894—1964). Все трое — математики по образованию и складу мышления, сделавшие не только выдающиеся чисто математические открытия, но и внесшие уникальный вклад в науку и технику в целом, повлекший за собой без преувеличения радикальные изменения в жизни всего человечества. Их роли в самой математике, конечно, очень различны.

Далее я буду говорить, главным образом, об обратном влиянии идей теории информации на саму математику, из недр которой эта теория по сути и вышла, и о тех замечательных открытиях, которые последовали за этим.

Математическое понятие информации возникло еще в двадцатых годах (Р. Хартли, 1928), но в те годы оно не стало предметом особого внимания. Лишь К. Шеннон — математик, работавший в области теории связи, — превратил его в конце 1940-х гг. в основной инструмент теории и основал тем самым современную теорию информации. А. Н. Колмогоров писал несколько позже [5], что в работах Шеннона, как и во всяком крупном научном открытии, был элемент неожиданности, отличающий действительные открытия от постепенного накопления научных фактов. Здесь этот элемент неожиданности А. Н. Колмогоров (1903—1987) видел в том, что адекватным и продуктивным эквивалентом столь сложного и трудно определимого предмета, каковым является информация, оказалась *скалярная величина*: количество информации об одном случайном (или не полностью заданном) объекте относительно другого такого объекта, или мера неопределенности при наличии неполной информации, или энтропия. Оказалось, количественные принципы Шеннона универсальны и применимы к передаче и кодированию любых видов информации. Замечание Колмогорова очень точно отражает то впечатление, которое тогда создавалось при первом знакомстве с предметом: было удивительно, что только одно число может адекватно характеризовать взаимоотношения изучаемых объектов, возникающих в совершенно различных ситуациях, не связанных прямо с информацией в ее неформальном понимании. Здесь трудно удержаться от полуфилософских спекуляций по поводу гносеологической роли числа вообще и, следовательно, самой математики: число, измеряющее энтропию или информацию, возникает здесь совсем в ином обличии, нежели в обычной практике.

Следует сразу сказать, что понятие энтропии задолго до описываемых событий появилось в физике, его ввел Р. Клаузиус (1822—1888), а Л. Больцман (1844—1906), который установил, по словам М. Планка (1858—1947), логарифмическую связь между энтропией и вероятностью, сделал его рабочим инструментом в физике. В дальнейшем в руках их последователей это понятие стало одним из главных в статистической физике. Позже было сделано немало попыток связать его с теорией Шеннона, но, насколько мне известно, какая бы то ни было точно формулируемая концепция так и не появилась, и автор не склонен слишком тесно связывать эти разные понятия энтропии.

На понятиях и принципах теории информации основана вся современная теория передачи сообщений по каналам связи, кодирование сообщений и т. п. Сам Шеннон прекрасно понимал математический контекст своей теории, хотя и излагал основные, ставшие классическими работы на языке, понятном для прикладников и инженеров, оставляя математические детали и ряд точных понятий в приложениях и специальных статьях. Когда эти работы (с запозданием) стали известны в СССР, то при переводе, также рассчитанном на прикладников, эти важные математические детали были опущены. Поэтому первым советским авторам математических работ по теории информации (А. Я. Хинчин (1894—1959), А. Н. Колмогоров, И. М. Гельфанд, А. М. Яглом (1921—2007) и др.) не были известны полностью все обоснования результатов Шеннона, и они были отчасти ими переоткрыты. Любопытно, что колоссальный интерес к приложениям теории информации в 1950—60-х на первых порах, возможно, отвлекал от того, какие возможности таятся в ее идеях для самой математики. Именно осмысление этих возможностей и было заслугой в первую очередь А. Н. Колмогорова.

Первые работы Шеннона вышли в конце 1940-х годов [1], а первые математические публикации в СССР на эту тему[1] появились лишь

[1] Современному читателю полезно обратить внимание на название первого сборника (см. [1]), в котором пионерские труды Шеннона по теории информации были впервые напечатаны на русском языке, и на измененное название основной статьи Шеннона в нем. Такой маскарад был необходим: на терминах «кибернетика», «теория информация» в тогдашней советской литературе и пропаганде до конца 1950-х годов стояло клеймо «наука мракобесов» или, в лучшем случае, «буржуазные измышления». Поэтому, например, публикации в «Успехах» статей А. Я. Хинчина о теории информа-

в середине 1950-х гг. (статьи А. Я. Хинчина [3, 4]); реальные же математические продвижения в этой теории — еще позже.

Именно А. Н. Колмогоров точно оценил открывающиеся возможности в математике, связанные с теорией информации, и ему принадлежит честь введения в чистую математику целого цикла идей из теории информации. Это — теория эпсилон-энтропии метрических компактов и связанная с ней теория размерности функциональных пространств, и главное, о чем пойдет речь далее, — энтропия динамических систем. Вклад Колмогорова состоял вовсе не в тавтологическом переносе понятий из одной области в другую; это было творческое использование самих идей, а не уже готовых понятий. Разумеется, при этом использовались средства теории, к которой прилагались эти идеи. Это был замечательный пример взаимного влияния и переплетения чисто математических и прикладных идей. В наиболее свободной от ограничений ветви теории динамических систем — эргодической теории, берущей начало от эргодической гипотезы Больцмана и эргодических теорем Биркгофа — фон Неймана, — одной из основных проблем была проблема метрического изоморфизма динамических систем. Коротко говоря, она сводилась к выяснению того, когда две априори различные системы переводятся одна в другую обратимой заменой координат, сохраняющей меру. Если такая замена существует, то системы называются изоморфными, т. е. не различимыми по существу.

В эргодической теории требования к замене координат самые скромные — это лишь измеримость и сохранение меры в пространстве, на котором задана динамическая система; такой изоморфизм называют метрическим. Определим это более точно.

Пусть $(X, \mathscr{A}, \mu)$ — пространство X с выделенной сигма-алгеброй множеств $\mathscr{A}$ и заданной на ней вероятностной (т. е. неотрицательной и нормированной) мерой. Эта тройка называется, по Рохлину, пространством Лебега, если она метрически изоморфна отрезку $[0, 1]$ с нормированной лебеговой мерой, рассматриваемой на сигма-алгебре всех классов совпадающих с точностью до меры нуль

ции [3,4], в которых цитировались оригинальные статьи Шеннона, — это почти подвиг. Военные специалисты (именно они выпустили сборник [1]) понимали важность теории информации, и им была, по-видимому, разрешена его публикация, несмотря на идеологические запреты. Однако редактор сборника опустил чисто математическую часть работ Шеннона, содержащую ряд доказательств, что привело к недоразумению: в замечательных статьях [7,8] А. Н. Колмогоров, И. М. Гельфанд и А. М. Яглом передоказали некоторые теоремы Шеннона, опущенные в сборнике и потому им неизвестные.

Позорное и обскурантистское отношение советских идеологов к мировой науке, конечно, имело и более тяжелые, долгосрочные последствия, чем этот эпизод.

измеримых множеств. Изоморфизм здесь и далее означает такое преобразование одного пространства с мерой в другое, которое задано на множестве полной (единичной) меры, сохраняет измеримость и меру (т. е. прообраз измеримого множества измерим и имеет ту же меру) и обладает обратным преобразованием с теми же свойствами. Объекты — множества, функции, преобразования, разбиения и семейства таких объектов, заданные на одном и том же или на разных пространствах с мерой, и объекты на образе, в которые они переходят при изоморфизме, называются изоморфными. Числа или другие величины, которые принимают одно и то же значения на изоморфных объектах, называются инвариантами объектов. При этом важно отметить, что в описываемой теории объекты — это всегда классы совпадающих почти всюду (или, как говорят, по модулю меры нуль, кратко — «mod 0») объектов.

Основной интерес для теории динамических систем с инвариантной мерой, или, как ее называют, эргодической теории представляют преобразования или группы и полугруппы преобразований, сохраняющих меру (группы автоморфизмов или полугруппы эндоморфизмов). Их инвариантами в основном и занимается эргодическая теория. Можно сказать, что для эргодической теории интересны инварианты сопряженности в группе сохраняющих меру преобразований (автоморфизмы T, S пространства с мерой называются сопряженными, если существует автоморфизм V, связывающий их соотношением $S = VTV^{-1}$). То, что задача полной классификации автоморфизмов или групп автоморфизмов является безнадежной в том точном смысле слова, что не существует счетного набора борелевских числовых функций на группе автоморфизмов, различающих все классы изоморфных автоморфизмов — никогда не было секретом. Такова ситуация почти со всеми нетривиальными классификационными математическим задачами. Однако тем интереснее конкретные эффективные инварианты.

