Алгебра и анализ
Том 23 (2011), №1

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ ТВОРЧЕСТВЕ М. Ш. БИРМАНА

© М. З. СОЛОМЯК, Т. А. СУСЛИНА, Д. Р. ЯФАЕВ

Оглавление

Краткая биография М. Ш. Бирмана

2 июля 2009 г. ушел из жизни Михаил Шлемович Бирман, выдающийся ученый, один из мировых лидеров в спектральной теории операторов. Сфера научных интересов М. Ш. была широка и разнообразна. Он внес

значительный вклад в общую теорию операторов в гильбертовом пространстве, спектральную теорию дифференциальных операторов, математическую теорию рассеяния, теорию функций, теорию дифференциальных уравнений в частных производных и другие области. Мы предлагаем обзор наиболее значительных научных достижений М. Ш. Бирмана.

Михаил Шлемович (Соломонович) Бирман родился 17 января 1928 г. в Ленинграде. Его отец был ученым — специалистом по теоретической механике, занимал должность профессора в одном из технических вузов Ленинграда. Мать была школьной учительницей.

В годы войны семья жила в эвакуации в Свердловске, где Михаил закончил среднюю школу. После окончания войны и возвращения в Ленинград он поступил в Ленинградский электротехнический институт (ЛЭТИ). Преподаватель математики в ЛЭТИ обратил внимание на выдающиеся математические способности молодого студента и посоветовал Михаилу перевестись на математико-механический факультет Ленинградского государственного университета (ЛГУ). Михаил Шлемович последовал его совету.

В годы учебы на матмехе он специализировался по методам вычислений. Своими учителями М. Ш. считал Марка Константиновича Гавурина, который был руководителем его дипломной работы, и Леонида Витальевича Канторовича. Еще будучи студентом, М. Ш. подрабатывал в Ленинградском отделении математического института (ЛОМИ) в лаборатории Канторовича. Канторович выделил молодого сотрудника за сильный интеллект и независимое мышление и стал поручать ему задания, уровень которых намного превосходил стандартные технические вычисления. Все это было важным для математического развития М. Ш. В 1950 г. М. Ш. окончил матмех ЛГУ. Хотя он был одним из лучших студентов на курсе, в аспирантуру его не взяли из-за тогдашней политики антисемитизма в стране.

В 1947 г. Михаил Шлемович женился на своей однокурснице Татьяне Петровне Ильиной. В 1948 г. у них родился сын Женя. С Татьяной Петровной они счастливо прожили всю жизнь. Она ушла из жизни двумя годами раньше него. Благодаря ее любви, преданности, терпению и заботе он мог всецело посвящать себя любимому делу — занятиям математикой.

После окончания университета М. Ш. работал в Ленинградском горном институте на кафедре высшей математики ассистентом. Несмотря на очень большую педагогическую нагрузку, он активно занимался научными исследованиями. В 1954 г. успешно защитил кандидатскую диссертацию.

Большую роль в научном становлении Михаила Шлемовича сыграло его активное участие в работе Ленинградского семинара по математической физике, организованного в начале 50-х годов по инициативе Владимира Ивановича Смирнова. Практически все результаты, полученные М. Ш. на протяжении его научной деятельности, впервые докладывались на этом семинаре. Впоследствии в течение многих лет М. Ш. вместе с Ольгой Александровной Ладыженской руководил этим семинаром, теперь носящим имя В. И. Смирнова.

Во времена ,,хрущевской оттепели" в 1956 г. по инициативе Владимира Ивановича и Ольги Александровны Михаил Шлемович был принят на работу в ЛГУ на кафедру математической физики физического факультета. В 1962 г. он защитил докторскую диссертацию на тему ,,Спектр сингулярных граничных задач". На кафедре математической физики М. Ш. проработал до конца своей жизни — более 50 лет.

М. Ш. был блестящим лектором. Он разработал и читал цикл специальных курсов по функциональному анализу, спектральной теории операторов, математической теории рассеяния и другим разделам для студентов, специализирующихся по математической и теоретической физике. Создал оригинальный курс лекций по линейной алгебре для студентов-физиков. Его лекции были не только содержательными и хорошо продуманными, но и вдохновляющими. М. Ш. был одним из лидеров кафедры. Он обладал высочайшим авторитетом. У него всегда были очень высокие профессиональные требования — как к качеству результатов, так и к изложению материала. И прежде всего, эти требования он предъявлял самому себе.

М. Ш. всегда был очень внимателен к людям. Многие коллеги испытывали его влияние как прекрасного профессионала и мудрого человека.

Михаил Шлемович вместе со своим соратником Михаилом Захаровичем Соломяком создал сильную научную школу по спектральной теории операторов, известную во всем мире. Под руководством М. Ш. более 20 аспирантов защитили кандидатские диссертации, из них 7 стали докторами наук. Многие его ученики стали известными учеными и работают сейчас в ведущих университетах России и за рубежом.

Михаил Шлемович Бирман — автор более 160 научных статей и двух книг. Он много занимался редакторской деятельностью, был членом редколлегий журналов РАН ,,Алгебра и анализ" и ,,Функциональный анализ и его приложения". Под его редакцией вышли 13 сборников ,,Проблемы математической физики" в издательстве ЛГУ и несколько тематических сборников, изданных Американским математическим обществом.

Результаты М. Ш. Бирмана получили международное признание и обильно цитируются в мировой математической литературе. В 1974 г. он был приглашен докладчиком на Международный математический конгресс (к сожалению, принять это приглашение он не смог — ему не дали разрешения на поездку). В последние 20 лет (когда уже можно было выезжать) он многократно был пленарным докладчиком на международных конференциях; его приглашали с научными визитами в ведущие университеты и научные центры мира.

Несмотря на плохое состояние здоровья, Михаил Шлемович Бирман сохранял творческую активность до последних дней своей жизни. Он жил в науке и профессии до конца.

Уход из жизни Михаила Шлемовича Бирмана — невосполнимая утрата не только для его близких, коллег, учеников, но и для всей математики.

Авторам статьи выпала честь быть в тесном научном и человеческом контакте с Михаилом Шлемовичем. М. З. Соломяк был его основным соавтором на протяжении около 40 лет. Т. А. Суслина и Д. Р. Яфаев — прямые ученики, впоследствии ставшие ближайшими сотрудниками М. Ш. Мы попытались воссоздать картину широкого спектра интересов и глубины идей и результатов Михаила Шлемовича Бирмана.

Ниже мы приводим обзор важнейших научных достижений М. Ш. Бирмана. В конце обзора приведены полный список публикаций и список учеников М. Ш. Бирмана.

§1. Ранние работы

Первые публикации М. Ш. связаны с его работой по методам вычислительной математики, которую он вел в студенческие годы в лаборатории Л. В. Канторовича. Под влиянием идей Канторовича в работах [1–3] он исследовал многошаговые варианты метода последовательных приближений и метода наискорейшего спуска. Ниже мы описываем основную идею работы [3], в которой был предложен и проанализирован новый прием приближенного решения уравнения

$$Ax = \varphi. \tag{1.1}$$

Здесь A — ограниченный самосопряженный и положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве. Пусть m и M — нижняя и верхняя границы спектра оператора A. Традиционный подход основан на замене уравнения (1.1) на эквивалентное уравнение $x = (I - \varepsilon A)x + \varepsilon\varphi$, где число ε выбирается таким образом, что $\|I - \varepsilon A\| < 1$. Новое уравнение решается с помощью стандартного метода последовательных приближений.

В многошаговом (p-шаговом) варианте метода уравнение (1.1) заменяется уравнением $x = B_p x + \varphi_p$, где

$$B_p = I - \sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon_k^{(p)} A^{k+1}; \quad \varphi_p = \sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon_k^{(p)} A^k \varphi.$$

Задача состоит в оптимальном выборе коэффициентов $\varepsilon_k^{(p)}$. Этот выбор должен минимизировать норму оператора B_p и, как следствие, оптимизировать скорость сходимости последовательных приближений при решении нового уравнения.

Развивая идею своего научного руководителя М. К. Гавурина, М. Ш. предлагает выбрать $B_p = T_p(A)$, где T_p — многочлен Чебышева, „пересаженный“ на промежуток $[m, M]$. М. Ш. проводит подробный анализ предложенной процедуры, показывая ее преимущества по сравнению со стандартным подходом.

В работах [1, 2] подобным образом был проанализирован многошаговый аналог метода наискорейшего спуска — как для решения уравнения (1.1), так и для вычисления собственных значений оператора A.

Многие качества, типичные для научного стиля М. Ш., проявились уже в этих ранних публикациях: исчерпывающий анализ задачи, предельно ясное и четкое изложение и многочисленные пояснения, полезные для читателя, ориентированного, в первую очередь, на приложения.

