Описание характеров и фактор-представлений бесконечной симметрической инверсной полугруппы*.

А. М. Вершик, П. П. Никитин

С.-Петербургское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова РАН
191023, Ст.-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27

E-mail: vershik@pdmi.ras.ru, pnikitin0103@yahoo.co.uk

Аннотация

В статье приводится полный список неразложимых характеров бесконечной симметрической полугруппы. По сравнению с аналогичным списком для бесконечной симметрической группы необходимо ввести лишь один новый параметр, имеющий наглядный комбинаторный смысл. В работе используется теория представлений конечных симметрических полугрупп и теория представлений бесконечной симметрической группы.

Введение

Эта статья посвящена описанию характеров на бесконечной симметрической полугруппе. Основной результат есть синтез, с одной стороны, теории представлений конечных симметрических полугрупп, развитой Манном [13, 14], Соломоном [17], Халверсоном [12], Вагнером [1], Престоном [16], Поповой [11], а с другой — теории представлений локально-конечных групп, в частности, бесконечной симметрической группы и локально-полупростых алгебр — в работах То́ма [18], Вершика-Керова [4, 5, 6, 20]. Анализ диаграммы Браттели для бесконечной симметрической полугруппы, проведенный ниже, напоминает анализ в более сложной ситуации — задаче о характерах алгебр Брауэра-Вейля [7]. Симметрическая полугруппа возникала не только в литературе по теории полугрупп и их представлений, но и в связи с теорией представлений бесконечной симметрической группы [15], для определения полугруппы кос [19]; также рассматривались q-аналоги симметрических полугрупп [12]. По-видимому, определение бесконечной симметрической полугруппы, данное в статье, и проблемы, связанные с ее представлениями, в литературе до сих пор не обсуждались.

Рассмотрим множество всех взаимно-однозначных *частичных* отображений множества $\{1, \ldots, n\}$, т.е. взаимно-однозначных отображений, действующих из некоторого подмножества множества $\{1, \ldots, n\}$ на некоторое

*Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ-08-01-00379-а и РФФИ-09-01-12175-офи-м.

(возможно, отличное от первого) подмножество множества $\{1, \ldots, n\}$. Зададим умножение двух таких отображений как композицию отображений там, где она определена. В результате мы получим полугруппу с нулем (нигде не определенное отображение), называемую обычно ***симметрической инверсной полугруппой***, обозначим ее R_n (есть и другие обозначения см. [9, 17]). Отображение с пустой областью определения будет нулем этой полугруппы.

Очевидным образом симметрическая группа S_n есть подгруппа полугруппы $R_n : S_n \subset R_n$. Полугруппа R_n может быть представлена как полугруппа всех 0-1 матриц с не более чем одной единицей в каждой строке и каждом столбце, с матричным умножением. Эта реализация аналогична натуральному представлению симметрической группы. Матрицы такого вида находятся во взаимно-однозначном соответствии со всевозможными расстановками не бьющих друг друга ладей на доске $n \times n$, поэтому этот моноид (полугруппа с единицей) был назван Л. Соломоном ***ладейным моноидом (rook monoid)***.

Очень важны следующие свойства инверсных полугрупп, в частности, симметрической инверсной полугруппы (см. Дополнение):

1. комплексная полугрупповая алгебра любой конечной инверсной полугруппы полупроста [10, 14];

2. любая конечная инверсная полугруппа может быть изоморфно вложена в инверсную симметрическую полугруппу [1, 16];

3. класс конечных инверсных полугрупп порождает в точности класс инволютивных полупростых биалгебр [2].

Следующий результат, описывающий характеры конечной инверсной полугруппы, фактически был найден несколькими авторами, его комбинаторно-динамическая характерстика описана в [12].

Множество неприводимых представлений (и следовательно, множество неприводимых характеров) симметрической полугруппы R_n параметризуется набором всех диаграмм Юнга с не более чем n клетками. Ветвление представлений в терминах диаграмм выглядит так: переход от неприводимого представления полугруппы R_n к представлениям полугруппы R_{n+1} состоит в том, что соответствующая представлению диаграмма Юнга либо остается без изменений, либо получает обычным образом одну новую клетку (растет).

Бесконечная симметрическая группа S_∞ есть счетная группа всех финитных (т.е. нетождественных лишь на конечном подмножестве) взаимно-однозначных отображений счетного множества в себя. Так же можно определить ***бесконечную симметрическую инверсную полугруппу*** R_∞[1] как множество частичных взаимно-однозначных не тождественных на ко-

[1] Мы опускаем, как правило, слово "инверсная и говорим просто о (бесконечной) симметрической полугруппе.

нечном множестве отображений счетного множества в себя.[2] Группа S_∞ есть индуктивный предел цепочки полугрупп S_n, $n = 1, 2, \ldots$, с естественными вложениями групп. Точно так же полугруппы R_n, $n = 1, 2, \ldots$ образуют цепочку относительно естественных мономорфизмов полугрупп[3] $R_0 \subset R_1 \subset \ldots \subset R_n \subset \ldots$, и ее индуктивный предел есть бесконечная симметрическая инверсная полугруппа. Связь между диаграммами Браттели для бесконечной симметрической группы (граф Юнга) и диаграммой для бесконечной симметрической полугруппы естественно приводит к новой операции на графах, сопоставляющей каждой диаграмме Браттели ее "медленный" вариант. (Ср. с понятием "паскализации" графа в [7]).

Наши результаты опираются на хорошо развитую теорию представлений бесконечной симметрической группы S_∞ и отчасти обобщают ее. Напомним, что список характеров бесконечной симметрической группы был найден Э.Тома [18]. Новое доказательство его теоремы, данное А.М.Вершиком и С.В.Керовым [4], было основано на аппроксимации характеров бесконечной группы характерами конечных симметрических групп и использовало комбинаторику диаграмм Юнга, которые, как хорошо известно, параметризуют неприводимые комплексные представления конечных симметрических групп. Параметрами неразложимых характеров в изложении [4] служат частоты строк и столбцов последовательности растущих диаграмм Юнга. *Основной результат настоящей статьи состоит в том, что список параметров характеров бесконечной симметрической полугруппы получается из списка параметров Тома добавлением одного нового числа из отрезка* $[0, 1]$. Смысл этого параметра состоит в следующем. Параметрами неприводимых представлений конечной симметрической полугруппы R_n также служат диаграммы Юнга, но с любым числом клеток k, не превосходящим n; последовательность растущих диаграмм, тем самым, помимо предельных частот строк и столбцов имеет еще один параметр — предел отношения k/n, равный относительной скорости, с которой путь в графе ветвления проходит по диаграммам Юнга или, иначе говоря, равный замедлению скорости аппроксимации характера бесконечной полугруппы конечными характерами.