Инвариантами, известными с 1920-х годов, были так называемые спектральные инварианты, или инварианты унитарного оператора (группы унитарных операторов), порождаемого автоморфизмом (группой автоморфизмов). Имеется в виду то давно ставшее тривиальным наблюдение (1931 г.) ученика Дж. Биркгофа (1884—1944) Б. Купмана (1900—1981), что оператор замены координат в пространстве L^2 квадратично интегрируемых комплексных функций, отвечающий преобразованию, сохраняющему меру, унитарен, а группа автоморфизмов в том же смысле порождает группу унитарных операторов. Замечание Купмана, подхваченное фон Нейманом, протянуло прочную нить от функционального анализа к теории динамических систем. Как раз к тому времени было полностью закончено построение спектральной теории самосопряженных и унитарных операторов и эта теория стала основным аппаратом изучения динамических систем. Эта связь существует и просматривается до сих пор, по мере того как от старой спектральной теории был сделан переход к теории представлений во всей ее общности (50-е гг.), к C^*-алгебрам (Гельфанд — Наймарк) и W^*-алгебрам операторов (алгебрам фон Неймана) (1960—70-е гг.), к операторной K-теории (1970—80-е гг.) и т. д. На протяжении всей своей истории, начиная с 1930-х гг. и особенно во второй половине XX века, теория динамических систем неразрывно связана с функциональным анализом. Но энтропии здесь принадлежит особая роль.

Спектральные, т. е. операторные инварианты автоморфизмов и групп унитарных операторов являются инвариантами автоморфизмов в выше определенном смысле. И первый успех принадлежал фон Нейману (1932), доказавшему, что для систем (авторморфизмов или коммутативных локально компактных групп автоморфизмов) с дискретным спектром унитарные инварианты, т. е. их спектр, — при условии эргодичности (т. е. при отсутствии непостоянных инвариантных функций) — есть полная система инвариантов метрического изоморфизма.

Для классических динамических систем механики и римановой геометрии, которые сохраняют объем, спектральные инварианты были хорошо изучены. Они сводились либо к набору собственных значений соответствующего оператора (в случае изометрий, сдвигов на окружности или торе), либо к счетно-кратному лебеговскому спектру (для геодезических потоков на поверхностях постоянной отрицательной кривизны). В существенном никаких других спектров не было известно, разве кроме примеров систем со смешанным (дискретным и непрерывным) спектром. Это оставляло, по-видимому, надежду на то, что возможности спектральной теории не исчерпаны. Других (неспектральных) инвариантов до работы Колмогорова 1958 года не существовало.

Следующий вопрос был поставлен в 1930-х гг. Рассмотрим простейшую вероятностную динамическую систему — сдвиг Бернулли. Он определяется как сдвиг на единицу времени в пространстве бесконечных в обе стороны последовательностей одинаково распределенных независимых случайных величин. Например, предположим, что каждая величина принимает только два значения — 0 и 1 — с вероятностями, соответственно, p и $1-p$, $0<p<1$. Вопрос, изоморфны ли

два таких сдвига (скажем, при $p=1/2$ и $p=1/3$), и есть простейшая по постановке проблема изоморфизма, стоявшая около 30 лет — с начала 1930-х гг. Легко проверить, что все сдвиги Бернулли имеют один и тот же спектр, а именно счетно-кратный лебеговский спектр. Поэтому в этом случае спектральная теория не давала ничего нового и важный для приложений вопрос об их изоморфизме оставался открытым.

Заметим сразу, что проблема изоморфизма, описанная выше, и сам изоморфизм в вероятностной трактовке имеет весьма наглядную интерпретацию, ставшую после работ Шеннона особенно популярной. Как сказано выше, пространство с мерой здесь есть пространство

$$X=\{x=\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\}$$

двусторонних последовательностей каких-либо символов, например чисел 0 и 1, снабженное вероятностной мерой инвариантной относительно правого сдвига T (то есть сдвига последовательностей вправо на один шаг): $(Tx)_{n+1}=x_n$. Иначе говоря, автоморфизм (сдвиг) действует в пространстве реализаций стационарного случайного процесса с дискретным временем $\mathbb{Z}$. Изоморфизм двух сдвигов, действующих в одном и том же пространстве последовательностей, но различающихся стационарными (инвариантными относительно сдвига) мерами μ_1 и μ_2, есть обратимое отображение L пространства последовательностей X на себя, которое коммутирует со сдвигом, $LT=TL$, и переводит одну меру в другую: $L\mu_1=\mu_2$. При этом отображение L определено лишь на множестве полной μ_1-меры, а не всюду, его образ есть множество полной μ_2-меры. Кроме того, L почти всюду взаимно однозначно, т. е. обратимо $\bmod 0$. Фактически автоморфизм L определяется лишь одной измеримой функцией, которая задает значение символа последовательности образа в нулевой момент:

$$y_0=f(\dots,x_{-1},x_0,x_1,\dots).$$

Теоретико-информационная интерпретация изоморфизма L такова: это кодирование одной последовательности символов в другую, являющееся обратимым, иначе говоря, так называемое декодирование (обращение) последовательностей тоже возможно с вероятностью 1 без потери информации. Подчеркнем, что произвольный изоморфизм задает значение y_0 как функцию *всей* последовательности $\{x_n\}$. Для практики представляют интерес *физически осуществимые кодирования и декодирования*, при которых эта функция зависит только от «прошлого», т. е. от координат последовательности с отрицательными номерами (или по крайней мере с конечным числом положительных номеров). Физически осуществимые кодирования (изоморфизмы) до сих пор остаются плохо изученными даже для последовательностей независимых случайных величин — до сих пор неизвестна полная система инвариантов относительно этого класса изоморфизмов для бернуллиевских сдвигов.

Вернемся к общей проблеме изоморфизма. Прежде всего требовалось сдвинуть с места анализ бернуллиевских систем. В своей знаменитой работе «Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и эндоморфизмов пространства Лебега» в Докладах АН СССР [9] и в последующей работе «Энтропия на единицу времени как метрический инвариант автоморфизма» [10] А. Н. Колмогоров предложил новый инвариант динамических систем, который назвал *энтропией на единицу времени* и который характеризовал среднее удельное количество информации, передаваемое данным случайным стационарным процессом (динамической системой, источником). Значения энтропии суть неотрицательные числа. Колмогоровская энтропия позволила решить вопрос о неизоморфности бернуллиевских систем, у которых одномерные распределения имеют разную энтропию. В частности, немедленное применение основного результата Колмогорова об инвариантности энтропии показывает, что сдвиги Бернулли с распределениями $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ являются метрически неизоморфными автоморфизмами.

Позже у этого инварианта появилось множество других интерпретаций, обобщений и аналогов, а его основным определением стало не колмогоровское, а другое, данное позже Синаем [11] (см. Дополнение). Однако революционное влияние работы Колмогорова на все последующие события неоспоримо. Главная неожиданность колмогоровского открытия (как и открытия Шеннона, см. выше) состояла, по его собственной оценке, в том, что был обнаружен просто описываемый и относительно легко вычислимый *числовой* инвариант автоморфизмов. После сложно описываемых спектральных инвариантов открытие сравнительно простого числового, почти комбинаторного инварианта казалось удивительным. Более того, сама эта характеристика, энтропия (среднее количество передаваемой информации за единицу времени), перекочевала из работ Шеннона, и все открытие собственно и состояло в далеко не очевидном факте, что эта характеристика является метрическим инвариантом. Несколько позже стало известно свидетельство известного американского математика японского происхождения С. Какутани (1911—2004) о том, что идею такого применения теории информации, после знакомства с теорией Шеннона, высказывал также другой классик математики XX века — Дж. фон Нейман. Был и другой, совсем еще молодой тогда математик Д. З. Аров (род. 1934) из Одессы, который также высказал в письме А. Н. Колмогорову предположение, что энтропия Шеннона может быть полезна в эргодической теории; в дальнейшем он активно участвовал в прогрессе энтропийной теории динамических систем.

Разумеется, в планы этой статьи не входит ни в какой мере обзор результатов, полученных за пятидесятилетнюю историю энтропийной теории и ее многочисленных приложений (см. первые обзоры В. А. Рохлина [13, 14] и современные книги [39, 40]). Тем более, мы совсем не затрагиваем общую математическую теорию информации, где также было сделано немало замечательных открытий. Упомянем лишь, что основная теорема теории Шеннона, развитая в нескольких математических работах и называемая ныне по именам авторов теоремой Шеннона — Макмиллана — Бреймана, дает формулу для вычисления энтропии сдвига случайного процесса по почти любой его реализации. По важности и широте применений она сравнима с законом больших чисел.