§2. Теория расширений положительно определенных симметричных операторов. Эллиптические граничные задачи

2.1. В 1952–1954 гг. М. Ш. Бирман начал свою работу по вариационной теории эллиптических граничных задач. Он интенсивно обсуждал эту тематику с С. Г. Михлиным, в то время наиболее авторитетным специалистом в данной области. Отчасти под влиянием этих обсуждений М. Ш. занялся анализом вариационного метода, предложенного в 1926 г. Треффтцем для решения задачи Дирихле в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$:

$$-\Delta u = f \ \text{ в } \ \Omega, \quad u = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega. \tag{2.1}$$

Метод заключается в минимизации интеграла Дирихле $\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx$ на множестве всех решений уравнения $-\Delta u = f$, принадлежащих классу $H^1(\Omega)$ и не подчиненных никаким краевым условиям. В 1950 г. С. Г. Михлин доказал сходимость этого метода. Вместе со стандартным вариационным подходом, основанным на минимизации функционала

$$\int_\Omega (|\nabla u|^2 - 2\mathrm{Re}(\overline{u} f))\,dx,$$

метод Треффтца позволяет получать двусторонние оценки интеграла Дирихле решения u.

М. Ш. поставил себе целью распространить метод на другие краевые задачи. Основная трудность заключалась в построении квадратичного функционала (,,функционала Треффтца"), принимающего минимальные значения на решении данной краевой задачи.

Анализируя проблему, М. Ш. осознал центральную роль общей теории расширений симметричных операторов в этих вопросах. Он интенсивно изучает статьи М. Г. Крейна и М. И. Вишика по данной тематике. Особенно большое впечатление на него произвели работы Крейна, которые, по словам М. Ш., открыли для него новый мир. С тех пор М. Ш. всегда считал себя ,,заочным учеником" М. Г. Крейна.

Основные результаты М. Ш. по теории расширений представлены в его статье [10] (краткое изложение в заметке [4]). Пусть A_0 — симметричный положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве, A_F — его расширение по Фридрихсу и A — какое-либо другое его положительно определенное расширение. Развивая идеи Крейна и Вишика, М. Ш. рассматривает так называемое параметрическое представление оператора A. В роли параметра выступает некоторый самосопряженный оператор T, действующий в подпространстве исходного пространства. В типичной ситуации это подпространство совпадает с ядром $\operatorname{Ker} A_0^*$ сопряженного с A_0 оператора, при этом

$$T = (A^{-1} - A_F^{-1})|_{\operatorname{Ker} A_0^*}. \tag{2.2}$$

М. Ш. подробно анализирует связь между спектральными свойствами оператора A и соответствующего ,,операторного параметра" T. В работе [5] он дает аналитическое описание возникающих объектов в применении к эллиптическим граничным задачам. На основе полученных общих результатов в статьях [6, 8, 11] им построены функционалы Треффтца для основных краевых задач для оператора Лапласа и бигармонического оператора.

2.2. Вскоре М. Ш. находит новый круг приложений своих результатов по теории расширений. По классической теореме Вейля компактность оператора $A_1^{-1} - A_2^{-1}$ влечет совпадение существенных спектров самосопряженных операторов A_1 и A_2. Поэтому параметрическое представление (2.2) открывает удобный путь к исследованию устойчивости существенного спектра эллиптических операторов в неограниченных областях (*сингулярных* эллиптических операторов).

Основные результаты по этой тематике изложены в работе [22]. Опишем ее идеи для случая лапласиана в неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

с компактной границей. Тогда A_0 — лапласиан, заданный на классе $\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$ (т. е. на функциях из пространства Соболева $H^2(\Omega)$, которые в метрике этого пространства приближаются гладкими функциями с компактным носителем в Ω). Оператор A_0^* — это лапласиан, заданный на всем пространстве $H^2(\Omega)$, а подпространство $\operatorname{Ker} A_0^*$ совпадает с множеством гармонических функций класса $H^2(\Omega)$.

М. Ш. рассматривает также класс $G^1(\Omega)$ всех гармонических функций из $H^1(\Omega)$. Переходя к квадратичным формам и используя параметрическое представление (2.2), он сводит задачу об устойчивости существенного спектра к исследованию оператора вложения пространства $G^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. Он не только доказывает требуемую компактность, но и получает точные по порядку оценки s-чисел оператора вложения. При этом М. Ш. вводит в рассмотрение пространства компактных операторов со степенным убыванием s-чисел, показав, что в их терминах свойства оператора вложения характеризуются более точно, нежели в терминах классов Шаттена–фон Неймана. Впоследствии эти классы получили название „слабых классов Шаттена–фон Неймана“ и стали систематически использоваться как в общей теории операторов, так и в приложениях.

В итоге М. Ш. установил устойчивость существенного спектра при возмущениях компактной части границы области или вида краевого условия на такой части границы. Опираясь на теорему Като–Розенблюма (см. ниже п. 3.1), он получил аналогичный результат также для абсолютно непрерывной части спектра. Это потребовало преодоления дополнительных технических трудностей.

М. Ш. всегда считал статью [22] одним из своих основных достижений в спектральной теории дифференциальных операторов. Поэтому его в течение долгих лет огорчало отсутствие ее английского перевода (таковой появился только в 2008 г. в связи с 80-летием М. Ш.). Значительно позднее, уже в 1990-е годы, во время своего первого визита в Нью-Йорк, ему было приятно узнать, что в институте Куранта еще в 1960-е годы был сделан „неофициальный“ перевод этой статьи, имевший широкое хождение не только в США, но и в Европе.

2.3. Одна из самых глубоких и знаменитых работ М. Ш. — это статья [19] (краткое предварительное изложение результатов — в заметке [15]), в которой он изучает устойчивость существенного спектра при изменении коэффициентов оператора. Статья была написана и опубликована еще до работы [22], обзор которой был приведен выше. Ее основное содержание — исследование спектра оператора Шрёдингера $-\Delta + V$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$ в зависимости от поведения потенциала. Этому исследованию предпослан предварительный материал, где ставятся и решаются некоторые основополагающие вопросы общей спектральной теории для полуограниченных самосопряженных операторов. В частности, систематически используются понятия относительной ограниченности и относительной компактности оператора „в смысле квадратичных форм“ (хотя сами эти термины не введены).

Перечислим основные результаты статьи [19].

1. Существенный спектр самосопряженного оператора $A \geqslant 0$ устойчив по отношению к относительно компактным (в смысле форм) возмущениям. Пусть $V \geqslant 0$ — такое возмущение. Тогда отрицательный спектр оператора $A-V$ дискретен. Для $\gamma > 0$ рассмотрим „энергетическое пространство“ $\mathcal{H}_\gamma(A)$, получаемое пополнением области определения оператора A по норме $\|(A+\gamma I)^{1/2}x\|$. Предположим, что оператор $T_\gamma(A,V)$, порожденный формой (Vx,x) в пространстве $\mathcal{H}_\gamma(A)$, компактен. М. Ш. обнаружил, что число собственных значений оператора $A-V$, лежащих левее точки $-\gamma$, равно числу собственных значений оператора $T_\gamma(A,V)$, лежащих правее точки 1.

   Двумя годами позднее это равенство было переоткрыто Швингером; оно составляет содержание знаменитого *принципа Бирмана–Швингера.* И по сию пору этот принцип является исходным пунктом при исследовании собственных значений операторов с непустым существенным спектром. Особенно часто этот принцип применяется в задачах квантовой механики. Определенный выше оператор $T_\gamma(A,V)$ обычно называют „*оператором Бирмана–Швингера*“, отвечающим рассматриваемой спектральной задаче.

2. Принцип Бирмана–Швингера открывает дорогу к количественному исследованию дискретного спектра сингулярных дифференциальных операторов. В качестве одного из применений своих общих результатов М. Ш. вывел оценку (вскоре ставшую знаменитой) количества отрицательных собственных значений оператора Шрёдингера $-\Delta - V$ в $L_2(\mathbb{R}^3)$:

$$N_-(-\Delta - V) \leqslant \frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{V_+(x)V_+(y)}{|x-y|^2}\,dx\,dy. \tag{2.3}$$

   Здесь $2V_+(x) = V(x) + |V(x)|$. Это была первая количественная оценка отрицательного спектра оператора Шрёдингера в многомерном случае. Она была независимо доказана Швингером, и ее обычно называют „*оценкой Бирмана–Швингера*“.

3. Принцип Бирмана–Швингера остается справедливым для числа всех отрицательных собственных значений оператора $A - V$, где $A > 0$, причем точка нуль является нижним краем существенного спектра оператора A. При этом, однако, приходится различать случаи, когда форма (Ax, x) допускает замыкание в основном гильбертовом пространстве и когда такое замыкание невозможно. Во втором случае говорят, что оператор A имеет виртуальный уровень в точке $\lambda = 0$. При этом определение оператора Бирмана–Швингера $T_0(A, V)$ несколько усложняется, а в равенстве для числа отрицательных собственных значений оператора $A - V$, выражающем принцип Бирмана–Швингера, к числу собственных значений оператора $T_0(A, V)$, больших единицы, следует добавить кратность виртуального уровня в нуле. В частности, из этого М. Ш. выводит, что при наличии виртуального уровня у оператора A отрицательный спектр оператора $A - V$ не пуст для любого отрицательного возмущения $-V$.

4. М. Ш. нашел очень общие условия того, что отрицательный спектр семейства операторов $A - \alpha V$ дискретен либо конечен, сразу при всех значениях параметра (константы связи) $\alpha > 0$. Во многих важных случаях полученные условия дискретности и конечности отрицательного спектра оказались необходимыми и достаточными.