Описание характеров полугруппы позволяет дать реализацию самого представления. Она осуществляется в том же пространстве, что и представление бесконечной симметрической полугруппы. Точнее, пространство представления строится точно так же, как и в модели фактор-представлений бесконечной симметрической группы в работе [5], но по расширенному списку параметров, см. теорему 2.16.

В первом разделе приведены необходимые факты теории представлений конечных симметрических инверсных полугрупп. Второй раздел посвящен непосредственно теории представлений бесконечной симметрической полу-

[2]Тем самым в бесконечной симметрической инверсной полугруппе нулевого отображения нет, так как всякий элемент должен быть тождественным отображением на дополнении к конечному множеству.

[3]При мономорфизме $R_n \subset R_{n+1}$ ноль полугруппы переходит не в ноль, а в некоторый проектор, точнее — в образующую $p_n \in R_{n+1}$, см. теорему 1.7.

группы R_∞ и содержит основные результаты. В Дополнении собраны общие сведения о конечных инверсных полугруппах и некоторые новые факты об их полугрупповых алгебрах как алгебрах Хопфа.

1 Теория представлений конечных симметрических инверсных полугрупп

1.1 Полупростота полугрупповой алгебры $\mathbb{C}[R_n]$. Полный список неприводимых представлений.

Назовем ***рангом*** отображения $a \in R_n$ число элементов, на которых отображение не определено. Каждое из множеств $A_r = \{a \in R_n | \text{ранг } a \text{ не меньше } r\}$ при $0 \leq r \leq n$ является идеалом полугруппы R_n. Цепочка идеалов

$$R_n = A_0 \supset A_1 \supset \cdots \supset A_n$$

является главным рядом полугруппы R_n, т.е. не существует идеала, лежащего строго между A_r и A_{r+1}, см. теорему 1.1.

Обозначим через $\mathbb{C}[S_n]$ комплексную групповую алгебру симметрической группы. Эта алгебра, как и групповая алгебра любой конечной группы, является полупростой, в силу наличия инвариантного скалярного произведения.

Комплексная полугрупповая алгебра инверсной полугруппы также всегда полупроста, что следует из общей теоремы 3.3. Явное разложение на матричные компоненты алгебры $\mathbb{C}[R_n]$ предложено В. Д. Манном [13].

Теорема 1.1 (Манн). *Алгебра $\mathbb{C}[R_n]$ полупроста и имеет вид*

$$\mathbb{C}[R_n] \cong \oplus_{r=0}^{n} M_{\binom{n}{r}}(\mathbb{C}[S_r]).$$

Здесь $M_l(A)$ есть алгебра матриц порядка l над алгеброй A. Описание представлений алгебры $\mathbb{C}[R_n]$ дается следующей теоремой.

Теорема 1.2 (Манн). *Пусть полугруппа S изоморфна полугруппе $M_n(G)$ матриц размера $n \times n$ с элементами из некоторой группы G. Пусть поле F имеет нулевую характеристику, или является простым числом, не делящим порядок группы G. Пусть $\{\gamma_p\}_{p=1}^{k}$ — полный набор неэквивалентных неприводимых представлений группы G над F. Обозначим через γ'_p отображение*

$$\gamma'_p(\{x_{ij}\}) = \{\gamma_p(x_{ij})\},$$

для любой матрицы $\{x_{ij}\} \in S = M_n(G)$. Тогда $\{\gamma'_p\}_{p=1}^{k}$— полный набор неэквивалентных неприводимых представлений полугруппы S над F.

Обозначим через $\mathcal{P}_r$ множество всех разбиений натурального числа r. Из предыдущей теоремы следует, что множество неприводимых представлений полугруппы R_n может быть естественным образом параметризовано множеством $\cup_{r=0}^{n} \mathcal{P}_r$.

Замечание 1.3. Как видно из приведенной выше конструкции, любое неприводимое представление полугруппы R_n является продолжением однозначно определенного индуцированного представления группы S_n. Именно, рассмотрим представление подгруппы $S_r \times S_{n-r} \subset S_n$, где действие группы S_r отвечает разбиению λ, а группа S_{n-r} действует тривиально. Соответствующее индуцированное представление группы S_n может быть продолжено до неприводимого представления полугруппы R_n, отвечающего разбиению $\lambda \in \mathcal{P}_r$. (Это отмечено также в [15].)

Замечание 1.4. На полугрупповой алгебре симметрической полугруппы $\mathbb{C}[R_n]$, как и на групповой алгебре симметрической группы $\mathbb{C}[S_n]$, есть инволюция, переводящая, в частности, каждое неприводимое представление π в представление $\operatorname{sgn}\pi$. Эта инволюция соответствует естественной инволюции графа Юнга и, следовательно, медленного графа Юнга, см. определение в параграфе 2.1), состоящей в переходе от диаграммы к отражению этой диаграммы от диагонали. Однако, эта инволюция не является инволюцией группы S_n или полугруппы R_n.

1.2 Формула для характеров конечной симметрической полугруппы.

Манну [13] принадлежит также формула, выражающая характеры симметрической инверсной полугруппы через характеры симметрических групп. Для формулировки теоремы для каждого подмножества $K \subset \{1, \ldots, n\}$, $|K| = r$, зафиксируем произвольную частичную биекцию $\mu_K : K \mapsto \{1, \ldots, r\}$. Через $\mu_K^- : \{1, \ldots, r\} \mapsto K$ будем обозначать отображение, обратное к μ_K на K: $\mu_K^- \circ \mu_K$ — тождественное отображение на множестве K.

Теорема 1.5 (Манн). *Пусть $1 \leq r \leq n$. Пусть χ — характер симметрической группы S_r и χ^* — соответствующий характер полугруппы R_n. Тогда для любого элемента $\sigma \in R_n$*

$$\chi^*(\sigma) = \sum \chi(\mu_K \sigma \mu_K^-),$$

где сумма берется по всем подмножествам K области определения σ, таким что $|K| = r$ и $K\sigma = K$.

1.3 Задание полугруппы через образующие и соотношения

Нас будут интересовать семейства образующих полугрупп $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$, монотонные при вложениях $R_n \subset R_{n+1}$. Этому условию удовлетворяют образующие, предложенные Л. М. Поповой [11] и образующие, предложенные Т. Халверсоном [12]. Образующие и соотношения у Халверсона выписаны для q-аналога симметрической инверсной полугруппы, ниже приведен частный случай доказанного им утверждения для $q = 1$.