Прежде всего сделаем несколько общих замечаний о роли и месте энтропии в общей теории динамических систем.

Одним из главных следствий открытия Колмогорова стало разделение всех динамических систем на системы с положительной и системы с нулевой энтропией, или системы, способные передавать информацию, и остальные, в известном смысле детерминированные. Более точно: естественно выделились системы с *вполне положительной энтропией* (то есть системы, у которых все нетривиальные факторы-автоморфизмы имеют положительную энтропию). Они названы колмогоровскими системами и имеют и другие определения. Этот важный класс систем был окончательно оформлен в работах М. С. Пинскера, В. А. Рохлина и Я. Г. Синая, Л. М. Абрамова и др.[1] С физической точки зрения этот класс совпадает с классом систем, которые обычно не очень определенно называют «хаотическими системами» (или системами, способными передавать информацию). В определенном смысле такое разделение динамических систем на два класса разделило и саму теорию на не слишком пересекающиеся по своим методам области исследования. Впрочем, отчасти это разделение соответствует имевшемуся и ранее разделению на

[1] Здесь же следует упомянуть частично относящиеся сюда работы по теории информации и кодированию Р. Л. Добрушина и его группы — одной из наиболее продуктивных школ в этой области.

вероятностные и детерминированные системы. Но только, если ранее это различие выглядело как различие размерностей (вероятностные системы «бесконечномерны», а детерминированные — «конечномерны»), то послеэнтропийный взгляд на это разделение иной, он связан с существом дела. Например, эргодические гиперболические системы, или системы Смейла, являются хаотическими, или вероятностными, несмотря на классическое их происхождение и конечномерность фазового пространства. Они имеют положительную энтропию (даже вполне положительную).

Еще до появления энтропийной теории А. Н. Колмогоров в своем докладе [6] на Международном математическом конгрессе в 1954 году подчеркивал, что после известных работ Хопфа и Хедлунда о геодезических потоках на поверхностях отрицательной кривизны естественно было бы связать хаотичность траекторий потока, которую, кстати, отмечал еще Пуанкаре, с вероятностными рассмотрениями в теории случайных стационарных процессов. Этот проницательный прогноз вскоре подтвердился: выяснилось, что положительность энтропии, типичная для систем вероятностного происхождения, имеет место для многих классических гладких систем, таких как уже упомянутые геодезические потоки, многие системы с положительными показателями Ляпунова, эргодические автоморфизмы компактных коммутативных групп, некоторые бильярдные системы и некоторые другие.

В первые годы энтропийной эйфории высказывалась гипотеза, что любая система есть прямое произведение систем с нулевой и с вполне положительной энтропией; она оказалась неверна (Д. Орнстейн [16]), а более слабая гипотеза (так называемая «слабая гипотеза Пинскера») до сих пор не доказана и не опровергнута.

О многочисленных примерах вычисления энтропии и явных формул для нее, связях с показателями Ляпунова, о продвижениях в проблеме изоморфизма и т. д. можно прочесть в многочисленных обзорах и книгах, написанных за 50 лет после открытия энтропии. Теоретический анализ энтропии, проведенный многими исследователями, дал новый толчок к изучению алгебраических автоморфизмов групп, теоретико-числовых систем, теории стационарных процессов, теории кодирования, симплектической и гамильтоновой динамики и т. п. Открытие энтропии стимулировало и развитие спектральной теории — было открыто много новых типов спектров и опровергнуты слишком прямолинейные гипотезы о структуре спектра; но и сейчас многие спектральные задачи остаются нерешенными (например, задача о существовании простого лебеговского спектра).

Последующий прогресс затронул также и прикладные области. Началась своеобразная компьютерная и экспериментальная деятельность по вычислению энтропии для систем физического происхождения. Стохастичность или хаотичность конкретных систем, ставшие синонимом положительности их энтропии, трудно поддается теоретическому исследованию. Например, до сих пор остается невыясненным, возникают ли зоны с положительной энтропией в возмущениях гамильтоновых систем, изучавшихся в КАМ-теории (так называемая диффузия Арнольда) или даже в модельных случаях (для стандартного отображения). С другой стороны, решение вопроса о стохастичности системы имеет сугубо практический интерес. Можно сказать, что вычисление энтропии конкретных систем и обнаружение ее положительности оживили исследование самих этих систем; влияние открытия энтропии на всю теорию динамических систем, как и количество последующих работ по энтропийной и связанной с ней тематике, было огромным.

Наиболее важным последующим продвижением в собственно эргодической теории были работы американского математика Д. Орнстейна и его школы. Д. Орнстейн доказал, во-первых, что энтропия есть единственный инвариант в классе сдвигов Бернулли, т. е. приведенное выше число полностью характеризует сдвиг Бернулли с точностью до метрического изоморфизма. Это замечательный результат не был неожиданным; первыми шагами к нему были примеры типа примера Мешалкина (изоморфизм сдвигов Бернулли с распределениями $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$) и результат Я. Синая о слабом изоморфизме бернуллиевских систем. Основное достижение Орнстейна состояло в том, что ему удалось найти инвариантную формулировку бернуллиевости, т. е. инвариантное описание автоморфизмов, изоморфных сдвигам Бернулли, использующее энтропию и некоторые метрики, в терминах которых определялось свойство перемешивания соответствующего случайного процесса. При этом введенный им тип перемешивания стационарных случайных процессов, эквивалентный свойству бернуллиевости, не совпадал ни с одним из многочисленных типов перемешиваний, употреблявшихся в теории стационарных процессов. Метрика, которую Орнстейн использовал ($\bar{d}$-метрика) для определения этого перемешивания, была не чем иным, как переоткрытой им транспортной метрикой Канторовича. На взгляд автора, роль *инвариантного определения* бернуллиевости, данного Д. Орнстейном для дальнейшего развития теории случайных процессов, едва ли не важнее самой классификации бернуллиевских систем.

Вскоре с помощью своего критерия — так называемых *WB*- и *VWB*-образующих («слабо бернуллиевские» и «очень слабо бернуллиевские» образующие)[1] — Д. Орнстейн и его последователи доказали, что многие классические гиперболические системы (например, геодезический поток на поверхности постоянной отрицательной кривизны) имеют не только вполне положительную энтропию, но и изоморфны системам Бернулли, т. е. в существенном ведут себя как самые характерные вероятностные процессы. Бернуллиевский тип автоморфизмов оказался наиболее распространенным среди известных примеров динамических систем с вполне положительной энтропией.

Но Д. Орнстейн сделал и другое, не столь ожидавшееся, но очень важное открытие: оказалось, сдвигами Бернулли (точнее, изоморфными им автоморфизмами) отнюдь не исчерпывается класс систем с вполне положительной энтропией (или «хаотических» систем): существует континуум попарно неизоморфных автоморфизмов с вполне положительной энтропией, которые неизоморфны бернуллиевским; до тех пор их никто не замечал. Впрочем, и не было средств их отличить от других. По мнению специалистов (в том числе и Д. Орнстейна), теория таких автоморфизмов, в отличие от теории сдвигов Бернулли, до сих пор (т. е. за 30 с лишним лет) еще не построена, и естественных примеров таких систем очень мало. Наиболее ярким является пример С. Каликова [32] — случайное блуждание на одномерной решетке в случайной среде. После открытия автором данной статьи другого инварианта — шкалы автоморфизма [19] — эти, скорее разочаровывающие, примеры Орнстейна — Шилдса были рассмотрены С. Юзвинским [20], который, усовершенствовав их конструкцию и используя шкалу автоморфизмов, доказал, грубо говоря, что классификация автоморфизмов с вполне положительной энтропией включает (т. е. содержит как подзадачу) классификацию произвольных автоморфизмов; таким образом, обе классификации, вопреки ожиданиям, равносложны. Здесь, по-видимому, нас еще ждут новые примеры и задачи. Так или иначе, помимо энтропии, имеется много других инвариантов, различающих системы с вполне положительной энтропией.

Работа Колмогорова оказала сильное влияние на то, что автор в предисловии к [39] назвал выработкой «энтропийного мышления». Под этим подразумевается способ изучения ситуаций, в которых присутствует в том или ином смысле экспоненциальный рост каких-то характеристик, с помощью введения инвариантов типа энтропии. Сюда относятся и рассмотренная систематически самим Колмогоровым и его школой теория эпсилон-энтропии компактов (существовавшая ранее как спорадическое явление), примененная к классификации функциональных пространств (обобщенная размерность), задачам аппроксимации и имеющая массу приложений. Введение топологической энтропии гомеоморфизмов (Адлер и др.), разумеется, имеет тот же источник и также является примером применения энтропийного мышления.