Для применения общих результатов работы [19] к операторам $H_{l,\alpha V} = (-\Delta)^l - \alpha V$ необходимо было ответить на следующий вопрос из теории функциональных пространств: для каких весовых функций V пространство Соболева $H^l(\mathbb{R}^d)$, либо „однородное“ пространство Соболева $\mathcal{H}^l(\mathbb{R}^d)$, компактно вкладывается в весовое пространство $L_{2,V}(\mathbb{R}^d)$? Первое вложение отвечает дискретности отрицательного спектра оператора $H_{l,\alpha V}$, а второе — его конечности (сразу для всех $\alpha > 0$).

М. Ш. исследует эти вопросы в тех же статьях [15, 19], а также в совместной с Б. С. Павловым статье [18]. Для случая $2l > d$ было получено полное описание допустимых весов. Для $l = 1$, $d \geqslant 2$ (т. е. для многомерного оператора Шрёдингера) были найдены некоторые необходимые и (отдельно) достаточные условия компактности таких вложений. Позднее В. Г. Мазья нашел необходимое и достаточное условие компактности (для $l = 1$); оно формулируется в терминах емкости.

2.4. Описывая этот период деятельности М. Ш. Бирмана, нельзя пройти мимо его статьи [25] (совместной с его учеником Г. Е. Скворцовым) об индексе оператора задачи Дирихле в плоских областях с угловыми точками.

К началу 1960-х годов теория эллиптических краевых задач в ограниченных областях с гладкой границей была уже хорошо разработана, и М. Ш. в своей работе [22] широко использовал ее результаты. Однако основным техническим приемом М. Ш. всегда было использование вариационного описания оператора, при котором гладкость границы (в случае задачи Дирихле) не нужна.

Естественно было задаться вопросом: в какой мере результаты ,,гладкой“ теории сохраняют силу для случая ,,плохих“ границ? К тому времени были известны примеры, показывающие, что в плоской области Ω с кусочно-гладкой границей оператор Лапласа с условием Дирихле, рассматриваемый на естественной области определения $H^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, не всегда самосопряжен. Однако никаких результатов общего характера на этот счет не было известно. Первый такой результат был получен в [25]. Там было показано, что индекс этого оператора равен числу внутренних углов, бóльших π. Эта работа стимулировала исследования по эллиптическим краевым задачам в областях с негладкими границами, и вскоре их теория была построена в статьях В. А. Кондратьева, В. Г. Мазьи, Б. А. Пламеневского и других математиков.

§3. Математическая теория рассеяния: ядерный подход

3.1. Ядерный подход в теории рассеяния возник в работах Т. Като и М. Розенблюма (1957). В них был установлен следующий фундаментальный результат. Пусть A и B — самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и пусть $P_{\mathrm{ac}}(A)$ и $P_{\mathrm{ac}}(B)$ — ортогональные проекторы на абсолютно непрерывные подпространства $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(A)$ и $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(B)$ операторов A и B соответственно. Предположим, что разность $B - A$ принадлежит классу $\mathfrak{S}_1$ ядерных операторов. Тогда существуют сильные пределы

$$\operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} \exp(iBt)\exp(-iAt)P_{\mathrm{ac}}(A) =: W_\pm(B,A), \tag{3.1}$$

называемые *волновыми операторами.* Операторы $W_\pm(B,A)$ автоматически изометричны на $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(A)$, и $BW_\pm(B,A) = W_\pm(B,A)A$. Поскольку условия теоремы Като–Розенблюма симметричны, волновые операторы $W_\pm(A,B)$ также существуют, а тогда область значений операторов $W_\pm(B,A)$ совпадает с подпространством $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(B)$ (в этом случае волновые операторы называются *полными*). Таким образом, при условии $B-A \in \mathfrak{S}_1$ абсолютно непрерывные части операторов A и B унитарно эквивалентны.

Стоит отметить, что существование *слабых волновых операторов*

$$\underset{t\to\pm\infty}{\text{w-lim}}\, P_{\mathrm{ac}}(B)\exp(iBt)\exp(-iAt)P_{\mathrm{ac}}(A)$$

проверяется относительно просто. Достаточно использовать оценку (лемму Розенблюма)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\|Ge^{-iAt}f\|^2\,dt \leqslant C(f)\|G\|^2_{\mathfrak{S}_2},$$

справедливую для всех операторов G из класса Гильберта–Шмидта $\mathfrak{S}_2$ на некотором плотном в $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(A)$ (и не зависящем от $G\in\mathfrak{S}_2$) множестве элементов f. Однако доказательство изометричности слабых волновых операторов (что уже обеспечивает существование сильных пределов (3.1)) оказывается содержательной задачей.

Если пределы (3.1) существуют, то *оператор рассеяния*

$$\mathbf{S} := W_+^*(B,A)W_-(B,A)$$

коммутирует с A, а потому он действует как умножение на оператор-функцию $S(\lambda)$ в диагональном для A представлении пространства $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(A)$. Оператор рассеяния $\mathbf{S}$ и *матрица рассеяния* $S(\lambda)$ появились в теории рассеяния квантовых частиц, что объясняет название „теория рассеяния“ для теории возмущений на абсолютно непрерывном спектре.

Простейшая квантовая система описывается оператором Шрёдингера

$$B = -\Delta + V(x),$$

действующим в пространстве $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^d)$, где $V(x)$ — вещественная функция (потенциальная энергия), убывающая достаточно быстро на бесконечности. Тем самым B получается из оператора кинетической энергии $A=-\Delta$ добавлением оператора умножения, который компактным быть не может. Поэтому теорема Като–Розенблюма непосредственно к этому важному случаю неприменима. Сразу после появления работ Т. Като и М. Розенблюма возникла проблема применения их теоремы к дифференциальным операторам. Этой проблемой занимались сам Т. Като, С. Т. Курода и многие другие математики. Вклад М. Ш. Бирмана в эту чрезвычайно конкурентную область имел решающее значение.

3.2. Исследование абсолютно непрерывного спектра σ_{ac} было для М. Ш. естественным продолжением его работ по теории существенного спектра. Связующим моментом послужила его работа [22], где была установлена инвариантность σ_{ac} при возмущениях границы или граничных условий для эллиптических операторов в неограниченных областях (см. обсуждение выше в п. 2.2).

Исходной и, как потом выяснилось, очень плодотворной оказалась идея М. Ш. рассмотреть подходящие функции φ операторов A и B (например, операторы A^{-1} и B^{-1}, когда $\varphi(\lambda) = \lambda^{-1}$) и применить теорему Като–Розенблюма к паре операторов $\varphi(A)$, $\varphi(B)$. Инвариантность абсолютно непрерывного спектра позволила М. Ш. предположить, что при условии

$$\varphi(B) - \varphi(A) \in \mathfrak{S}_1$$

не только справедливо равенство $\sigma_{\rm ac}(B) = \sigma_{\rm ac}(A)$, но также существуют волновые операторы $W_\pm(B, A)$, причем

$$W_\pm(\varphi(B), \varphi(A)) = W_\pm(B, A)$$

(или $W_\pm(\varphi(B), \varphi(A)) = W_\mp(B, A)$ в зависимости от знака $\varphi'(\lambda)$). Этот результат, доказанный М. Ш. Бирманом в [23, 27] для широкого класса функций φ, был позднее назван *принципом инвариантности.*

В тот же период в совместной с М. Г. Крейном работе [24] теорема Като–Розенблюма была перенесена на унитарные операторы. Это отвечает принципу инвариантности для дробно-линейной функции φ, когда $\varphi(A)$ и $\varphi(B)$ — преобразования Кэли операторов A и B. Из теоремы Бирмана–Крейна следует, что для пары самосопряженных операторов A, B волновые операторы $W_\pm(B, A)$ существуют, если разность резольвент операторов A и B принадлежит ядерному классу. Это важное обобщение теоремы Като–Розенблюма уже допускает прямое приложение к оператору Шрёдингера.

3.3. Наряду с формулировкой в терминах (нестационарных) волновых операторов (3.1) теория рассеяния допускает стационарную формулировку, когда унитарные группы в определении (3.1) заменяются на резольвенты операторов A и B. При этом вместо пределов при $t \to \pm\infty$ приходится изучать пределы резольвент при стремлении комплексного спектрального параметра к вещественной оси. Этот подход позволяет дать формульные представления для основных объектов теории, что важно для физических приложений. М. Ш. принадлежит заслуга последовательного развития стационарной схемы в ядерной теории рассеяния — см. совместные с его ученицей С. Б. Энтиной статьи [30, 36]. С аналитической точки зрения метод этих работ основан на существовании почти везде пределов резольвенты произвольного самосопряженного оператора, окаймленного операторами Гильберта–Шмидта. Этот результат важен и сам по себе. Стационарная схема гарантирует изометричность слабых волновых операторов, откуда вытекает существование и сильных пределов (3.1).