Через σ_i, $1 \leq i < n$, обозначим коксетеровские образующие группы S_n. Через $p_i \in R_n$, $1 \leq i \leq n$, обозначим следующие отображения: $p_i(j)$ неопределено, если $j \leq i$ и $p_i(j) = j$, если $j > i$.

Теорема 1.6 (Попова)**.** *Полугруппа R_n задается образующими σ_1, …, σ_{n-1}, p_1 и следующими соотношениями:*

1. *коксетеровские соотношения для группы S_n;*
2. $\sigma_2 p_1 \sigma_2 = \sigma_2\sigma_3 \dots \sigma_{n-1} p_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_{n-1} = p_1 = p_1^2$;
3. $(p_1\sigma_1)^2 = p_1\sigma_1 p_1 = (\sigma_1 p_1)^2$.

Теорема 1.7 (Халверсон)**.** *Полугруппа R_n задается образующими σ_1, …, σ_{n-1}, p_1, …, p_n и следующими соотношениями:*

1. *коксетеровские соотношения для группы S_n;*
2. $\sigma_i p_j = p_j \sigma_i = p_j$ *при* $1 \leq i < j \leq n$;
3. $\sigma_i p_j = p_j \sigma_i$ *при* $1 \leq j < i \leq n-1$;
4. $p_i^2 = p_i$ *при* $1 \leq i \leq n$;
5. $p_{i+1} = p_i \sigma_i p_i$ *при* $1 \leq i \leq n-1$.

Любопытное задание полугруппы R_n образующими и соотношениями принадлежит Л. Соломону [17]: в дополнение к коксетеровским образующим группы S_n он рассматривает также "правый сдвиг" ν:

$$\nu(i) = \begin{cases} i+1 & \text{при } 1 \leq i < n; \\ \text{неопределено} & \text{при } i = n. \end{cases}$$

Теорема 1.8 (Соломон)**.** *Полугруппа R_n задается образующими σ_1, …, σ_{n-1}, ν и следующими соотношениями:*

1. *коксетеровские соотношения для группы S_n;*
2. $\nu^{i+1}\sigma_i = \nu^{i+1}$;
3. $\sigma_i \nu^{n-i+1} = \nu^{n-i+1}$;
4. $\sigma_i \nu = \nu \sigma_{i+1}$;
5. $\nu \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_{n-1} \nu = \nu$,

где $1 \leq i \leq n-1$, и $1 \leq i \leq n-2$ в пункте 4.

2 Теория представлений бесконечной симметрической инверсной полугруппы

В этом разделе предполагается знакомство с основными понятиями и фактами теории локально-полупростых и конечно-аппроксимативных алгебр. Кроме того, используются факты теории представлений конечных симметрических групп S_n и бесконечной симметрической группы S_∞. См., например, [20].

Существует естественное вложение полугрупп $R_n \subset R_{n+1}$, при котором каждое отображение из полугруппы R_n переходит в отображение из R_{n+1}, переводящее элемент $n+1$ в себя. Рассмотрим индуктивный предел цепочки полугрупп $R_0 \subset \ R_1 \subset \cdots \subset R_n \subset \cdots$, который мы будем называть ***бесконечной симметрической инверсной полугруппой*** R_∞.

2.1 Граф ветвления алгебры $\mathbb{C}[R_\infty]$.

Через $\mathbb{Y}$ обозначим граф Юнга, через $\mathbb{Y}_n$ — этажи этого графа, вершины которого нумеруются всеми возможными разбиениями числа n (диаграммами Юнга). Через $|\lambda|$ будем обозначать число клеток диаграммы λ (сумму частей разбиения λ).

Через $\tilde{\mathbb{Y}}$ обозначим граф ветвления полугрупповой алгебры $\mathbb{C}[R_\infty]$. Описание графа $\tilde{\mathbb{Y}}$ принадлежит Т. Халверсону [12].

Теорема 2.1 (Халверсон)**.** *Граф ветвления $\tilde{\mathbb{Y}}$ описывается следующим образом:*

1. *вершины n-ного этажа нумеруются всеми диаграммами Юнга с не более чем n клетками, $\tilde{\mathbb{Y}}_n = \cup_{i=0}^n \mathbb{Y}_i$;*

2. *ребро соединяет вершины $\lambda \in \tilde{\mathbb{Y}}_n$ и $\mu \in \tilde{\mathbb{Y}}_{n+1}$ если или $\lambda = \mu$, или μ получается из λ добавлением одной клетки.*

Это приводит нас к следующему определению: ***медленным графом*** $\tilde{\Gamma}$, построенным по графу ветвления Γ, называется следующий граф:

1. вершины n-ного этажа графа $\tilde{\Gamma}$ есть объединение вершин всех этажей исходного графа Γ с номерами не более n, $\tilde{\Gamma}_n = \cup_{i=0}^n \Gamma_i$;

2. ребро соединяет вершины $\lambda \in \tilde{\Gamma}_n$ и $\mu \in \tilde{\Gamma}_{n+1}$, если или $\lambda = \mu$, или вершина μ соединена ребром с вершиной λ в исходном графе.

Напомним, что графом Паскаля $\mathbb{P}$ называется следующий граф:

1. множество $\mathbb{P}$ вершин n-ного этажа есть множество пар целых чисел (n, k), $0 \leq k \leq n$;

2. ребро соединяет вершины $(n, k) \in \mathbb{P}_n$ и $(n+1,\ l) \in \mathbb{P}_{n+1}$, если $l = k$ или $l = k+1$.

Заметим, что если в качестве исходного графа Γ взять цепь (граф, каждый этаж которого состоит всего из одной вершины), то соответствующим медленным графом $\tilde{\Gamma}$ будет граф $\mathbb{P}$. По аналогии с графом Паскаля мы будем нумеровать вершины n-ного этажа $\tilde{\Gamma}_n$ медленного графа парами (n, λ), где $\lambda \in \Gamma_i$, $i \leq n$.

Замечание 2.2. Отметим, что если мы возьмем в качестве исходного графа граф Паскаля, $G = \mathbb{P}$, то медленным графом $\tilde{G}$ будет трехмерный аналог графа Паскаля. Для трехмерного графа Паскаля соответствующим медленным графом будет 4-хмерный граф Паскаля и т.д. Определение многомерных аналогов графа Паскаля и описание следов соответствующих алгебр см., например, в [6].