[1] К сожалению, хороших русских терминов до сих пор не предложено, и авторы довольствуются лишь калькой с английского.

Соотношения между метрической (колмогоровской) и топологической версиями энтропии подробно исследованы и оказались полезными в теории фракталов, в анализе хаусдорфовой размерности, в символической динамике и др. Последовавшие в 70-е годы «некоммутативные» аналоги понятия энтропии (т. е. энтропия автоморфизмов фон неймановских алгебр) по существу копировали определение энтропии Колмогорова по Синаю, но столь же существенное влияние на предмет эти обобщения пока не имели. К той же категории относится определение энтропии для действий общих групп, а также энтропия Кириллова — Кушниренко [17], дающая важную новую информацию об автоморфизмах (см. Дополнение). Следует еще упомянуть и энтропию полиморфизмов (многозначных, или марковских, преобразований). Энтропия фильтраций (т. е. убывающих последовательностей сигма-алгебр), введенная автором (1970 г.), — пример того же типа, иногда совпадающий с энтропией действий. Однако более общее понятие энтропии — *масштабированная энтропия фильтраций*, введенная автором позже (2000 г.), — привело к существенному расширению понятия энтропии автоморфизмов и действий (это обсуждается далее в Дополнении). По сути дела, понятие масштабированной энтропии в известном смысле объединяет колмогоровскую метрическую и топологическую энтропии.

Наибольшее по методологическому значению для математики в целом и, в первую очередь, для всей теории динамических систем последствие открытия энтропии состояло в ликвидации разобщенности, которая была до этого между теориями динамических систем в разных категориях (метрической, топологической, гладкой, символической), и именно поэтому энтропийная теория изменила лицо не только теории динамических систем, но и большой части всей математики. Несомненно, большое влияние на этот объединительный процесс имела и другая знаменитая инициатива А. Н. Колмогорова — начала КАМ-теории, — относящаяся примерно к тому же времени.

Возможно, все эти обстоятельства не вытекали прямо из сути предмета и эта объединительная функция объясняется также другими причинами, но остается неоспоримым фактом, что энтропийная теория принадлежит к фундаментальным открытиям математики XX века.

Дополнение
Динамика метрик в пространствах с мерой и их асимптотические инварианты

1. Анализ определений по Колмогорову и Синаю. Причина недеформируемости энтропии

Мы начнем с обсуждения важного вопроса, связанного с понятием колмогоровской энтропии и его обобщениями. В несколько описательной форме вопрос состоит в том, каков тот контекст, в котором следует рассматривать энтропию, и как в рамках этого контекста распространить понятие энтропии и на тот случай, когда колмогоровская энтропия автоморфизма равна нулю. Поскольку неспектральный и даже неоператорный характер энтропии очевиден, нужно искать иные подходящие термины и понятия. Искусственная операторная переформулировка понятии энтропии, конечно, может быть дана, и это неоднократно делалось, но ничего нового по существу такие переформулировки не дают: энтропия плохо сочетается с традиционными операторными рассмотрениями, поскольку ее природа носит совсем другой характер.

Но эта изолированность энтропии не является непреодолимой. А именно, мы предлагаем далее важный сам по себе контекст, в который естественно вписывается и энтропия, и ее обобщения. Это — анализ ассоциированной с динамической системой *динамики метрик в пространстве с мерой и ее асимптотических инвариантов*. В рамках такого подхода энтропию, и ее обобщение, разумно рассматривать как *один из основных и простейших асимптотических инвариантов* ассоциированной динамики метрик и, следовательно, самой динамической системы. Но для этого мы должны перейти от колмогоровской энтропии к ε-энтропии метрических пространств с мерой и к асимптотическим характеристикам их динамики. Это и будет сделано ниже.

Напомним вначале основные энтропийные определения. Энтропия дискретной меры $\mu=(p_1, \ldots, p_n)$, $p_i>0$, $\sum p_i=1$, определяется по формуле

$$H(\mu) = -\sum_i p_i \log p_i.$$

Пусть T — автоморфизм, т. е. измеримое обратимое преобразование с инвариантной мерой, определенное на стандартном пространстве с мерой $(X, \mathscr{A}, \mu)$ (т. е. на пространства Лебега по Рохлину), где $\mathscr{A}$ — сигма-алгебра классов $\bmod 0$ всех измеримых множеств, а μ — вероятностная мера. Предположим теперь, что преобразование T реализовано как правый сдвиг в пространстве двусторонних последовательностей не более чем счетного числа символов. Это означает, что X есть пространство бесконечных двусторонних последовательностей символов, например, целых неотрицательных чисел ($X=\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$, T — сдвиг последовательностей вправо, а μ — вероятностная, инвариантная относительно сдвига (стационарная) мера). Тем самым, мы рассматриваем случайный стационарный процесс. Таким образом можно реализовать (многими способами) любой автоморфизм — в этом состоит теорема Рохлина о существовании счетной образующей [14]. Обозначим через ζ разбиение пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ по «прошлому» процесса, т. е. ζ — разбиение, элемент которого есть класс всех последовательностей с фиксированными значениями координат с отрицательными номерами и произвольными значениями координат с неотрицательными номерами. Сдвинем это разбиение на одни шаг вправо и рассмотрим среднюю условную энтропию, т. е. математическое ожидание по всем элементам прошлого энтропии условного распределения нулевой координаты при фиксации всех координат с отрицательными номерами — $EH(\zeta\,|\,T^{-1}\zeta)$.

Теорема (Колмогоров). *Неотрицательная* (*конечная или бесконечная*) *величина*

$$EH(\zeta \mid T^{-1}\zeta) \equiv h(T),$$

называемая средней условной энтропией (*или информацией по Шеннону*) *на один шаг случайного стационарного процесса с конечным числом состояний, есть инвариант автоморфизма T. Иначе говоря, она не зависит от того, каким образом изоморфно реализован автоморфизм T в виде сдвига в пространстве траекторий такого процесса.*

Вернемся ненадолго к истории этого открытия. С формулировкой этой теоремы связаны некоторые события: в первой работе А. Н. Колмогоров [9] трактовал приведенную формулировку более расширительно, но дело в том, что для континуального множества символов (и даже для счетного, но с бесконечной энтропией) теорема не верна[1] без дополнительных условий на реализацию автоморфизма. На это немедленно обратил внимание В. А. Рохлин, дав конкретный

[1] Ошибка в работе [9] в этом месте состояла в неправомерном предельном переходе вдоль убывающей последовательности инвариантных сигма-алгебр (коротко — вдоль

контрпример автоморфизма алгебраического происхождения и инвариантных относительно него сигма-алгебр, для которых левые части вышеприведенного равенства различны. Во второй своей заметке [10] А. Н. Колмогоров исправлял формулировку за счет априорного ограничения на автоморфизмы, для которых вводится определение энтропии. Но для схем Бернулли, т. е. последовательностей независимых случайных величин с конечным или счетным множеством состояний, а также для многих других случаев инвариант был корректно определен уже в первой работе [9].

Для того, чтобы приведенная формулировка была верна в полной общности, недоставало не существовавших тогда еще теорем об образующих и о специальных инвариантных сигма-алгебрах. Упомянутую выше теорему о существовании счетной образующей для любого апериодического автоморфизма доказал несколько позже В. А. Рохлин: любой автоморфизм может быть реализован как сдвиг в пространстве траекторий процесса с не более чем счетным числом состояний. Это восстановило общность теоремы Колмогорова. Несколько позже В. Кригер доказал существование конечной образующей для автоморфизмов с конечной энтропией. Тот же факт, но с несколько худшей оценкой, доказал А. Н. Лившиц (1950—2008).

Гораздо более простое и общепринятое теперь определение предложил Я. Г. Синай вскоре после работы Колмогорова. Оно носит не «информационный», а геометрический или, скорее, комбинаторный характер.

Теорема (Синай [11]). *Пусть T — автоморфизм произвольного стандартного пространства с мерой $(X, \mathscr{A}, \mu)$, а ξ — его измеримое конечное разбиение. Пусть $T^0\xi = \xi$, $T\xi$, $T^2\xi$, …, $T^{n-1}\xi$ — последовательные T-образы разбиения ξ, а $\xi_T^n = \bigvee_{i=0}^{n-1} T^i\xi$ — произведение первых n его образов. Тогда существует следующий предел* (*конечный или бесконечный*):
$$\lim_{n\to\infty} \frac{H(\xi_T^n)}{n} \equiv h(T, \xi),$$

убывающей фильтрации). Любопытно, что эту же ошибку сделал Н. Винер в важном месте своей известной книги по нелинейной теории случайных процессов, а также и многие другие авторы. Дело в том, что вдоль возрастающих последовательностей сигма-алгебр (коротко, вдоль возрастающих фильтраций) предельный переход, очевидно, допустим, что провоцирует такое же утверждение об убывающих фильтрациях. Однако теория убывающих фильтраций, и особенно их классификация, намного деликатнее и содержательнее, чем теория возрастающих фильтраций. В частности, предельный переход вдоль убывающих фильтраций, как правило, невозможен (см. теорию убывающих фильтраций в [21]).