В работах [31, 41] М. Ш. ввел важное понятие *локальных волновых операторов*, связанных с каким-либо интервалом спектральной оси, и нашел также локальные условия их существования. С их помощью он получил очень общие условия существования „глобальных“ волновых операторов (3.1). Как выяснилось, помимо включения $E_X(B)(B-A)E_X(A) \in \mathfrak{S}_1$ для любого ограниченного интервала X (где $E_X(A)$ и $E_X(B)$ — спектральные проекторы операторов A и B) достаточно предположить некоторое условие относительно областей определения операторов A и B или функций от них. Например, достаточно потребовать, чтобы $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$ или $\mathcal{D}(|A|^{1/2}) = \mathcal{D}(|B|^{1/2})$.

В случае операторов A и B, действующих в разных пространствах $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$, естественное обобщение определения (3.1) дается соотношением

$$\operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} \exp(iBt)J\exp(-iAt)P_{\mathrm{ac}}(A) =: W_\pm(B,A;J), \tag{3.2}$$

где $J : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ — какой-либо ограниченный оператор. Это определение было дано Т. Като, но первые эффективные условия (ядерного типа) существования операторов (3.2) были найдены М. Ш. Бирманом в совместной с его учеником А. Л. Белопольским статье [42], где техника работ [36] и [41] получила дальнейшее развитие. Подход статьи [42] (см. также [47]) позволил найти условия, гарантирующие не только существование волновых операторов (3.2), но также их изометричность и полноту. Значительно позднее Д. Пирсон нашел прямое обобщение теоремы Като–Розенблюма. Теорема Пирсона утверждает существование пределов (3.2) при условии, что оператор $BJ - JA$ — ядерный. Ее доказательство основано на искусном использовании леммы Розенблюма.

Много позднее М. Ш. вернулся к этой тематике, развив совместно с Д. Р. Яфаевым в [94] общую стационарную схему вне рамок конкретных предположений ядерного или гладкого типов. В [94] рассматривались волновые операторы (3.2). Как выяснено в [94], роль условия изометричности для таких операторов играет соотношение

$$W_\pm^*(B,A;J)W_\pm(B,A;J) = W_\pm(A,A;J^*J),$$

проверенное в этой работе. В частности, подход [94] приводит к стационарному доказательству теоремы Пирсона.

3.4. Таким образом, М. Ш. Бирман, частично со своими учениками, развил абстрактную ядерную теорию рассеяния до уровня, на котором она допускает непосредственные приложения к дифференциальным операторам. Эти приложения суммированы в статьях [44, 46], где рассмотрен широкий класс уравнений математической физики, а также в [52], где изучены задачи, возникающие при возмущениях среды. При этом допускалось, что порядок возмущения $V = B - A$ выше порядка „невозмущенного“ оператора A. Так, в [46] установлены существование и полнота волновых операторов в случае $A = -\Delta$ и $V = \Delta v(x)\Delta$ в пространстве $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^d)$ при условии, что $v(x) \geqslant 0$ и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} (v^2(x) + |\nabla v(x)|^2 + (\Delta v(x))^2)(1 + |x|^2)^\alpha < \infty, \quad 2\alpha > d.$$

Приведем один из результатов статьи [52]. В $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ рассмотрим однородный матричный эллиптический оператор A_0 с постоянным вырождением (т. е. его символ $a(\xi)$ имеет постоянный ранг при $\xi \neq 0$). Предположим, что $(m \times m)$-матрицы M_0 и $M(x)$ — положительно определенные, причем $M(x)$ непрерывно зависит от x, $0 < c_0 \leqslant M(x) \leqslant c_1 < \infty$ и $M(x) - M_0 \to 0$ при $|x| \to \infty$. Операторы A и B определяются соотношениями $A = M_0^{-1} A_0$ и $B = M(x)^{-1} A_0$ в пространствах $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}$ со скалярными произведениями

$$(f, g)_0 = \int\limits_{\mathbb{R}^d} (M_0 f(x), g(x))\, dx \quad \text{и} \quad (f, g) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} (M(x) f(x), g(x))\, dx$$

соответственно. Пусть $I_0 : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}$ — тождественный оператор. Тогда при условии

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |M(x) - M_0|^2 (1 + |x|^2)^\alpha\, dx < \infty, \quad 2\alpha > d,$$

волновые операторы $W_\pm(B, A; I_0)$ существуют, изометричны и полны. Этот результат непосредственно применим к уравнениям Максвелла.

Значительно более поздняя статья [99] посвящена применениям ядерного метода при минимальных предположениях о невозмущенном операторе. Типичным результатом здесь является следующий. Пусть

$$A = (-\Delta)^l + V_0(x), \quad B = (-\Delta)^l + V(x),$$

где l — любое натуральное число, V_0, V — произвольные ограниченные вещественные функции, и

$$V(x) - V_0(x) = O(|x|^{-d-\varepsilon}), \quad |x| \to \infty, \ \varepsilon > 0.$$

Тогда волновые операторы $W_\pm(B, A)$ существуют и полны. Подчеркнем, что без специальных предположений относительно функции $V_0(x)$ эффективный спектральный анализ невозмущенного оператора A невозможен, что, однако, не важно для ядерного подхода. Это является его характерным преимуществом по сравнению с гладким подходом, основанным на разложении по собственным функциям оператора A.

§4. Функция спектрального сдвига

4.1. *Функция спектрального сдвига* $\xi(\lambda) = \xi(\lambda; B, A)$ может быть введена соотношением

$$\operatorname{Tr}(\varphi(B) - \varphi(A)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(\lambda)\xi(\lambda)\, d\lambda, \quad \xi(\lambda) = \xi(\lambda; B, A), \tag{4.1}$$

получившим название *формулы следа.* Понятие функции спектрального сдвига в теории возмущений появилось в начале пятидесятых годов в физической литературе в работах И. М. Лифшица. Математическая теория функции спектрального сдвига была вскоре построена М. Г. Крейном, установившем соотношение (4.1) для пары самосопряженных операторов A и B с ядерной разностью $V = B - A$ и для широкого класса функций φ (включающего функцию $\varphi(\lambda) = \lambda$). Для самой функции спектрального сдвига М. Г. Крейн установил неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\xi(\lambda)|\, d\lambda \leqslant \|V\|_{\mathfrak{S}_1}.$$

Работа М. Г. Крейна была основана на методах комплексного анализа.

4.2. Значительно позднее в 1975 г. в статье [55] М. Ш. Бирман вместе с М. З. Соломяком предприняли попытку найти ,,вещественное“ доказательство формулы следа. С аналитической точки зрения их подход был основан на развитом ими аппарате двойных операторных интегралов (см. ниже §5). М. Ш. Бирман и М. З. Соломяк нашли новое доказательство формулы (4.1), однако с обобщенной функцией ξ (производной от меры). Важно, что при этом были получены новые представления для функции спектрального сдвига в терминах спектральной меры семейства операторов $B_\gamma = A+\gamma V$. Именно, в [55] было показано, что для любого интервала $\delta = (a, b)$

$$\int_{\delta} \xi(\lambda)\, d\lambda = \int_0^1 \operatorname{Tr}\big(E_\delta(B_\gamma)V\big)\, d\gamma. \tag{4.2}$$

Отсюда следует, что

$$\xi(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \int_0^1 \operatorname{Tr}\big(E_{(-\infty,\lambda)}(B_\gamma)V\big)\, d\gamma$$

для почти всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Эта формула удобна для получения оценок функции спектрального сдвига, как, например, оценки

$$\operatorname{Tr}\big(E_{(-\infty,\lambda)}(B)V\big) \leqslant \int_{-\infty}^{\lambda} \xi(\mu)\, d\mu \leqslant \operatorname{Tr}\big(E_{(-\infty,\lambda)}(A)V\big).$$

Отметим, что в пределе $\lambda \to \infty$ это неравенство дает формулу следа (4.1) для функции $\varphi(\lambda) = \lambda$.

4.3. Связь функции спектрального сдвига с матрицей рассеяния $S(\lambda) = S(\lambda; B, A)$ была найдена М. Ш. Бирманом и М. Г. Крейном в работе [24]. Именно, в [24] было показано, что

$$\int_{\sigma_{\mathrm{ac}}(A)} \|S(\lambda) - I\|_{\mathfrak{S}_1}\, d\lambda \leqslant 2\pi \|V\|_{\mathfrak{S}_1},$$

откуда следует, что

$$S(\lambda) - I \in \mathfrak{S}_1 \tag{4.3}$$

(так что детерминант $S(\lambda)$ корректно определен) для почти всех $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ac}}(A)$. Связь функций $\xi(\lambda)$ и $S(\lambda)$ дается соотношением

$$\operatorname{Det} S(\lambda) = \exp(-2\pi i \xi(\lambda)),$$

получившим название *формулы Бирмана–Крейна*. Она часто принимается за определение функции спектрального сдвига на абсолютно непрерывном спектре.

Из соотношения (4.3) следует, что спектр унитарного оператора $S(\lambda)$ состоит из собственных значений, лежащих на единичной окружности и накапливающихся разве лишь к точке 1. Это утверждение можно уточнить для знакоопределенных возмущений. Именно, в работе [24] было показано, что накопление сверху (снизу) невозможно, если $V \geqslant 0$ (если $V \leqslant 0$). В абстрактной постановке собственные числа $S(\lambda)$ играют роль фазовых сдвигов для оператора Шрёдингера с радиальным потенциалом.