Замечание 2.3. Для множества путей на графе ветвления $\tilde{\mathbb{Y}}$ существует биекция со случайными блужданиями на графе Юнга следующего вида: в каждый момент времени разрешено или остаться в прежней вершине, или допустимым образом спуститься на этаж ниже. Исходя из этого описания, графы, подобные $\tilde{\mathbb{Y}}$, названы медленными.

Замечание 2.4. В работе [7] изучалась теория представлений бесконечной алгебры Брауэра. Аналогично предыдущему замечанию можно построить биекцию между путями в графе ветвления алгебры Брауэра и случайными блужданиями по графу Юнга похожего вида: начиная с пустой диаграммы в графе Юнга, на каждом следующем шаге можно перейти из текущей вершины либо в вершину следующего этажа (соединенную ребром с текущей), либо в вершину предыдущего этажа (также соединенную ребром с текущей).

2.2 Сведения из теории локально-полупростых алгебр

Обозначим через $T(\Gamma)$ пространство путей графа Γ. На множестве $T(\Gamma)$ имеется "хвостовое" отношение эквивалентности (см. [4]): пути $x, y \in T(\Gamma)$ эквивалентны, $x \sim y$, если они совпадают, начиная с некоторого места. Разбиение на классы эквивалентности будем обозначать через $\xi = \xi_\Gamma$. Также для каждого $k \in \mathbb{N} \cup 0$ и каждого пути s длины k, $s = (s_0, s_1, \cdots, s_k)$, обозначим через $F_s \subset T(\Gamma)$ цилиндр $F_s = \{t \in T | t_i = s_i \text{ при } 0 \leq i \leq k\}$.

Для $x, y \in \Gamma$ обозначим через $\dim(x; y)$ число путей, ведущих из вершины x в вершину y. Через $\dim(y) = \dim(\emptyset; y)$ обозначим число всех путей в вершину y. Через $\mathcal{E}(\Gamma)$ обозначим множество эргодических центральных мер на $T(\Gamma)$. Для $\mu \in \mathcal{E}(\Gamma)$ через $\mu(y)$ обозначим меру множества всех путей, проходящих через вершину y, т.е. суммарную меру всех цилиндров F_s, $s = (s_0, s_1, \cdots, s_{|y|})$, $s_{|y|} = y$.

Мы будем использовать следующее описание характеров локально-полупростой алгебры и центральных мер на ее графе ветвления (эргодический метод).

Теорема 2.5 ([4]). *Для любой центральной эргодической меры μ множество путей $s = (s_0, s_1, \cdots, s_f, \cdots)$ таких, что для всех вершин y выпол-*

няется

$$\mu(y) = \lim_{f\to\infty} \frac{\dim(y)\cdot\dim(y;s_f)}{\dim s_f},$$

имеет полную меру.

Теорема 2.6 ([4]). *Для любого характера алгебры $A = C^*(\cup_{f=0}^{\infty} A_f)$ существует путь $\{\lambda_f\}_{f=0}^{\infty}$ в диаграмме Браттели, для которого*

$$\phi(a) = \lim_{f\to\infty} \frac{\chi_{\lambda_f}(a)}{\dim\lambda_f},$$

для всех $a \in A$. Здесь χ_{λ_f} — характер представления λ_f алгебры A_f, $\dim\lambda_f$ — размерность представления.

2.3 Описание центральных мер на медленных графах.

Ключевым свойством произвольного медленного графа $\tilde{\Gamma}$ является возможность записать пространство путей $T(\tilde{\Gamma})$ как прямое произведение пространств путей $T(\Gamma)$ и $T(\mathbb{P})$. То же верно для множества путей между любыми двумя вершинами. Более того, разбиение $\xi_{\tilde{\Gamma}}$ и центральные эргодические меры на $T(\tilde{\Gamma})$ также могут быть записаны в виде соответствующих произведений.

Лемма 2.7. *Пусть Γ — граф некоторой LS-алгебры, $\tilde{\Gamma}$ — соответствующий медленный граф. Тогда*

1. *$T(\tilde{\Gamma}) = T(\Gamma)\times T(\mathbb{P})$. Более того, число путей между любыми двумя вершинами медленного графа $\tilde{\Gamma}$ равно произведению числа путей между соответствующими вершинами исходного графа Γ и числа путей между соответствующими вершинами графа Паскаля $\mathbb{P}$:*

   (1) $\dim_{\tilde{\Gamma}}((n_1,\lambda_1);(n_2,\lambda_2)) = \dim_{\Gamma}(\lambda_1,\lambda_2)\cdot\dim_{\mathbb{P}}((n_1,|\lambda_1|);(n_2,|\lambda_2|)).$

2. *Пусть $s_{\tilde{\Gamma}}, t_{\tilde{\Gamma}} \in T(\tilde{\Gamma})$, $s_{\Gamma}, t_{\Gamma} \in T(\Gamma)$, $s_{\mathbb{P}}, t_{\mathbb{P}} \in T(\mathbb{P})$, и $s_{\tilde{\Gamma}}$ соответствует паре $(s_{\Gamma}, s_{\mathbb{P}})$, $t_{\tilde{\Gamma}}$ соответствует паре $(t_{\Gamma}, t_{\mathbb{P}})$. Тогда $s_{\tilde{\Gamma}} \sim t_{\tilde{\Gamma}}$ (относительно $\xi_{\tilde{\Gamma}}$) тогда и только тогда, когда $s_{\Gamma} \sim t_{\Gamma}$ (относительно ξ_{Γ}) и $s_{\mathbb{P}} \sim t_{\mathbb{P}}$ (относительно $\xi_{\mathbb{P}}$).*

Доказательство. 1. Каждому пути в графе $\tilde{\Gamma}$ соответствует единственная *строго* возрастающая последовательность вершин исходного графа Γ. Кроме того, каждому пути $(i,\lambda_i)_{i=n_1}^{n_2}$ в графе $\tilde{\Gamma}$ можно сопоставить путь $(i,|\lambda_i|)_{i=n_1}^{n_2}$ в графе Паскаля. Легко понять, что по построенной паре путей исходный путь восстанавливается однозначно, откуда $T(\tilde{\Gamma}) = T(\Gamma)\times T(\mathbb{P})$.

Заметим, что построенное отображение задает биекцию между путями из вершины (n_1,λ_1) в вершину (n_2,λ_2) в графе $\tilde{\Gamma}$ и парами путей — между соответствующими вершинами исходного графа Γ и между соответствующими вершинами графа Паскаля $\mathbb{P}$, что доказывает формулу (1).