и выражение
$$\sup_{\xi} h(T, \xi) = h(T),$$
где супремум берется по всем конечным разбиениям пространства, совпадает с определенной выше энтропией автоморфизма (*или может считаться ее определением*).

Определения Колмогорова и Синая имеют различную природу и разные интерпретации (см. далее), а их эквивалентность не вполне очевидна. Но, безусловно, следует говорить[1] об «энтропии Колмогорова» и об «определении Синая», а не об «энтропии Колмогорова — Синая», как это часто делают.

Важное обстоятельство: выражение $h(T, \xi)$ непрерывно относительно разбиения ξ на пространстве всех конечных разбиений, снабженном так называемой энтропийной метрикой. Именно эта непрерывность позволяет эффективно вычислять энтропию с помощью аппроксимаций. Как отмечалось, положительность энтропии выделяет важный класс автоморфизмов, которые существенно отличаются по своим свойствам от автоморфизмов с нулевой энтропией.

Предположим, что энтропия автоморфизма равна нулю. Тогда последовательность $H(\xi_T^n)$ растет сублинейно. Можно ли ввести иной масштаб, вместо линейного, который давал бы новый инвариант автоморфизма? Другими словами, нельзя ли так продеформировать определение Синая, чтобы с помощью модифицированного таким образом инварианта получить возможность различать между собой хотя бы некоторые автоморфизмы с нулевой энтропией? Оказывается, колмогоровская энтропия в определении Синая не деформируема в следующем буквальном смысле.

Теорема 1. *Для любого эргодического автоморфизма T и произвольной последовательности положительных чисел $\{c_n\}$, удовлетворяющей условию $\lim_n \frac{c_n}{n} = 0$, существует такое конечное разбиение ξ, что*
$$\lim_n \frac{H(\xi_T^n)}{c_n} = +\infty.$$

Иначе говоря, никакой сублинейный рост энтропии $H(\xi_T^n)$ (отличный от линейного) нового инварианта не дает. Причина этого эффекта в том, что на множестве малой меры разбиение ξ_T^n в теореме 1 может быть очень мелким и давать искусственно завышенное значение энтропии. Можно не вполне точно сформулировать это таким

[1] Я. Г. Синай подтвердил, что он согласен с моей формулировкой (см. [12]).

образом: на множестве малой меры рост энтропии может быть почти линейным (выше линейного он быть не может). Аналогичным образом объясняется, почему такой же аналог исходного колмогоровского определения не приводит к разумным новым инвариантам. Здесь проявляется общий принцип эргодической теории, выражаемый леммой Рохлина, что с точностью до множества малой меры эргодические автоморфизмы неразличимы.

Тем не менее, можно уточнить идею масштабирования роста. Для этого нужно рассматривать энтропию лишь с точностью до малых изменений разбиения ξ_T^n, иначе говоря, привлечь понятие эпсилон-энтропиии. Мы сначала приведем изложение новых инвариантов в терминах, максимально приближенных к традиционным, т. е. используя разбиения, как в определении Синая, а затем перейдем к более богатому языку метрик.

2. Эпсилон-энтропия пространства с мерой и определение масштабированной энтропии

Рассмотрим функцию от разбиения и положительного числа ε:

$$H_\varepsilon(\xi) = \inf_{A:\,\mu A>1-\varepsilon} H(\xi\,|_A).$$

Под разбиением $\xi|_A$ мы имеем в виду разбиение множества A положительной меры, с перенормированным на единицу ограничением на A меры μ, на множества, являющиеся пересечениями элементов разбиения ξ с A. Заметим, что эта функция монотонно убывает с ростом ε, принимая значение $H(\xi)$ при $\varepsilon=0$ и нуль при $\varepsilon=1$. Используем ее для определения масштабированной энтропии автоморфизма. Введем функцию

$$H_\varepsilon(\xi_T^n),$$

зависящую от n, $\varepsilon>0$ и разбиения ξ, и будем изучать ее рост.

Определение 1 (см. [25]). Последовательность положительных чисел $\{c_n\}$ назовем масштабирующей (scaling) для эргодического преобразования T, если для любого конечного разбиения ξ

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_n\sup\frac{H_\varepsilon(\xi_T^n)}{c_n} < \infty$$

и существуют такое разбиение ξ, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_n\inf\frac{h_T(\xi n,\varepsilon)}{c_n} > 0.$$

(все такие последовательности $\{c_n\}$ эквивалентны между собой при $n\to\infty$).

Теорема 2. *Класс масштабирующих последовательностей для данного преобразования есть метрический инвариант преобразования. Этот инвариант различает преобразования с нулевой колмогоровской энтропией. Класс последовательностей $\{c_n\}\sim\{n\}$ отвечает колмогоровской энтропии, причем с такой нормировкой функция $H_{\varepsilon,n}(\xi)$ при малых ε не зависит от ε.*

Иногда можно выбрать в классе эквивалентных последовательностей какую-то одну для всех преобразований, имеющих этот класс в качестве масштабирующего, и тогда мы получаем в качестве инварианта не только класс, но и число, называемое *масштабированной энтропией*. Неясно, всегда ли можно сделать такой выбор последовательности. В работе [30] для различения действий групп $\mathbb{Z}^2$ вводилась «медленная» («slow») энтропия, напоминающая нашу масштабированную энтропию.

Приведем несколько примеров.

1) Если масштабирующая последовательность есть линейная функция, $\{c_n\}\sim\{n\}$, то мы получаем колмогоровскую энтропию. Такой рост является, разумеется, максимальным для группы $\mathbb{Z}$. В случае нулевой колмогоровской энтропии масштабирование сублинейно.

2) Преобразованиям с дискретным спектром соответствует класс ограниченных последовательностей: $\sup c_n<\infty$. Таким образом, для изометрий, сохраняющих меру, т. е. сдвигов на компактных группах, масштабированная энтропия равна нулю при любом масштабировании. В несколько другой формулировке этот факт впервые заметил С. Ференци [29]. Это внешне напоминает результат А. Кушниренко [17] об энтропии Кириллова — Кушниренко, называемой также *последовательностной энтропией*: класс автоморфизмов, для которых последовательностная энтропия равна нулю для всякой последовательности, совпадает с классом автоморфизмов с дискретным спектром.

Однако это сходство имеет внешний характер, так как определение масштабированной энтропии, как и само это понятие, кардинально отличается от определения энтропии Кириллова — Кушниренко.

3) Масштабирующая последовательность может быть определена точно так же, как и выше, и для потоков. В двух независимых работах — в цитированной работе А. Кушниренко [17] и работе М. Ратнер [28] о потоках орициклов на поверхностях отрицательной кривизны был доказан неизоморфизм различных декартовых степеней

таких потоков. Различающий инвариант в работе [17] — последовательностная энтропия, а в работе [28] использовалась одна идея Дж. Фельдмана [27] и строился инвариант, похожий на конкретный пример масштабированной энтропии. Можно предположить, сравнивая инвариант в [28] с нашим определением, что масштабирующая последовательность для k-й степени потока орициклов логарифмическая: $\{c_n\} \sim \{(\log n)^k\}$.

4) В качестве стимулирующей задачи можно поставить вопрос о масштабирующих последовательностях адических автоморфизмов, например, какова эта последовательность для адического автоморфизма Паскаля, или для адического автоморфизма Юнга. Эти автоморфизмы имеют предположительно сингулярный непрерывный спектр. Из предыдущего (пример 2) вытекало бы, что, если масштабирующая последовательность неограничена, то спектр не является чисто дискретным; пока это неизвестно.

3. Допустимые метрики вместо разбиений

Изложенный выше подход к масштабированной энтропии требует дальнейшего усовершенствования. Вместо традиционного для эргодической теории использования теории разбиений следует привлечь более гибкий аппарат метрик и метрических пространств, полезный во многих вопросах теории меры. Ниже мы иллюстрируем это на примере теории масштабированной энтропии, включающей и обычную теорию энтропии. По мнению автора, этот подход должен стать плодотворным и в применениях к общей проблеме изоморфизма в эргодической теории.