Краткая заметка [24] (вместе с докладом [28]) послужила основой для дальнейшего изучения функции спектрального сдвига $\xi(\lambda)$ и матрицы рассеяния $S(\lambda)$ как учениками М. Ш. Бирмана, так и математиками из совсем других школ. М. Ш. также сохранил интерес к этой тематике на долгое время. Так, в совместной с Д. Р. Яфаевым работе [80] (см. также краткую заметку [78] и „эвристическое“ изложение [81]) была найдена асимптотика спектра матрицы рассеяния для оператора Шрёдингера с произвольным (не обязательно радиальным) потенциалом. Этот результат был распространен в [121] на возмущения оператора Шрёдингера с периодическим потенциалом.

Работы М. Ш. Бирмана оказали чрезвычайно серьезное влияние на дальнейшее развитие теории рассеяния и теории функции спектрального сдвига. Современное состояние теории функции спектрального сдвига и спектральных свойств матрицы рассеяния отражено в достаточно подробных обзорах [115, 136] и [116].

§5. Двойные операторные интегралы

5.1. Двойной операторный интеграл (ДОИ) — это выражение вида

$$Q = \int\int \psi(\lambda,\mu) dF(\mu)\, T\, dE(\lambda), \tag{5.1}$$

где dE и dF — спектральные меры в гильбертовом пространстве, T — ограниченный оператор и ψ — скалярная функция („символ“ ДОИ). Интегрирование ведется по некоторым множествам, на которых заданы меры dE, dF (сейчас в обозначениях эти множества опущены). Будучи определен надлежащим образом, интеграл (5.1) при заданных ψ, dE и dF задает линейное отображение $\Psi : T \mapsto Q$. Такие отображения, действующие между подходящими классами операторов, обычно называются „*трансформаторами*“. ДОИ были введены Ю. Л. Далецким и С. Г. Крейном в 1956 г. в связи с проблемой дифференцирования операторнозначных функций, зависящих от вещественного параметра.

Интерес М. Ш. Бирмана к ДОИ был мотивирован его деятельностью начала 1960-х годов по разработке стационарного подхода в теории рассеяния. Это потребовало анализа многих естественных вопросов, ответы на которые в то время не были известны. В частности, было необходимо выяснить, для каких функций φ ядерность оператора $B - A$ (где A, B — самосопряженные операторы) влечет ядерность оператора $\varphi(B) - \varphi(A)$. В связи с этой задачей М. Г. Крейн обратил внимание М. Ш. на статью Ю. Л. Далецкого и С. Г. Крейна, которая, по мнению М. Г., могла бы оказаться полезной в этом круге вопросов. К этой тематике М. Ш. привлек М. З. Соломяка; так началась их совместная работа, продолжавшаяся, с небольшими перерывами, около 40 лет.

Подход к интегралам (5.1) в работе Ю. Л. Далецкого и С. Г. Крейна был основан на представлении

$$Q = \int K(\lambda)\, dE(\lambda),$$

где $K(\lambda) = (\int \psi(\lambda,\mu)\, dF(\mu))T$ — оператор-функция параметра λ. После этого формальное интегрирование по частям сводит дело к интегрированию по λ оператор-функции $K'(\lambda)E(\lambda)$. Такой подход приводил к весьма грубым оценкам интеграла (5.1) и потому был непригоден для основных приложений.

5.2. В подходе, разработанном М. Ш. совместно с М. З. Соломяком [33, 37, 59] (см. также более позднюю обзорную статью [152]), исходными являются ДОИ в классе $\mathfrak{S}_2$ Гильберта–Шмидта. В гильбертовом пространстве $\mathfrak{S}_2$ операторы умножения слева на $F(\cdot)$ и справа на $E(\cdot)$ коммутируют друг с другом и определяют в $\mathfrak{S}_2$ некоторую спектральную меру. Интеграл (5.1) для $T \in \mathfrak{S}_2$ определяется как интеграл от функции ψ по этой спектральной мере в применении к элементу T. Это простое, но решающее соображение немедленно показывает, что для ДОИ в классе $\mathfrak{S}_2$ сохраняют силу все свойства интегралов по спектральной мере. В частности, ДОИ в классе $\mathfrak{S}_2$ корректно определен для произвольных ограниченных символов, причем справедлива оценка $\|Q\|_{\mathfrak{S}_2} \leqslant \sup |\psi| \, \|T\|_{\mathfrak{S}_2}$.

Условие ограниченности символа не достаточно для ограниченности трансформатора (5.1) в других классах операторов, в частности в алгебре $\mathfrak{B}$ всех непрерывных операторов. В статьях [33, 37, 59] было показано, что ограниченность трансформатора (5.1) в алгебре $\mathfrak{B}$ тесно связана с оценками ядерной нормы интегральных операторов с ядром $\psi(\lambda, \mu)$, действующих в весовых пространствах L_2. Подобных оценок, зависящих от свойств весовой функции, ранее известно не было. Они были развиты в серии работ, описание которых см. ниже в §7.

Было также найдено весьма общее достаточное „факторизационное“ условие на символ ψ, гарантирующее ограниченность трансформатора (5.1) в классе $\mathfrak{B}$. Впоследствии В. В. Пеллер показал, что это условие является и необходимым.

По двойственности ограниченность трансформатора (5.1) в классе $\mathfrak{B}$ равносильна его ограниченности в классе $\mathfrak{S}_1$ всех ядерных операторов. Действие этого трансформатора в других классах, включая идеалы $\mathfrak{S}_p$ Шаттена–фон Неймана, исследуется с помощью линейной интерполяции. Тем самым была развита последовательная теория ДОИ как трансформаторов, действующих между различными симметрично-нормированными идеалами операторов.

5.3. ДОИ может быть интерпретирован как весьма общее „преобразование множителей“. Рассмотрим множество всех интегральных операторов, действующих из $L_2(\Lambda, d\lambda)$ в $L_2(M, d\mu)$, где $(\Lambda, d\lambda)$ и $(M, d\mu)$ — два пространства с мерой. При заданной функции $\psi(\lambda, \mu)$ рассмотрим линейное преобразование, сопоставляющее интегральному оператору T с ядром $T(\lambda, \mu)$ интегральный оператор Q, ядро которого — произведение

$\psi(\lambda,\mu)T(\lambda,\mu)$. В работе [37] было показано, что это преобразование можно записать как ДОИ с символом $\psi(\lambda,\mu)$. Более того, произвольный ДОИ может быть представлен как такое преобразование множителей, если допустить к рассмотрению операторнозначные ядра $T(\lambda,\mu)$. Результаты о ДОИ позволяют оценивать нормы оператора Q в различных классах $\mathfrak{S}_p$ через соответствующие нормы оператора T.

В указанных работах 1965–1973 гг. было установлено, что многие объекты анализа, имеющие различную природу, могут быть истолкованы как ДОИ при подходящем выборе спектральных мер. Так, если dE — спектральная мера, связанная с операторами умножения, а dF — мера, связанная с операторами дифференцирования, и $T=I$, то ДОИ (5.1) реализуется как псевдодифференциальный оператор с символом ψ. С помощью ДОИ удалось получить новые условия ограниченности ПДО в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Другой яркий пример — представление вольтеррова оператора через его мнимую компоненту, являющееся одним из основных объектов изучения в теории вольтерровых операторов. Оно также может быть записано в терминах ДОИ.

5.4. Основные применения теории ДОИ относятся к спектральной теории возмущений. Они базируются, в первую очередь, на важной формуле

$$\varphi(B)-\varphi(A)=\int\int\frac{\varphi(\lambda)-\varphi(\mu)}{\lambda-\mu}dE(\lambda)\,(B-A)\,dF(\mu). \tag{5.2}$$

Здесь A, B — самосопряженные операторы, dE, dF — их спектральные меры и φ — функция на числовой оси. Эта формула была оправдана при максимально общих условиях на функцию φ, причем допускались неограниченные операторы A и B. Требовалось лишь, чтобы их разность была ограниченным оператором. С помощью формулы (5.2) удалось, в частности, найти ответ на первоначальный вопрос (о ядерности оператора $\varphi(B)-\varphi(A)$). Формула, аналогичная (5.2), была получена и для коммутаторов.

Из формулы (5.2) выводится формула дифференцирования

$$\varphi'(A+tT)|_{t=0}=\int\int\frac{\varphi(\lambda)-\varphi(\mu)}{\lambda-\mu}dE(\lambda)\,T\,dE(\mu), \tag{5.3}$$

ранее установленная в работе Ю. Л. Далецкого и С. Г. Крейна при весьма узких условиях на функцию φ и только для ограниченных операторов A, B. В работах [33, 37, 59] эти условия были значительно расширены. Было также показано, что при $B-A\in\mathfrak{S}_p$ существует производная по норме класса $\mathfrak{S}_p$.

Наиболее точные аналитические условия на функцию φ, обеспечивающие справедливость формулы (5.3), были позднее получены В. В. Пеллером.

Одно из приложений ДОИ, связанное с формулой (5.3), уже упоминалось в п. 4.2. Оно заключается в выводе нового представления (4.2) для проинтегрированной функции спектрального сдвига.