2. Биекция в пункте 1 строится таким образом, что для путей $t_{\tilde{\Gamma}} = (t_\Gamma, t_\mathbb{P})$ "хвост" пути $t_{\tilde{\Gamma}}$ зависит только от "хвостов" путей t_Γ и $t_\mathbb{P}$, и наоборот. $\square$

Теорема 2.8 (Описание центральных мер)**.** *Существует естественная биекция $\mathcal{E}(\tilde{\Gamma}) \cong \mathcal{E}(\Gamma) \times \mathcal{E}(\mathbb{P})$. Любая центральная эргодическая мера $M_{\tilde{\Gamma}} \in \mathcal{E}(\tilde{\Gamma})$ есть произведение центральных эргодических мер $M_\Gamma \in \mathcal{E}(\Gamma)$ и $M_\mathbb{P} \in \mathcal{E}(\mathbb{P})$, а именно, для любого цилиндра $F_{(n,\lambda)}$ выполняется $M_{\tilde{\Gamma}}(F_{(n,\lambda)}) = M_\Gamma(F_\lambda) \cdot M_\mathbb{P}(F_{(n,|\lambda|)})$.*

Доказательство. Для центральной эргодической меры $M_{\tilde{\Gamma}} \in \mathcal{E}(\tilde{\Gamma})$ в соответствии с разложением $T(\tilde{\Gamma}) = T(\Gamma) \times T(\mathbb{P})$ рассмотрим проекции $M_\Gamma \in \mathcal{E}(\Gamma)$ и $M_\mathbb{P} \in \mathcal{E}(\mathbb{P})$, задаваемые следующим образом:

$$M_\Gamma(F_\lambda) = \sum_{n \geq |\lambda|} M_{\tilde{\Gamma}}(F_{(n,\lambda)}), \quad M_\mathbb{P}(F_{(n,k)}) = \sum_{|\lambda|=k} M_{\tilde{\Gamma}}(F_{(n,\lambda)}).$$

Меры M_Γ и $M_\mathbb{P}$ центральны в силу центральности $M_{\tilde{\Gamma}}$.

Далее, согласно формуле (1) нашей теоремы и теореме 2.5,

$$\begin{aligned}(2) \quad M_{\tilde{\Gamma}}(F_{(n,\lambda)}) &= \lim_{f\to\infty} \frac{\dim((n,\lambda_n);(f,\lambda_f))}{\dim(f,\lambda_f)} = \\ &\lim_{f\to\infty} \frac{\dim_\mathbb{P}((n,|\lambda_n|);(f,|\lambda_f|))}{\dim_\mathbb{P}(f,|\lambda_f|)} \cdot \frac{\dim_\Gamma(\lambda_n;\lambda_f)}{\dim_\Gamma(\lambda_f)} = \\ &\qquad \lim_{f\to\infty} \frac{\dim_\mathbb{P}(n,|\lambda_n|);(f,|\lambda_f|))}{\dim_\mathbb{P}(f,|\lambda_f|)} \cdot \lim_{f\to\infty} \frac{\dim_\Gamma(\lambda_n;\lambda_f)}{\dim_\Gamma(\lambda_f)}.\end{aligned}$$

Пределы в правой части равенства (2) существуют и равны $M_\Gamma(F_\lambda)$ и $M_\mathbb{P}(F_{(n,k)})$, что доказывает требуемую формулу для $M_{\tilde{\Gamma}}$. Эргодичность M_Γ и $M_\mathbb{P}$ следует из эргодичности $M_{\tilde{\Gamma}}$.

Обратно, произведение в указанном смысле центральных эргодических мер $M_\Gamma \in \mathcal{E}(\Gamma)$ и $M_\mathbb{P} \in \mathcal{E}(\mathbb{P})$ дает центральную эргодическую меру $M_{\tilde{\Gamma}} \in \mathcal{E}(\tilde{\Gamma})$. Центральность следует из леммы 2.7, эргодичность — из равенства (2). $\square$

Напомним (см., например, [6]), что для графа Паскаля $\mathbb{P}$ существование пределов в теореме 2.5 равносильно тому, что для пути

$$((0,k_0),\ (1,k_1),\dots\ ,(f,k_f),\dots\ )$$

существует предел

$$(3) \qquad \lim_{f\to\infty} k_f/f = \delta, \quad \delta \in [0;1],$$

и каждому $\delta \in [0;1]$ отвечает единственная центральная мера $M_\mathbb{P} = M_\mathbb{P}^\delta$.

Следствие 2.9. *Любая мера $M_{\tilde{\Gamma}} \in \mathcal{E}(\tilde{\Gamma})$ параметризуется парой (δ, M_Γ), $\delta \in [0;1]$, $M_\Gamma \in \mathcal{E}(\Gamma)$.*

Следствие 2.10. *Носитель меры $M_{\tilde{\Gamma}} = (\delta, M_\Gamma)$ на графе $\tilde{\Gamma}$ сосредоточен на путях, для которых соответствующие пути в графе Γ принадлежат носителю меры M_Γ, и, кроме того, для которых существует предел* (3).

В частности, рассмотрим произвольную центральную эргодическую меру $M_{\mathbb{Y}}$ на графе $\mathbb{Y}$, отвечающую параметрам $\alpha = \{\alpha_i\}$, $\beta = \{\beta_i\}$, γ. Тогда носитель меры $M_{\tilde{\mathbb{Y}}} = (\delta, M_{\mathbb{Y}})$ на графе $\tilde{\mathbb{Y}}$ будет сосредоточен на путях вида $\{(f, \lambda_f)\}$, где соответствующие пределы для последовательности $\{\lambda_f\}$ равны $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_i\}$, и, кроме того, существует предел $\lim_{f\to\infty} |\lambda_f|/f = \delta$.

2.4 Формула для характеров бесконечной симметрической полугруппы.

Приведенная выше биекция между множеством центральных мер на пространстве путей графа Γ и медленного графа $\tilde{\Gamma}$ имеет место для произвольного исходного градуированного графа Γ. Эта биекция переносится на множества характеров алгебр, отвечающих этим графам, в силу соответствия между центральными мерами и характерами (см. следствие ниже), однако, сами явные формулы для характеров уже существенно зависят от графов и алгебр и не имеют универсального смысла, Ниже мы доказываем формулу, выражающую характер алгебры $\mathbb{C}[R_\infty]$ через характеры алгебры алгебры $\mathbb{C}[S_\infty]$. В этом параграфе под характером мы всегда понимаем неразложимый характер.