Всякое конечное или счетное измеримое разбиение определяет полуметрику:

$$\rho(x,y) = \delta_{C(x),C(y)},$$

где $C(x)$ означает элемент разбиения, содержащий x.

Таким образом, можно заменить манипуляции с измеримыми разбиениями анализом соответствующих полуметрик; иначе говоря, переход к (полу)метрикам тавтологически включает в себя теорию разбиений как специальный случай. Но рассмотрение общих метрик и полуметрик открывает и новые возможности.

Наш подход состоит в том, что *вместо обычного изучения совокупности борелевских мер на фиксированном метрическом* (*или топологическом*) *пространстве мы рассматриваем множество метрик на фиксированном пространстве с мерой*. Для эргодической теории и вероятностных рассмотрений такая перемена мест весьма естественна. Введем понятие *допустимой* (*полу*)*метрики* на пространстве Лебега (X,μ).

Определение 2. (Полу)метрика ρ на пространстве Лебега (X,μ) с непрерывной мерой называется *допустимой*, если выполнены условия:

1) $\rho(\cdot,\cdot)$ есть измеримая функция двух переменных, определенная на множестве полной меры (зависящем от метрики) декартова квадрата пространства (X,μ) и удовлетворяющая на этом множестве аксиомам (полу)метрики;

2) пространство (X,ρ) как (полу)метрическое пространство есть квазикомпакт, т. е. превращается в компакт после факторизации пространства по отношению эквивалентности $x \sim y \Leftrightarrow \rho(x,y)=0$.

Корректным понятием, тем самым, является не индивидуальная (полу)метрика на пространстве Лебега, а класс $\bmod 0$ совпадающих (полу)метрик, поэтому правильно говорить о классах (полу)метрических пространств, совпадающих $\bmod 0$. Как правило, проверка корректности утверждений по отношению к эквивалентности $\bmod 0$ не представляет проблем, хотя здесь есть свои тонкости, например, в том, как понимать неравенства треугольника (оно должно пониматься как точно выполненное для всех троек точек из множества полной меры, на котором определена метрика, а не как выполненное для почти всех троек точек, и т. п.). Допустимые полуметрики (классы полуметрик) образуют выпуклый конус $\mathcal{R}$ в пространстве измеримых неотрицательных функций двух переменных на пространстве (X,μ). Назовем $\mathcal{R}$ конусом (классов) допустимых (полу)метрик; он замкнут относительно взятия супремумов конечного числа метрик. Это канонический объект, если ограничиться пространствами Лебега с непрерывной мерой. Геометрия этого конуса представляет большой интерес и мало изучена.

4. Эпсилон-энтропии мер в метрических пространствах

Следующее определение эпсилон-энтропии мер в метрических пространствах фактически также принадлежит А. Н. Колмогорову (см. [5]). Мы изменяем лишь не очень существенную деталь, а именно, оцениваем близость мер по метрике Канторовича, а не с помощью числа точек в эпсилон-сети.

Определение 3. Пусть μ — вероятностная борелевская мера в сепарабельном метрическом пространстве (X,ρ). Функция $H(\rho,\mu,\varepsilon)$

определяется равенством

$$H(\rho, \mu, \varepsilon) = \inf\{H(\nu) : k_\rho(\mu, \nu) < \varepsilon\},$$

где ν пробегает множество дискретных мер, а k_ρ — расстояние Канторовича между мерами в метрическом пространстве (X, ρ).

Напомним определение метрики Канторовича (транспортной метрики) [22, 23] на пространстве мер, заданных на метрическом компакте. Пусть (X, ρ) — компактное метрическое пространство и μ_1, μ_2 — две вероятностные борелевские меры на X. Тогда

$$k_\rho(\mu_1, \mu_2) = \inf_\Psi \iint_{X\times X} \rho(x, y) d\Psi(x, y),$$

где инфимум берется по всем вероятностным мерам Ψ на пространстве $X \times X$, проекция которых на первую координату есть мера μ_1, а на вторую — мера μ_2. Иначе говоря, Ψ пробегает множество мер с заданными маргинальными проекциями.

Заметим, что приведенное выше определение имеет смысл и в том случае, когда пространство не является компактным, так как вероятностная мера в полном сепарабельном пространстве сосредоточена, с точностью до любого положительного ε, на компактных подмножествах. В случае полуметрик определения также сохраняют свой смысл. Если задано конечное разбиение ξ пространства с мерой (X, μ), то его энтропия совпадает с эпсилон-энтропией (при достаточно малом ε) пространства $(X/\xi, \mu/\xi)$ элементов разбиения ξ с дискретной полуметрикой ρ_ξ:

$$H(\rho_\xi, \mu, \varepsilon) = H_\varepsilon(\xi).$$

5. Динамика метрик в пространстве с мерой как подходящий контекст для энтропии

Классический функциональный анализ предлагает рассматривать вместо тех или иных объектов пространство функций на этих объектах. Спектральная теория динамических систем есть результат следования этой рекомендации: вместо преобразования фазового пространства рассматривают унитарный оператор в пространстве L^2. Но почему-то до сих пор дело ограничивалось рассмотрением функции одной переменной, пробегающей фазовое пространство системы. Но можно рассматривать действие декартовых степеней динамической системы в пространствах функций нескольких переменных, сохраняя при этом разделение переменных. Например, в пространстве функций двух переменных, а именно на конусе допустимых метрик. Понятно, что мы получаем, таким образом, гораздо больше сведений о системе, чем может дать действие в пространстве функции одной переменной, и тем самым увеличим возможности анализа свойств динамической системы[1]. При этом мы приходим к постановке новых интересных и важных задач.

Пусть ρ — (полу)метрика, T — автоморфизм. Обозначим через ρ_T (полу)метрику $\rho_T(x, y) = \rho(Tx, Ty)$. Образ допустимой метрики есть допустимая метрика. Таким образом, группа преобразований, сохраняющих меру, естественно действует на конусе метрик $\mathcal{R}$.

Основной тезис состоит в том, что *асимптотическая теория итераций метрик в пространстве с фиксированной мерой* под действием автоморфизмов и есть тот контекст, в котором следует рассматривать как колмогоровскую, так и масштабированную энтропию (и их обобщения), а также и другие инварианты автоморфизмов.

По данной допустимой метрике ρ пространства (X, μ) и автоморфизму T можно построить последовательность новых метрик; для этого надо взять орбиту этой метрики в конусе допустимых метрик под действием автоморфизма и затем следует образовать симметрические комбинации первых n метрик орбиты. Особенно важны следующие две последовательности метрик, ассоциированные с данной метрикой ρ и автоморфизмом T: *равномерная метрика*

$$\rho^n_T = \sup_{i=0,\ldots,n-1} \rho_{T^i}, \quad \text{где } \rho_{T^i}(x, y) = \rho(T^i x, T^i y)$$

(эта метрика соответствует произведению разбиений в обычном контексте: $\rho_{\xi^n_T} = \sup\limits_{i=0,\ldots,n-1} \rho_{T^i\xi}$) и *усредненная метрика*

$$\widehat{\rho}^n_T = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \rho_{T^i}.$$

Далее мы ограничимся лишь первой из них. *Ставится вопрос об асимптотическом поведении этой последовательности метрик, когда n стремится к бесконечности.*

Основной пример. Рассмотрим рост эпсилон-энтропии меры μ в последовательности метрических компактов (X, ρ^n_T) и определим

[1] Разумеется, декартовы степени широко используются в эргодической теории, но обычно декартов квадрат автоморфизма рассматривают просто как автоморфизм пространства с мерой, и структура прямого произведения не фиксируется.

класс таких монотонных последовательностей чисел $\{c_n\}$, что выполнено условие

$$0 < \lim_{\varepsilon\to 0}\liminf_n \frac{H(\rho_T^n,\mu,\varepsilon)}{c_n} \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_n \frac{H(\rho_T^n,\mu,\varepsilon)}{c_n} < \infty.$$

Последовательности $\{c_n\}$ из этого класса назовем *масштабирующими для автоморфизма T и метрики ρ*. Эта нормировка соответствует той, которую мы рассматривали выше при введении масштабированной энтропии автоморфизма с помощью разбиений.

Теорема 3 (о масштабированной энтропии эргодического автоморфизма $\boldsymbol{T}$). *Класс масштабирующих последовательностей $\{c_n\}$ не зависит от выбора метрики ρ в классе метрик, удовлетворяющих, помимо приведенных выше условий* 1) *и* 2), *условию*

3) *автоморфизм T метрического пространства (X,ρ) топологически транзитивен.*

Если при некотором каноническом выборе последовательности из класса эквивалентности существует предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lim\limits_n \dfrac{H(\rho_T^n,\mu,\varepsilon)}{c_n}$, то будем называть его *масштабированной энтропией* автоморфизма и при этом указывать масштабирующую последовательность.