Другое важное приложение формулы (5.3) было найдено в работе М. Ш. [64], совместной с Л. С. Коплиенко и М. З. Соломяком. Именно, там было показано, что для произвольных неотрицательных операторов A, B при любых $\alpha \in (0,1)$ и $p \in (0,\infty]$ справедлива оценка

$$\|(B^\alpha - A^\alpha)_\pm\|_{\mathfrak{S}_p} \leqslant \|((B-A)_\pm)^\alpha\|_{\mathfrak{S}_p}$$

с коэффициентом 1 в правой части!

§6. Функциональные пространства и кусочно-полиномиальные приближения. Энтропия

6.1. Интерес М. Ш. к теории функциональных пространств, и особенно к свойствам вложений пространств Соболева, ведет начало от его работ по спектральной теории дифференциальных операторов. Его первоначальные результаты в этой области уже кратко упоминались в §2. Они были существенно расширены и усилены в середине 1960-х годов, когда М. Ш. совместно с М. З. Соломяком приступил к систематическому исследованию количественных характеристик этих вложений. Исследование базировалось на новом методе приближений функций из пространств Соболева W_p^l, который был развит в работе [38]; см. также подробное изложение в лекциях [62] (английский перевод — [3] по списку книг). Этот метод можно трактовать как многомерный аналог приближений сплайнами с нефиксированными узлами.

Опишем кратко обсуждаемый метод для случая $l=1$. Пусть X — некоторое банахово пространство функций, заданных на единичном кубе $\mathbb{Q}^d \subset \mathbb{R}^d$. Предположим, что пространство Соболева $W_p^1(\mathbb{Q}^d)$ вложено в X и что это вложение компактно. Заданная функция $u \in W_p^1(\mathbb{Q}^d)$ приближается по норме пространства X подходящей кусочно-постоянной функцией f. Построение f определяется выбором разбиения куба $\mathbb{Q}^d$ на меньшие кубы. Их размеры могут быть произвольными, контролируется только их количество: оно не должно превосходить заданного числа n. Функция f в каждом кубе из данного разбиения принимается равной среднему значению функции u. Таким образом, приближающая функция полностью определяется выбором разбиения. Следующий шаг — решающий: для заданного n погрешность $\|u-f\|_X$ минимизируется по всем разбиениям, подчиненным указанному выше ограничению. Алгоритм процедуры разбиения, предложенный в [38], дает оптимальный порядок приближения в широком классе метрик $\|\cdot\|_X$.

Этот подход оказался весьма гибким и эффективным. Результаты, полученные с его помощью, можно отнести к двум типам. В первом выбор разбиений куба зависит от приближаемой функции; это делает процесс нелинейным. Во втором речь идет о приближениях в весовых пространствах $L_{q,V}$, и выбор разбиений зависит от весовой функции V. По отношению к приближаемой функции алгоритм линеен.

Результаты, полученные на основе второго алгоритма, получили много важных применений в спектральной теории дифференциальных и интегральных операторов; они описаны ниже в §7.

6.2. В заключительной части настоящего параграфа мы опишем основные приложения нелинейного процесса приближений. Они относятся к оценкам колмогоровской ε-энтропии $\mathcal{H}(\varepsilon)$ вложений классов Соболева в пространства C или L_q, $q < \infty$.

Обсудим задачу вложения в C для случая $d = 1$, $l = 1$. К концу 1950-х годов было хорошо известно, что ε-энтропия единичного шара пространства $C^\alpha[0,1]$, рассматриваемого как компакт в $C[0,1]$, допускает оценку $\mathcal{H}(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-1/\alpha})$. Она получается с помощью простой линейной процедуры. Например, при $\alpha \leqslant 1$ достаточно приближать функцию u, вписывая в ее график ломаную линию с равноотстоящими узлами. Такую же оценку ε-энтропии имеет единичный шар пространства $W_p^\alpha(0,1)$, рассматриваемый как компакт в $L_p(0,1)$. Однако ничего не было известно о поведении ε-энтропии в случае, когда метрика объемлющего пространства и метрика, в которой измеряются свойства производных, имеют различную природу, включая простейший случай вложения $W_p^1(0,1) \subset C[0,1]$.

Эта проблема была решена в [38] в полной общности. Было показано, что ε-энтропия вложения $W_p^l(\mathbb{Q}^d) \subset L_q(\mathbb{Q}^d)$ допускает оценку $\mathcal{H}(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-d/l})$, как только выполнено условие $1/p - l/d < 1/q$ компактности этого вложения. Таким образом, ε-энтропия зависит только от порядка гладкости, но не чувствительна к метрике, в которой гладкость измеряется. Важно также, что никакой линейный способ не может дать того же порядка приближений.

§7. Оценки и асимптотики спектра интегральных и дифференциальных операторов

7.1. Оценки спектра интегральных операторов. Второй круг приложений разработанного метода кусочно-полиномиальных приближений касается оценок сингулярных чисел интегральных операторов, действующих в весовых пространствах L_2. Именно такие оценки и были первоначальной целью М. Ш. и М. З. Соломяка, когда они начинали эту работу. Как отмечалось в §5, такие оценки потребовались в проблеме ограниченности ДОИ в алгебре $\mathfrak{B}$ всех непрерывных линейных операторов. Известные в то время методы были плохо приспособлены к получению оценок спектра операторов в весовых пространствах, и обсуждаемый подход был изобретен в процессе преодоления этого препятствия. Надо отметить, что впоследствии теми же авторами был найден другой, более элементарный способ решения этих вопросов.

Основные результаты по обсуждаемым оценкам были подытожены в статье [69]. В ней приведены как оценки, полученные с помощью кусочно-полиномиальных приближений, так и результаты, использующие другие подходы. Активно применяются идеи теории интерполяции линейных операторов. Хотя основной целью был вывод оценок спектра операторов, действующих в весовых пространствах, многие результаты оказались новыми и для операторов в „обычном“ L_2. В особенности это относится к операторам во всем пространстве $\mathbb{R}^d$, когда оценки определяются взаимодействием между гладкостью ядра и его поведением на бесконечности. В качестве примера можно привести подробную шкалу оценок для операторов с ядром $b(x)e^{ix\xi}a(\xi)$. Такие ядра возникают во многих приложениях, включая оператор Шрёдингера и псевдодифференциальные операторы.

7.2. Оценки и асимптотики спектра для „негладких“ эллиптических задач. Результаты по кусочно-полиномиальным приближениям непосредственно приводят к точным по порядку оценкам спектра для „весовых“ краевых задач в произвольных ограниченных областях $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, таких как задача

$$-\Delta u = \lambda V(x)u, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{7.1}$$

и ее аналог для полигармонического оператора. Пусть $N_+(\lambda)$ и $N_-(\lambda)$ — функции распределения положительных и отрицательных собственных значений задачи (7.1); мы допускаем здесь знакопеременный вес $V(x)$. Асимптотическое поведение $N_\pm(\lambda)$ дается классической формулой вейлевского типа

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-d/2} N_\pm(\lambda) = c_0(d) \int_\Omega V_\pm^{d/2}\,dx, \quad c_0(d) = (\Gamma(d/2+1))^{-1}(2\sqrt{\pi})^{-d}. \tag{7.2}$$

Для $V \equiv 1$ формула (7.2) была получена Г. Вейлем в 1912 г. с помощью вариационного подхода. Тауберова техника, развитая Карлеманом в 1936 г., оказалась более гибкой, и с тех пор она применялась в большинстве работ по спектральным асимптотикам. Однако эта техника всегда требует определенных условий на гладкость границы и весовой функции $V(x)$. К концу 1960-х годов по поводу негладкого случая не было известно ничего, кроме результатов Вейля и Куранта, в которых формула (7.2) была оправдана для $V \equiv 1$ и для ограниченных областей с „не слишком плохой" границей.

Оценки для $N_\pm(\lambda)$, найденные с помощью кусочно-полиномиальных приближений, содержат L_p-норму функции V с показателем p, зависящим от размерности d. Такие оценки оказались мощным средством при изучении спектральных асимптотик. Их применение основано на важном (хотя и достаточно элементарном) утверждении из абстрактной теории возмущений, доказанном в работе [49]. В применении к оценкам спектра из этого утверждения вытекает непрерывность в L_p нелинейных функционалов

$$V \mapsto \limsup_{\lambda\to\infty} \lambda^{-d/2} N_\pm(\lambda), \quad V \mapsto \liminf_{\lambda\to\infty} \lambda^{-d/2} N_\pm(\lambda)$$

для задачи (7.1). Важно, что это — априорный факт, не зависящий от конкретного вида асимптотического коэффициента, который в данном случае дается формулой (7.2). Применение этого общего факта и его аналогов легло в основу нового варианта вариационного подхода, который был разработан М. Ш. и М. З. Соломяком в ряде работ, начиная со статьи [49], и подытожен в лекциях [62] ([3] по списку книг). Там было показано, что этот подход адекватен для широкого класса негладких спектральных задач.

7.3. Перечислим некоторые результаты, полученные на этом пути.

1. Асимптотическая формула (7.2) для задачи Дирихле (7.1) справедлива, если $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — произвольная ограниченная область, а $V(x)$ — вещественная функция, причем $V \in L_1(\Omega)$ при $d = 1$ и $V \in L_p(\Omega)$ с каким-либо $p > d/2$ при $d \geqslant 2$. Позднее Г. В. Розенблюм показал, что при $d \geqslant 3$ результат справедлив, если $V \in L_{d/2}(\Omega)$, причем в любых (не обязательно ограниченных) областях.