Следствие 2.11. *Описанная выше параметризация центральных мер задает соответствие, при котором каждому характеру $\chi^{S_\infty}_{\alpha,\beta,\gamma}$ алгебры $\mathbb{C}[S_\infty]$ и числу $\delta \in [0,1]$ отвечает некоторый характер $\chi^{R_\infty}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ алгебры $\mathbb{C}[R_\infty]$.*

Для упрощения обозначений ниже мы часто опускаем верхние индексы и параметр γ, (который выражается через α и β), полагая:

$$\chi_{\alpha,\beta} \equiv \chi^{S_\infty}_{\alpha,\beta,\gamma}, \quad \chi_{\alpha,\beta,\delta} \equiv \chi^{R_\infty}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}.$$

Сопряжение элемента $\sigma \in R_n$ с элементом симметрической группы не меняет значения характера, поэтому достаточно рассмотреть ***приведенные элементы*** $\sigma^\circ \in R_n$, для которых все неподвижные точки находятся в конце: для любого элемента $\sigma \in R_n$ существуют $g \in S_n$, $n(\sigma) \in \mathbb{N} \cup 0$, такие что $\sigma^\circ = g\sigma g^{-1}$, при этом $\sigma^\circ(i) \neq i$ при $i < n(\sigma)$ и $\sigma^\circ(i) = i$ при $i \geq n(\sigma)$. По определению вложения $R_n \subset R_{n+1}$ мы можем считать, что $\sigma^\circ \in R_{n(\sigma)}$. Порядок $n(\sigma)$ элемента σ° однозначно определяется элементом σ.

Введем множество $M_k(\sigma) \subset S_n$, элементы которого будем параметризовать всеми k-элементными подмножествами $K \subset \{1, \ldots, n\}$, отображаемыми элементом σ на себя: каждому такому подмножеству сопоставим биекцию $\tilde{\sigma} \in S_n$, совпадающую с σ на K и тождественную в остальных точках.

Заметим, что для каждого элемента полугруппы R_n существует максимальное (возможно, пустое) подмножество множества $\{1, \ldots, n\}$, взаимнооднозначно отображаемое этим элементом на себя. Сужение элемента на это подмножество мы будем называть ***обратимой частью*** исходного элемента. Обратимую часть любого элемента $\sigma \in R_n$ можно рассматривать как элемент некоторой симметрической группы S_r, $r \leq n$, и, следовательно, можно записать как произведение непересекающихся циклов. Множество $M_k(\sigma)$ также может быть параметризовано множеством всех поднаборов циклов суммарной длины k из циклического разложения обратимой части элемента σ.

В следующей теореме значение неразложимого характера бесконечной симметрической полугруппы на элементе $\sigma \in R_n$ представляется в виде линейной комбинации значений соответствующего характера Тома на каждом из элементов дизъюнктного объединения $\sqcup_k M_k(\sigma)$ с некоторыми коэффициентами, зависящими только от параметра δ.

Теорема 2.12 (Формула для характеров)**.** *Пусть* $\chi^{R_\infty}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \equiv \chi_{\alpha,\beta,\delta}$ *— неразложимый характер алгебры* $\mathbb{C}[R_\infty]$, $\chi^{S_\infty}_{\alpha,\gamma,\beta} \equiv \chi_{\alpha,\beta}$ *— соответствующий неразложимый характер алгебры* $\mathbb{C}[S_\infty]$ *и* $\sigma \in R_\infty$ *— приведенный элемент полугруппы. Тогда*

$$\chi_{\alpha,\beta,\delta}(\sigma) = \sum_{k=0}^{n\sigma}\left(\delta^{n(\sigma)-k}(1-\delta)^k \cdot \sum_{\tilde{\sigma}\in M_k(\sigma)} \chi_{\alpha,\beta}(\tilde{\sigma})\right).$$

Доказательство. Согласно теореме 2.6, существует путь $\{(f,\lambda_f)\}_{f=0}^{\infty}$, для которого

$$\chi_{\alpha,\beta,\delta}(\sigma) = \lim_{f\to\infty} \frac{\chi^*_{(f,\lambda_f)}(\sigma)}{\dim(f,\lambda_f)}.$$

Напомним, что элемент $\sigma \in R_n$ рассматривается как элемент полугруппы R_f, тождественный на подмножестве $\{n+1,\ldots,f\}$. По теореме 1.5 для вычисления характера $\chi^*_{(f,\lambda_f)}(\sigma)$ достаточно описать неподвижные под действием элемента $\sigma \in R_f$ подмножества множества $\{1, \ldots, f\}$ размера $|\lambda_f|$. Для полного описания таких подмножеств достаточно каждому неподвижному подмножеству размера k множества $\{1, \ldots, n\}$ сопоставить все возможные подмножества $|\lambda_f| - k$ неподвижных точек из множества $\{n+1, \ldots, f\}$. Таким образом,

$$\chi^*_{(f,\lambda_f)}(\sigma) = \sum_k\left(\binom{f-n}{|\lambda_f|-k} \cdot \sum_{\tilde{\sigma}\in M_k(\sigma)} \chi_{\lambda_f}(\tilde{\sigma})\right).$$

В силу пункта 1 леммы 2.7,

$$(4)\quad \chi_{\alpha,\beta,\delta}(\sigma) = \lim_{f\to\infty} \frac{\sum_k\left(\binom{f-n}{|\lambda_f|-k} \cdot \sum_{\tilde{\sigma}} \chi_{\lambda_f}(\tilde{\sigma})\right)}{\dim(f,|\lambda_f|)\cdot\dim(\lambda_f)} =$$
$$\sum_k\left(\lim_{f\to\infty}\frac{\binom{f-n}{|\lambda_f|-k}}{\dim(f,|\lambda_f|)} \cdot \sum_{\tilde{\sigma}} \lim_{f\to\infty}\frac{\chi_{\lambda_f}(\tilde{\sigma})}{\dim(\lambda_f)}\right).$$

Согласно следствию 2.10 и теореме 2.6, примененной к бесконечной симметрической группе S_∞, каждое из слагаемых в правом сомножителе правой части выражения (4) стремится к соответствующему значению характера $\chi_{\alpha,\beta}$. Кроме того, согласно следствию 2.10 существует предел $\lim |\lambda_f|/f = \delta$, откуда

$$\lim_{f\to\infty} \frac{\binom{f-n}{|\lambda_f|-k}}{\dim(f, |\lambda_f|)} = \delta^{n-k}(1-\delta)^k,$$

что завершает доказательство. □

Следствие 2.13. *Для произвольного элемента $\sigma \in R_n \subset R_\infty$ выполняется*

$$\chi_{\alpha,\beta,\delta}(\sigma) = \sum_{k=0}^{n}\left(\delta^{n-k}(1-\delta)^k \cdot \sum_{\tilde\sigma\in M_k(\sigma)} \chi_{\alpha,\beta}(\tilde\sigma)\right).$$