Таким образом, масштабированная и, в частности, колмогоровская энтропия являются естественными асимптотическими инвариантами последовательности компактов с мерой. Методическое преимущество перехода от разбиений к непрерывным (полу)метрикам состоит в том, что предельный переход и взятие верхней границы по всем конечным разбиениям теперь заменены рассмотрением одной подходящей метрики. Но гораздо важнее то, что мы оказываемся в круге асимптотических задач о поведении последовательности метрик, и масштабированная энтропия лишь одна, притом самая грубая, их асимптотическая характеристика. Она характеризует рост «размерности» компакта, или, иначе, *асимптотику его хаусдорфовой размерности.* Динамика метрических компактов с мерой (X,μ,ρ_T^n) и ее асимптотика и есть тот контекст, о котором говорилось выше, в рамках которого естественно рассматривать энтропию и ее обобщения.

Опишем кратко предлагаемую программу. Рассмотрим какую-либо допустимую метрику на пространстве Лебега (X,μ) с фиксированной непрерывной мерой, на котором задан сохраняющий меру автоморфизм T (или группа автоморфизмов G). Предлагается исследовать асимптотические инварианты последовательности метрик ρ_T^n, введенные выше. Асимптотические характеристики этой последовательности не зависят от начальной метрики и потому характеризуют лишь инвариантные свойства автоморфизма.

Метрики меняются с ростом n довольно сложным образом, но предположительно имеется ряд грубых асимптотических инвариантов типа энтропии. Масштабированная энтропия есть простейший асимптотический инвариант, показывающий рост мощности эпсилон-сетей или рост хаусдорфовой размерности компакта. Более сложные асимптотические инварианты характеризуют не только асимптотику индивидуальных компактов, но и асимптотику их взаимного расположения. Существует ли предельный объект для последовательности компактов — пока неизвестно (в примере с фильтрациями, см. ниже, такой предельный объект существует). Возможно, предельные объекты здесь также существуют и могут быть более или менее явно охарактеризованы. Предположительно, их изучение позволило бы разобраться, в частности, в проблеме изоморфизма автоморфизмов с вполне положительной энтропией.

6. Связь с инвариантами метрических троек и их динамикой

Свяжем наши рассмотрения с теорией метрических троек, или троек Громова, или mm-пространств в его терминологии. Напомним, что М. Громовым [31][1] предложен полный инвариант троек (X,ρ,μ) относительно изометрий пространства (X,ρ), сохраняющих меру μ. Здесь X — пространство, ρ — метрика на нем, превращающая X в польское пространство, а μ — вероятностная борелевская мера с полным носителем. В формулировке автора настоящей статьи [24] этот инвариант выглядит как некоторая вероятностная мера на конусе неотрицательных бесконечных симметричных матриц со счетным числом строк и столбцов и удовлетворяющих неравенству треугольника, т. е. на конусе так называемых матриц расстояния. Этот инвариант можно трактовать как случайную (полу)метрику на натуральном ряде, или как случайную матрицу расстояний. Целый ряд известных инвариантов метрических троек легко считается с помощью этого инварианта, т. е. с помощью случайной матрицы. Например, в этих терминах легко описывается эпсилон-энтропия тройки (или, скажем иначе, меры μ в метрическом пространстве (X,ρ)).

В предложенной выше схеме мы задавались последовательностью метрических троек, точнее, последовательностью метрик на одном и том же пространстве с мерой (тройки здесь отличались лишь мет-

[1] Цит. по предыдущему изданию книги, вышедшему в 2001 году.

рикáми). А задача состояла в отыскании асимптотических инвариантов троек. Только что описанный полный инвариант троек позволяет легко вычислять эпсилон-энтропию по случайной матрице и, тем самым, асимптотику эпсилон-энтропий последовательности троек, которая и есть, по нашему определению, масштабированная энтропия. При этом, как утверждалось выше, результат практически не зависит от выбора начальной метрики. Можно предложить и другие грубые асимптотические характеристики последовательностей троек, однако их выбор должен определяться задачей.

Например, как сформулировать результаты Орнстейна о классификации и характеризации бернуллиевских автоморфизмов (с помощью $\bar{d}$-метрики или *VWB*-свойства) в терминах утверждения о некотором специальном асимптотическом типе последовательности метрических троек? Каждый такой асимптотический тип задается, по Орнстейну, лишь одним положительным числом — энтропией бернуллиевского автоморфизма. Иначе говоря, речь идет о геометрическом описании бернуллиевского типа последовательностей метрик. Но до этого, по-видимому, еще далеко. Можно надеяться, что примеры небернуллиевских автоморфизмов с вполне положительной энтропией должны найти свое более полное объяснение в терминах асимптотической динамики метрических пространств.

7. Параллель с теорией фильтраций и динамика итераций метрик Канторовича

Другая динамика метрик, возникшая значительно раньше, связана с теорией фильтраций и, в частности, с энтропией фильтраций. Хотя эта динамика более громоздка, ее привлекательным качеством является существование предельных объектов, что позволяет продвинуть исследование гораздо дальше, чем это сделано пока для проекта, описанного выше. Коротко упомянем несколько определений и примеров.

Фильтрацией называется убывающая последовательность σ-алгебр. Например, последовательность «прошлых» случайного процесса $\{T^{-n}\mathscr{A}\}$, $n = 0, 1, \ldots$, где $\mathscr{A}$ — T-инвариантная σ-алгебра (то есть $T^{-1}\mathscr{A} \subset \mathscr{A}$). Фильтрация называется эргодической, если пересечение сигма-алгебр $T^{-n}\mathscr{A}$ — тривиальная алгебра.

Если T — односторонний сдвиг Бернулли, то соответствующая фильтрация прошлых (она эргодична по закону нуля — единицы Колмогорова) называется *стандартной*. Существуют эргодические фильтрации, финитно изоморфные бернуллиевской, но не изоморфные

ей в целом. Фундаментальное значение имеет следующая *динамика (полу)метрик, порожденная фильтрацией*.

Рассмотрим допустимую метрику ρ на пространстве с мерой (X, μ) и будем итерировать ее по Канторовичу с помощью фильтрации. Для этого перейдем от фильтрации σ-алгебр к (убывающей) фильтрации разбиений $\xi_1 \succ \xi_2 \succ \ldots$

Пусть

$$\begin{aligned} &\rho_0 = \rho; \\ &\rho_1(x, y) = k_{\rho_1}(\mu^{C_1(x)}, \mu^{C_1(y)}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\rho_m(x, y) = k_{\rho_{m-1}}(\mu^{C_m}(x), \mu^{C_m}(y)), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

где $C_m(x)$ — элемент разбиения ξ_m, содержащий точку x, μ^C — условная мера на элементе разбиения C и k_ρ — расстояние Канторовича между мерами на метрическом пространстве с мерой (X, ρ). Иначе говоря, расстояние между двумя точками x и y в n-й полуметрике есть расстояние по Канторовичу между условными мерами элементов n-го разбиения $C_n(x)$ и $C_n(x)$, содержащих соответственно точки x и y, относительно $(n-1)$-й полуметрики.

Мы получаем последовательность полуметрик $\{\rho_m\}_0^\infty$ на пространстве (X, μ). В терминах асимптотического поведения этой последовательности выражаются многие (а возможно, и все) инвариантные асимптотические свойства фильтрации. Замечательно, что эти асимптотические свойства не зависят от выбора начальной метрики из очень широкого класса метрик — точно так же, как в программе, рассмотренной выше.

Основной пример связан с критерием стандартности (бернуллиевости), см. работы [18, 21] автора.

Теорема 4. *Последовательность итерированных метрик стремится к вырожденной метрике (т. е. метрическое пространство стягивается в точку) тогда и только тогда, когда фильтрация стандартна (бернуллиевская).*

Это означает, что масштабированная энтропия последовательности метрик равна нулю для любой растущей последовательности $\{c_n\}$. Можно сравнить это с динамикой метрик относительно автоморфизмов с дискретным спектром (см. выше).

Приведем более новый пример. Рассмотрим случайное блуждание в случайной среде: на множестве всех (0-1)-конфигураций решетки $\mathbb{Z}^d$

рассмотрим простое случайное блуждание и соответствующий марковский процесс.