   В частности, исходная формула Вейля (т. е. формула (7.2) при $V = 1$) справедлива для любой ограниченной области в любой размерности. Этот факт был распространен Г. В. Розенблюмом на произвольные открытые множества конечной меры.

   Отметим, что в рамках обсуждаемого подхода знакопеременность весовой функции V не вызывает никаких дополнительных трудностей. Ранее для случая таких весов были известны лишь отдельные результаты (Плейель).

2. Асимптотическая формула Вейля–Карлемана была оправдана в случае задачи Дирихле в произвольной ограниченной области для

любого равномерно эллиптического оператора второго порядка дивергентного вида с измеримыми ограниченными коэффициентами (см. [57]). В случае граничного условия Неймана тот же результат был получен, если граница области липшицева. Во всех ранее известных результатах такого типа требовалась некоторая регулярность (по меньшей мере непрерывность) старших коэффициентов. Аналогичные результаты были получены для операторов более высокого порядка, включая эллиптические системы (см. [60]).

3. Была получена асимптотика спектра интегральных операторов со „слабо полярными“ ядрами, действующих в $L_2(\Omega)$ (см. [48]), а также для псевдодифференциальных операторов отрицательного порядка (см. [67, 73]). При этом на символ оператора накладывались минимальные условия гладкости.
4. В статье [75] и серии последующих работ были получены оценки и асимптотики спектра для операторов, ассоциированных с вариационными задачами, рассматриваемыми на пространстве решений заданной эллиптической системы. К таким задачам, в частности, приводит исследование разности обратных для одного и того же эллиптического оператора при различных краевых условиях, например, $\Delta_{\mathcal{N}}^{-1} - \Delta_{\mathcal{D}}^{-1}$, где $\Delta_{\mathcal{N}}$, $\Delta_{\mathcal{D}}$ — лапласианы Неймана и Дирихле. Тем самым получили свое завершение результаты работы [22], где для таких задач были получены только оценки.

§8. Оператор Максвелла в областях с негладкой границей: асимптотическое поведение спектра

8.1. Для пустого электромагнитного резонатора в ограниченной области с гладкой, идеально проводящей границей асимптотическое поведение собственных частот было найдено Г. Вейлем еще в 1912 г. Результаты для негладкой ситуации (заполненный резонатор с негладкой границей при негладких тензорах электрической и магнитной проницаемости $\varepsilon(x)$, $\mu(x)$) были получены лишь сравнительно недавно, в основном — М. Ш. Бирманом и его коллегами и учениками. Причины такой задержки не чисто технические; они коренятся в природе самой задачи.

Формально стационарный оператор Максвелла задается дифференциальным выражением

$$M_{\varepsilon,\mu}\{\mathbf{u},\mathbf{v}\} = \{i\varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\,\mathbf{u}, -i\mu^{-1}\mathrm{rot}\,\mathbf{v}\}$$

при условиях соленоидальности

$$\mathrm{div}\,(\varepsilon\mathbf{u}) = 0, \quad \mathrm{div}\,(\mu\mathbf{v}) = 0$$

и граничных условиях

$$\mathbf{u}_\tau|_{\partial\Omega} = 0, \quad (\mu\mathbf{v})_\nu|_{\partial\Omega} = 0.$$

Здесь $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ обозначают электрическую и магнитную составляющие электромагнитного поля, а индексы τ, ν отмечают касательную и нормальную компоненты векторного поля на границе. Однако необходимо должным образом определить все эти операции, а это не так просто сделать, если граница области и матрицы-функции $\varepsilon(x)$, $\mu(x)$ — не гладкие. Такая негладкость важна для многих приложений — например, при анализе электромагнитных колебаний в областях с ребрами, экранами или коническими точками, а также при рассмотрении электромагнитного поля в слоистых средах.

Первым делом требуется определить оператор $M_{\varepsilon,\mu}$ как самосопряженный оператор, действующий в правильно выбранном гильбертовом пространстве. В случае заполненного резонатора оно представляет собой пространство L_2 вектор-функций с матричным весом, порожденным матрицами $\varepsilon(x), \mu(x)$. Сложности начинаются при попытке описания области определения оператора. Дело в том, что он не полуограничен, и поэтому подход через квадратичные формы невозможен. Правильный выбор самосопряженной реализации оператора диктуется условием конечности электромагнитной энергии. В негладком случае область определения оператора не допускает описания в терминах пространств Соболева.

Задача построения „правильной“ самосопряженной реализации оператора Максвелла была в основном решена в работах Н. Века и Р. Пикара в 1970–1980-е годы. Они описали (в терминах операций векторного анализа) функциональные пространства, принадлежность которым электрической и магнитной компоненты поля выделяет физически осмысленную самосопряженную реализацию оператора Максвелла. Однако эти авторы не изучали асимптотическое поведение частот электромагнитных колебаний.

Стандартные вычисления с символами операторов формально приводят к следующему результату. Пусть $r(\xi)$ — символ операции rot, т. е.

$$r(\xi) = i \begin{pmatrix} 0 & \xi_3 & -\xi_2 \\ -\xi_3 & 0 & \xi_1 \\ \xi_2 & -\xi_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\Lambda_1(x,\xi)$, $\Lambda_2(x,\xi)$ положительные собственные значения алгебраической задачи

$$r(\xi)\mu(x)^{-1}r(\xi)\mathbf{h} = \Lambda\varepsilon(x)\mathbf{h}, \quad \mathbf{h} \in \mathbb{C}^3,\ x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^3;$$

третье собственное значение равно нулю. Положим

$$\Gamma(\varepsilon, \mu, \Omega) = \frac{1}{24\pi^3} \int\limits_{\Omega} \int\limits_{|\xi|=1} \left(\Lambda_1(x,\xi)^{-3/2} + \Lambda_2(x,\xi)^{-3/2} \right) dS(\xi)\, dx$$

(внутреннее интегрирование — по площади поверхности шара). Тогда для собственных частот m_k электромагнитных колебаний (собственных значений оператора $M_{\varepsilon,\mu}$) справедлива асимптотическая формула

$$\lim_{k\to\infty} k^{-1} m_k^3 = \Gamma(\varepsilon, \mu, \Omega). \tag{8.1}$$

Она сравнительно несложно оправдывается в случае гладкой границы и гладких матриц $\varepsilon(x)$, $\mu(x)$. В негладком случае для той же цели требуется большая дополнительная работа.

8.2. Первые работы М. Ш. Бирмана по этой тематике относятся к середине 70-х годов. Совместно со своим учеником А. Б. Алексеевым он разработал [66, 70] общую геометрическую схему (в смысле геометрии гильбертова пространства), сводящую проблему электромагнитных колебаний для заполненного резонатора к простейшему случаю пустого резонатора. В случае гладкой границы это немедленно приводит к оправданию формулы (8.1) при любых заполнениях; требуется лишь, чтобы матрицы-функции $\varepsilon(x)$, $\mu(x)$ были измеримы, ограничены и ограниченно обратимы. Случай негладкой границы оказался более трудным. Дальнейший прогресс был достигнут на основе результатов об аналитической структуре векторных полей, принадлежащих области определения электрической компоненты электромагнитного поля. Этот анализ был проведен в работах М. Ш. [88, 89, 95] и в его совместных с М. З. Соломяком работах [90, 97]; см. также обзор [93]. Именно, было установлено, что электрическая составляющая $\mathbf{u}(x)$ в случае пустого резонатора с липшицевой границей допускает разложение вида

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \nabla w, \tag{8.2}$$

где $\mathbf{u}_0 \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, а w — слабое решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона: $-\Delta w = f$, $w|_{\partial\Omega} = 0$, при некотором $f \in L_2(\Omega)$. Справедливость аналогичного разложения была установлена также для областей с экранами. На этой основе в [91] удалось оправдать формулу (8.1) для пустого резонатора с липшицевой границей. Окончательный результат в этом направлении был получен М. Ш. совместно с его учеником Н. Д. Филоновым в работе [160], где вейлевская асимптотика (8.1) была оправдана в случае произвольной области Ω при единственном условии справедливости разложения (8.2). Это — результат принципиальной важности, так как он сводит оправдание асимптотической формулы (8.1) к чисто аналитической проблеме описания особенностей векторных полей определенного класса. Результат для пустого резонатора переносится на случай заполненного резонатора автоматически на основании упомянутой выше схемы Бирмана и Алексеева, получившей дальнейшее развитие в работе [157], совместной с Филоновым.

Программа по изучению спектральных характеристик „негладкого“ оператора Максвелла была инициирована М. Ш. еще в начале 1970-х годов. Работу [160] 2007 г. можно считать завершающей в цикле, посвященном реализации этой программы.

8.3. Необходимо упомянуть также программную статью [114], в которой М. Ш. сравнивает свойства разрешимости трех важных задач в трехмерных многогранниках. Имеются в виду системы уравнений Максвелла, Стокса и Ламе. При подходящих граничных условиях, имеющих физическую природу, все три задачи формально сводятся к одной и той же граничной задаче для системы уравнений первого порядка. Однако в случае невыпуклого многогранника физический смысл диктует для каждой из задач различный выбор самосопряженной реализации. Работа содержит подробное обсуждение этого неожиданного эффекта.