Следствие 2.14. *Характер $\chi_{\alpha,\beta,\delta}$ алгебры R_∞, суженный на S_∞, есть $\chi_{\alpha',\beta'}$, где $\alpha'_1 = \delta$, $\alpha'_i = (1-\delta)\alpha_{i-1}$ при $i > 1$, и $\beta' = (1-\delta)\beta$.*

Доказательство. Мы проверим утверждение для случая $\beta = 0$. Пусть $\alpha'_1 = \delta$, $\alpha'_i = (1-\delta)\alpha_{i-1}$ при $i > 1$. И пусть $\sigma \in S_n$. Тогда

$$\chi^{S_\infty}_{\alpha',0}(\sigma) = \prod_\gamma\left((\sum_i \alpha_i^{k_\gamma})(1-\delta)^{k_\gamma} + \delta^{k_\gamma}\right),$$

где произведение берется по всем минимальным циклам γ в циклическом разложении элемента σ, и k_γ — длины этих циклов. Раскрывая произведение, получим

$$\chi^{S_\infty}_{\alpha',0}(\sigma) = \sum_k \sum_{\tilde\sigma\in M_k(\sigma)}\left((1-\delta)^k\delta^{n-k}\cdot\prod_\gamma(\sum_i \alpha_i^{k_\gamma})\right),$$

где внутреннее произведение берется по всем минимальным циклам γ поднабора $\tilde\sigma$. Записывая последнее равенство в виде

$$\chi^{S_\infty}_{\alpha',0}(\sigma) = \sum_k\left(\delta^{n-k}(1-\delta)^k\cdot\sum_{\tilde\sigma\in M_k(\sigma)}\chi^{S_\infty}_{\alpha,0}(\tilde\sigma)\right) = \chi^{R_\infty}_{\alpha',0,\delta}(\sigma),$$

получаем искомое утверждение. □

Замечание 2.15. В предыдущем следствии параметры α и β неравноправны, несмотря на то, что мы наблюдаем симметрию в графе $\tilde{\mathbb{Y}}$. Это связано с тем, что при вложении группы S_n в полугруппу R_n ограничение неприводимых представлений полугруппы R_n приводит к представлению, индуцированному с представления подгруппы $S_r \times S_{n-r} \subset S_n$, единичного на втором сомножителе, см. замечание 1.3. Поэтому операция ограничения представления не коммутирует с инволюцией (см. замечание 1.4), что нарушает симметрию между параметрами α и β.

2.5 Реализация представлений.

Мы остановимся на случае $\sum_i \alpha_i = 1$, т.е. все $\beta_i = 0$. Рассмотрим меру на множестве $\mathbb{N}$ вида $\mu_\alpha(i) = \alpha_i$, множество последовательностей $\mathcal{X} = \prod \mathbb{N}$ с мерой $m_\alpha = \prod \mu_\alpha$ и множество $\tilde{\mathcal{X}}$ пар последовательностей, совпадающих с некоторого места. В пространстве $L^2(\tilde{\mathcal{X}}, m_\alpha)$ может быть реализовано представление симметрической группы S_∞, отвечающее параметрам $(\alpha, 0)$, см. [5, 21].

Теорема 2.16. *Реализация в пространстве функций $L^2(\tilde{\mathcal{X}}, m_{\alpha'})$ представления группы S_∞, отвечающего параметрам $(\alpha', 0)$, где α' задано в следствии 2.14, может быть продолжена до реализации представления полугруппы R_∞, отвечающего параметрам $(\alpha, 0, \delta)$.*

Доказательство. Зададим действие проектора p_1 из теоремы 1.6 следующим образом: любую последовательность $(a_1, a_2, a_3, \dots) \in \mathcal{X}$ будем переводить в последовательность $(1, a_2, a_3, \dots) \in \mathcal{X}$. Соотношения теоремы 1.6 очевидным образом выполняются.

Таким образом, нам достаточно проверить, что введение дополнительного проектора не расширяет пространство представления. Но, как показано в работе [3], пространство фактор-представления симметрической группы S_∞ совпадает со всем пространством $L^2(\tilde{\mathcal{X}}, m_{\alpha'})$, что завершает доказательство. □

Следствие 2.17. *В терминах приведенной реализации можно дать короткую формулу для характеров, как меры множества неподвижных точек, аналогично формуле для характеров симметрической группы (ср. [5]), а именно*

$$\chi_{\alpha,0,\delta}(\sigma) = m_{\alpha'}(\{x : \sigma(x) = x\}).$$

См. также [3].

3 Дополнение. Общие сведения о конечных инверсных полугруппах

В этом параграфе мы преимущественно следуем монографии [9] и статье [2].

3.1 Определение инверсной полугруппы.

Теорема 3.1. *Следующие три условия для полугруппы S равносильны:*

1. *для любого $a \in S$ существует $x \in S$, такой что $axa = a$, и любые два идемпотента полугруппы S коммутируют;*
2. *каждый главный левый и каждый главный правый идеал полугруппы S порождается единственным идемпотентом;*

3. *для любого $a \in S$ существует единственный $x \in S$, такой что $axa = a$ и $xax = x$.*

Полугруппа, удовлетворяющая условиям теоремы 3.1, называется ***инверсной полугруппой***. Элементы a и x из пункта 1 теоремы называются ***инверсными*** друг к другу, иногда используется обозначение $x = a^{-1}$. Отметим, что для любых $a, b \in S$ выполняется $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Докажем, что симметрическая инверсная полугруппа является инверсной. Для каждого частичного отображения $\sigma \in R_n$, действующего из некоторого подмножества $X \subset \{1, \ldots, n\}$ в $Y \subset \{1, \ldots, n\}$, построим отображение σ^{-1} из Y в X, обратное в обычном смысле слова, т.е. для $y \in Y$ и $x \in X$ положим $\sigma^{-1}(y) = x$, если $\sigma(x) = y$. Элементы σ и σ^{-1}, очевидно, инверсны друг к другу. Кроме того, идемпотентами симметрической инверсной полугруппы являются те и только те отображения. которые переводят в себя некоторое подмножество $X \subset \{1, \ldots, n\}$ и не определены на $\{1, \ldots, n\} \backslash X$. Следовательно, любые два идемпотента коммутируют, и по теореме 3.1 полугруппа является инверсной.

3.2 Аналог теоремы Кэли.