При $d = 1$ марковский сдвиг есть небернуллиевский K-автоморфизм (Каликов, [32]). То же самое имеет место при $d = 2$, а при $d > 2$ марковский сдвиг является уже бернуллиевским (Холландер — Стейф, [38]). Что можно сказать о фильтрации прошлых этих процессов?

Класс последовательностей, масштабирующих энтропию, имеет линейный рост[1] $c_n = n^{d/2}$. Д. Хейклен и К. Хофман [34] доказали нестандартность для размерности $d = 1$, затем фактически вычислили для $d = 1$ энтропию, а А. Вершик и А. Горбульский [26] доказали нестандартность для $d > 1$ и с помощью масштабированной энтропии показали неизоморфность фильтраций для разных d. Из последнего результата следует, что если размерности решеток d различны, то нельзя обратимым образом перекодировать марковский процесс случайного блуждания на одной решетке в сдвиг на другой, хотя (при $d > 3$) все эти марковские сдвиги — бернуллиевские.

Динамика метрик в случае фильтраций тесно связана с конструкцией так называемой башни мер, позволяющей строить предельные метрические пространства для последовательности итерированных компактов (см. [21, 25]). Соответствующая комбинаторика весьма интересна и имеет отношение к действию групп автоморфизмов деревьев и близких к ним групп.

Литература

1. *Shannon C.* A Mathematical theory of communication // Bell System Techn. J. 1948. Vol. 27, № 3. P. 379—423; Vol. 28, № 4. P. 623—656. (Первый руский перевод: *Шеннон К.* Статистическая теория передачи электрических сигналов // Теория передачи электрических сигналов при наличии помех / Под ред. Н. А. Железнова. М.: ИИЛ, 1953.)
2. *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике / С предисловием А. Н. Колмогорова. М.: ИЛ, 1963.
3. *Хинчин А. Я.* Понятие энтропии в теории вероятностей // УМН. 1953. Т. VIII, вып. 3(55). С. 3—20.
4. *Хинчин А. Я.* Об основных теоремах теории информации // УМН. 1956. Т. 11, вып. 1. С. 17—75.

[1] Линейный рост здесь соответствует логарифмическому росту для группы $\mathbb{Z}$, поскольку группа $\sum \mathbb{Z}_2$, рассматриваемая в примерах, относящихся к диадическим фильтрациям, имеет бесконечное число образующих, а рост масштабирующей последовательности соотносят с ростом числа слов в группе, который в этих примерах экспоненциален.

5. *Колмогоров А. Н.* Теория передачи информации // Сессия Академии наук СССР по научным проблемам автоматизации производства. 15—20 окт. 1956 г. М.: Изд-во АН СССР, 1957. С. 66—99.
6. *Колмогоров А. Н.* Общая теория динамических систем и классическая механика // Труды Междунар. математического конгресса. Амстердам, 1954: Обзор. докл. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 187—208.
7. *Гельфанд И. М., Колмогоров А. Н., Яглом А. М.* К общему определнию количества информации // ДАН СССР. Т. 111, вып. 4. С. 745—748.
8. *Гельфанд И. М., Колмогоров А. Н., Яглом А. М.* Количество информации и энтропия для непрерывных распределений // Труды III Всесоюзн. Мат. съезда (1956). Изд-во АН СССР, 1958. Т. 3. С. 300—320.
9. *Колмогоров А. Н.* Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространства Лебега // ДАН СССР. 1958. Т. 119, вып. 5. С. 861—864.
10. *Колмогоров А. Н.* Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов // ДАН СССР. 1959. Т. 124, вып. 4. С. 754—755.
11. *Синай Я. Г.* О понятии энтропии динамической системы // ДАН СССР. 1959. Т. 124, вып. 4. С. 768—771.
12. *Sinai Ya. G.* About A. N. Kolmogorov's work on the entropy of dynamical systems // Ergod. Th. Dyn. Syst. 1988. Vol. 8. P. 501—502.
13. *Рохлин В. А.* Новый прогресс в теории преобразований с инвариантной мерой // УМН. 1960. Т. 15. вып. 4(94). Р. 3—26.
14. *Рохлин В. А.* Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой // УМН. 1967. Т. 22, вып. 5. С. 3—56.
15. *Пинскер М. С.* Информация и информационная устойчивость случайных величин и процессов. М.: Изд-во АН СССР, 1960. 201 с.
16. *Орнстейн Д.* Эргодическая теория, случайность и динамические системы. М.: Мир, 1978. 168 с.
17. *Кушниренко А. Г.* О метрических инвариантах типа энтропии // УМН. 1967. Т. 22, вып. 5. С. 57—65.
18. *Вершик А. М.* Убывающие последовательности измеримых разбиений и их применения // ДАН СССР. 1970. Т. 193, № 4. С. 748—751.
19. *Вершик А. М.* Четыре определения шкалы автоморфизма // Функц. анал. и его прил. 1973. Т. 7, № 3. С. 1—17.
20. *Юзвинский С. А.* Различение K-автоморфизмов шкалой // Функц. анал и его прил. 1973. Т. 7, № 4. С. 70—75.
21. *Вершик А. М.* Теория убывающих последовательностей измеримых разбиений // Алгебра и анализ. 1994. Т. 6, вып. 4. С. 1—68.
22. *Канторович Л. В.* О перемещении масс // ДАН СССР. 1942. Т. 37, вып. 7—8. С. 227—229.
23. *Канторович Л. В., Рубинштейн Г. Ш.* Об одном пространстве вполне аддитивных функций // Вестн. ЛГУ Матем. Мех. Астрон. 1958. Т. 7, вып. 2. С. 52—59.

24. *Вершик А. М.* Случайные метрические пространства и универсальность // Успехи мат. наук. 2004. Т. 59, вып. 2. С. 65—104.
25. *Вершик А. М.* Динамическая теория роста в группах: энтропия, границы, примеры // УМН. 2000. Т. 55, вып. 4. С. 59—128.
26. *Вершик А. М.*, *Горбульский А. Д.* Масштабированная энтропия фильтраций σ-алгебр // Теория вероятн. и прим. 2007. Т. 52, вып. 3. Р. 446—467.
27. *Feldman J.* r-entropy, equipartition and Ornstein's isomorphism theorem in R^n // Israel Math. Journ. 1980. Vol. 36. P. 321—345.
28. *Ratner M.* Some invariant of Kakutani equivalence // Israel Math. Journ. 1981. Vol. 38. P. 232—240.
29. *Ferenczi S.* Measure-theoretic complexity of ergodic systems // Israel Math. Journ. 1997. Vol. 100. P. 180—207.
30. *Katok A.*, *Thouvenot J.-P.* Slow entropy type invariants and smooth realization of commuting measure preserving transformation // Ann. Inst. H. Poincare. 1997. Vol. 33. P. 323—338.
31. *Gromov M.* Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces. Boston, MA: Birkhäuser Boston Inc., 2007. (Modern Birkhäuser Classics).
32. *Kalikow S. A.* T, T^{-1} transformation is not loosely Bernoulli // Ann. of Math. (2). 1982. Vol. 115, № 2. P. 393—409.
33. *Hoffman C.*, *Rudolph D.* If the $[T, \mathrm{Diff}]$ automorphism is Bernoulli, then the $[T, \mathrm{Diff}]$ endomorphism is standard // Studia Math. 2003. Vol. 155, № 3. P. 195—206.
34. *Heicklen D.*, *Hoffman C.* T, T^{-1} is not standard // Ergodic Theory Dyn. Systems. 1998. Vol. 18, № 4. P. 875—878.
35. *Heicklen D.*, *Hoffman C.*, *Rudolph D.* Entropy and dyadic equivalence of random walks on a random scenery // Adv. Math. 2000. Vol. 156, № 2. 157—179.
36. *Hoffman C.*, *Rudolph D.* A dyadic endomorphism which is Bernoulli but not standard // Israel J. Math. 2002. Vol. 130. P. 365—379.
37. *Hoffman C.*, *Rudolph D.* Uniform endomorphisms which are isomorphic to a Bernoulli shift // Ann. Math. 2. 2002. Vol. 156, № 1. P. 79—101.
38. *Hollander F.*, *Steif J.* Random walk in random scenery // IMS Lect. Notes. 2006. Vol. 48. P. 53—65.
39. *Мартин Н.*, *Инглэнд Дж.* Математическая теория энтропии. М.: Мир, 1988. (Пер. книги: *Martin N.*, *England J.* Mathematical theory of entropy / Ed. G.-C. Rota. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1981. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications; Vol. 12).)
40. Handbook of dynamical systmes / Eds. B. Hasselbladt, A. Katok. North-Holland, 2002.