В. В. Вагнер [1] и Г. Престон [16] доказали для инверсных полугрупп аналог теоремы Кэли для групп.

Теорема 3.2 (Вагнер, Престон)**.** *Произвольная инверсная полугруппа S изоморфна инверсной подполугруппе симметрической инверсной полугруппы всех взаимно-однозначных частичных отображений множества S.*

Доказательство намного труднее, чем для группового аналога, и мы его не приводим (см. [9]). Отметим, что теорема справедлива как для конечных, так и для бесконечных инверсных полугрупп.

3.3 Полупростота полугрупповой алгебры.

Для произвольной конечной полугруппы S и поля F можно рассмотреть полугрупповую алгебру $F[S]$ над этим полем. Базисом в алгебре $F[S]$ являются элементы полугруппы S, закон умножения базисных элементов совпадает с законом умножения элементов полугруппы. Необходимые и достаточные условия полупростоты алгебры $F[S]$ конечной инверсной полугруппы S были независимо получены В. Д. Манном [14] и В. А. Оганесяном [10].

Теорема 3.3 (Манн, Оганесян)**.** *Полугрупповая алгебра $F[S]$ конечной инверсной полугруппы S над полем F полупроста тогда и только тогда, когда характеристика поля равна нулю или является простым числом, не делящим порядок никакой подгруппы из S.*

3.4 Инволютивные биалгебры и полугрупповые алгебры инверсной полугруппы.

Биалгеброй (см. [8]) мы называем векторное пространство над полем $\mathbb{C}$, в котором заданы согласованные структуры ассоциативной алгебры с единицей и коассоциативной алгебры с коединицей. Именно, должны удовлетворяться следующие эквивалентные условия:

1. коумножение и коединица являются гомоморфизмами соответствующих алгебр;

2. умножение и единица являются гомоморфизмами соответствующих коалгебр.

Введем также понятие ***ослабленной биалгебры*** для случая, когда выполняется только условие гомоморфности умножения и коумножения.

Групповая алгебра конечной группы со структурой свертки и диагональным коумножением является кокоммутативной биалгеброй (и даже алгеброй Хопфа). Хорошо известно (см. [8]), что полугрупповая алгебра любой конечной полугруппы (моноида) с единицей есть также кокоммутативная биалгебра с естественным определением операций.

Инволюцией алгебры называется антилинейный антиавтоморфизм второго порядка этой алгебры, антилинейный антиавтоморфизм второго порядка коалгебры называется коинволюцией. Биалгебра, снабженная инволюцией и коинволюцией, называется ***инволютивной биалгеброй*** или биалгеброй с инволюцией, если умножение коммутирует с коинволюцией, а коумножение — с инволюцией.

В [2] показано, что класс конечных инверсных полугрупп порождает в точности класс инволютивных полупростых биалгебр.

Теорема 3.4. *Полугрупповая алгебра конечной инверсной полугруппы есть полупростая кокоммутативная инволютивная биалгебра. Аналогично, двойственная полугрупповая алгебра $\mathbb{C}[S]$ конечной инверсной полугруппы S с единицей является коммутативной инволютивной биалгеброй. Обратно, всякая конечномерная, полупростая, кокоммутативная (в двойственном варианте — коммутативная) инволютивная биалгебра изоморфна (как инволютивная биалгебра) полугрупповой алгебре (соотв. двойственной полугрупповой алгебре) конечной инверсной полугруппы с единицей.*

Для инверсных полугрупп без единицы полугрупповая биалгебра является ослабленной биалгеброй (коединица не задает гомоморфизм).

Список литературы

[1] В. В. Вагнер Обобщенные группы. *ДАН СССР*, 84:1119–1122, 1952.

[2] А. М. Вершик Двойственность Крейна, позитивные 2-алгебры и дилатация коумножений *Функц. анализ и его прил.*, 41(2):99–114, 2007.

[3] А. М. Вершик Несвободные действия групп и теория характеров. *Готовится к печати.*

[4] А. М. Вершик, С. В. Керов Асимптотическая теория характеров симметрической группы. *Функц. анализ и его прил.*, 15(4):15–27, 1981.

[5] А. М. Вершик, С. В. Керов Характеры и фактор-представления бесконечной симметрической группы. *ДАН СССР*, 257(5):1037–1040, 1981.

[6] А. М. Вершик, С. В. Керов Локально-полупростые алгебры. Комбинаторная теория и K_0-функтор. *Соврем. проблемы матем. Новейшие достижения*, Итоги науки и техники, ВИНИТИ, 26:3–56, 1985.

[7] А. М. Вершик, П. П. Никитин Следы на бесконечных алгебрах Брауэра. *Функц. анализ и его прил.*, 40(3):3–11, 2006.

[8] К. Кассель *Квантовые группы.* Фазис, Москва, 1999.

[9] А. Клиффорд, Г. Престон *Алгебраическая терия полугрупп.* Москва, Мир, 1972.

[10] В. А. Оганесян О полупростоте системной алгебры. *ДАН Арм. ССР*, 21:145–147, 1955.

[11] Л. И. Попова Определяющие соотношения некоторых подгрупп частичных преобразований конечного множества. *Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А.И.Герцена*, 218:191–212, 1961.

[12] T. Halverson Representations of the q-rook monoid. *J. Algebra*, 273(1):227-251, 2004.

[13] W. D. Munn The characters of the symmetric inverse semigroup. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 53(1):13–18, 1957.

[14] W. D. Munn On semigroup algebras. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 51:1–15, 1955.

[15] G. Olshansky Unitary representations of the infinite symmetric group: a semigroup approach. *Representations of Lie groups and Lie algebras*, Académiai Kiadó, Budapest, 1985, pp. 181–197.

[16] G. B. Preston Representations of inverse semigroups. *J. London Math. Soc.*, 29:411–419, 1954.

[17] L. Solomon Representations of the rook monoid, *J. Algebra*, 256(2):309–342, 2002.

[18] E. Thoma Die unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen symmetrischen Gruppe *Math. Zeitschr.*, 85(1):40–61, 1964.

[19] V. V. Vershinin On the inverse braid monoid. *Topology Appl.*, 156(6):1153-1166.

[20] A. M. Vershik, S. V. Kerov The Grothendieck group of the infinite symmetric group and symmetric Functions (with the elements of the theory K_0-functor of AF-algebras) *Adv. Stud. Contemp. Math.*, Gordon and Breach, 7:39–118, 1990.

[21] A. M. Vershik, N. V. Tsilevich On different models of representations of the infinite symmetric group. *Adv. Appl. Math.*, 37:526–540, 2006.