§9. Оценки и асимптотики для числа отрицательных собственных значений оператора Шрёдингера

9.1. Первая оценка числа отрицательных собственных значений оператора Шрёдингера $-\Delta - V$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$, а именно оценка (2.3), была получена М. Ш. в работах [15, 19]. Другая важная оценка была получена в 1972 г. Г. В. Розенблюмом, усовершенствовавшим метод кусочно-полиномиальных приближений, обсуждавшийся выше в §6. Этот результат был впоследствии независимо повторен Э. Либом и М. Цвикелем и известен как „оценка Розенблюма–Либа–Цвикеля“. Она имеет вид

$$N_-(-\Delta - \alpha V) \leqslant C(d)\alpha^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} V_+^{d/2}\,dx, \quad \forall \alpha > 0, \ d \geqslant 3. \tag{9.1}$$

В дополнение к (9.1) справедлива асимптотическая формула

$$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha^{-d/2} N_-(-\Delta - \alpha V) = c_0(d) \int_{\mathbb{R}^d} V_+^{d/2}\,dx, \quad d \geqslant 3, \tag{9.2}$$

где $c_0(d)$ — та же постоянная, что в формуле (7.2). Для справедливости оценки (9.1) и асимптотики (9.2) достаточно, чтобы интеграл в правой части был конечен. Более того, в случае $d \geqslant 3$ и $V(x) \geqslant 0$ включение

$V \in L_{d/2}(\mathbb{R}^d)$ необходимо и достаточно для квазиклассической оценки $N_-(-\Delta - \alpha V) = O(\alpha^{d/2})$.

9.2. Назовем (при $d \geqslant 3$) случай $V \in L_{d/2}(\mathbb{R}^d)$ *регулярным.* Возможен и нерегулярный случай, когда потенциал V исчезает на бесконечности (так что отрицательный спектр дискретен), но $V \notin L_{d/2}(\mathbb{R}^d)$. Возникающие при этом эффекты были подробно изучены М. Ш. в серии совместных с М. З. Соломяком работ, из которых наиболее важные — это статьи [109, 113]. Основным средством была линейная интерполяция, к которой сводилось дело после применения принципа Бирмана–Швингера. Базой для интерполяции служили оценка (9.1) и важный результат В. Г. Мазьи, дающий критерий ограниченности вложения однородного пространства Соболева $\mathcal{H}^l(\mathbb{R}^d)$ в весовое пространство $L_{2,V}(\mathbb{R}^d)$. В результате была получена шкала оценок, описывающих потенциалы, для которых

$$N_-(-\Delta - \alpha V) = O(\alpha^q) \tag{9.3}$$

при любом заданном $q > d/2$. В частности, было показано, что точные результаты этого типа должны формулироваться в терминах „слабых“ весовых L_q-классов. Оценки в терминах „обычных“ L_q, полученные ранее Ю. В. Егоровым и В. А. Кондратьевым, оказались не точны в том смысле, что при указанных ими условиях в (9.3) всегда заведомо стоит „o“ вместо „O“. В [109] для любого $q > d/2$ были построены примеры потенциалов V, таких что $N_-(-\Delta - \alpha V) \sim C\alpha^q$, где $C > 0$.

Было также установлено, что в нерегулярном случае асимптотическое поведение функции $N_-(-\Delta - \alpha V)$ при $\alpha \to \infty$ определяется поведением потенциала в окрестности его особых точек и на бесконечности. В регулярном случае дело обстоит иначе: формула (9.2) показывает, что при $V(x) > 0$ любое подмножество ненулевой меры в $\mathbb{R}^d$ вносит вклад в асимптотический коэффициент.

Другой особенностью нерегулярных оценок является их неустойчивость по отношению к дополнительному спектральному параметру: может случиться, что поведение функции $N_-(-\Delta - \alpha V)$ нерегулярно, в то время как при любом $h > 0$ выполнена оценка $N_-(-\Delta + h - \alpha V) = O(\alpha^{d/2})$.

9.3. В этом круге вопросов случай малых размерностей ($d = 1, 2$) стоит особняком. Оценка (9.1) при $d = 1, 2$ неверна. При $d = 1$ естественно рассматривать оператор $H_{\alpha V} = -\frac{d^2}{dx^2} - \alpha V$ на полуоси $\mathbb{R}_+$ при условии Дирихле в точке $x = 0$. Первые оценки квазиклассического порядка $O(\alpha^{1/2})$ для этого случая были получены М. Ш. совместно с его учеником В. В. Борзовым в работе [54] еще в 1971 г. Заметим, что известная оценка Баргмана для этого оператора дает $N_-(H_{\alpha V}) = O(\alpha)$ и в обсуждаемом смысле не является регулярной. В [109] было получено более общее достаточное условие регулярного роста функции $N_-(H_{\alpha V})$, и затем с помощью интерполяции были указаны классы потенциалов, гарантирующие поведение $N_-(H_{\alpha V}) = O(\alpha^q)$ с любым наперед заданным $q > 1/2$. Было также показано, что найденные условия на потенциал не только достаточны, но и необходимы. Это отличает одномерный случай от случая $d \geqslant 3$, в котором известны лишь достаточные условия для $N_-(-\Delta - \alpha V) = O(\alpha^q)$, $2q > d$ (хотя для регулярного поведения известно необходимое и достаточное условие $V \in L_{d/2}(\mathbb{R}^d)$).

Результаты работы [109] относятся не только к оператору Шрёдингера, но и к его аналогам $(-\Delta)^l - \alpha V$ высших порядков. Для $2l < d$ справедлив аналог оценки (9.1) с показателем $d/2l$ вместо $d/2$. Для $2l > d$ оценки имеют иную природу; частным случаем является одномерная задача, которая обсуждалась выше.

„Пограничный“ случай $d = 2$, который изучался в работе [130] М. Ш. Бирмана и А. А. Лаптева, во многих отношениях является особым. В частности, критерий регулярного поведения $N_-(-\Delta - \alpha V) = O(\alpha)$ до сих пор неизвестен, хотя известны широкие достаточные условия такого поведения. Кроме того, при $d \geqslant 3$ и $V \geqslant 0$ оценка $N_-(-\Delta + h - \alpha V) = O(\alpha^{d/2})$ при каком-либо одном значении $h > 0$ влечет такую же оценку при $h = 0$ и, как следствие, имеет место включение $V \in L_{d/2}(\mathbb{R}^d)$ и асимптотика (9.2). В [130] показано, что эти факты могут нарушаться при $d = 2$. Построены примеры потенциалов, для которых при $h > 0$ функция $N_-(-\Delta + h - \alpha V)$ имеет вейлевскую асимптотику, но при $h = 0$ это уже не верно: возможен случай, когда $N_-(-\Delta - \alpha V) = O(\alpha^q)$ при $q > 1$, и возможен случай, когда $N_-(-\Delta - \alpha V) \sim C\alpha$, но коэффициент C — не вейлевский. Были выяснены причины таких эффектов: они лежат в структуре спектра невозмущенного оператора (свободного лапласиана) в окрестности его нижней границы, т. е. в данном случае — в окрестности точки $\lambda = 0$. Впоследствии М. Ш. и его сотрудники нашли много других проявлений таких *пороговых* эффектов; см. ниже §10.

§10. Дискретный спектр возмущенного оператора в спектральных лакунах невозмущенного оператора

10.1. Предположим, что в существенном спектре самосопряженного оператора A имеются лакуны. Типичным примером является оператор Дирака, спектр которого есть $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, и оператор Шрёдингера с периодическим потенциалом, спектр которого имеет зонную структуру. Пусть V — симметричный, компактный относительно A оператор. Тогда у возмущенного оператора $A + V$ может появиться дискретный спектр в спектральных лакунах оператора A. Для исследования этого дискретного спектра вариационная техника непосредственно неприменима. Еще в работах [16, 19] М. Ш. показал, как преодолеть эту трудность для оператора Дирака. Но вплотную он занялся исследованием задач такого типа уже в 1990-е годы.

Пусть (λ_-, λ_+) — лакуна в спектре оператора A (не исключается случай полубесконечной лакуны, т. е. $\lambda_- = -\infty$). Предположим для простоты, что $V \geqslant 0$, и рассмотрим возмущенный оператор $A(t) = A - tV$, $t \geqslant 0$. При возрастании параметра t собственные значения $\lambda_k(t)$ оператора $A(t)$ „рождаются“ на правом краю лакуны λ_+ и двигаются влево, „исчезая“ на левом краю лакуны. Фиксируем *точку наблюдения* $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$; пусть $\alpha > 0$. Через $N(A, V, \alpha, \lambda)$ обозначим число собственных значений $\lambda_k(t)$ оператора $A(t)$, которые прошли через точку наблюдения λ при возрастании параметра t от 0 до α. Задача состоит в изучении асимптотики величины $N(A, V, \alpha, \lambda)$ при фиксированном λ и $\alpha \to \infty$.

10.2. В большой серии работ [110, 111, 118–120, 123, 127, 134, 135, 144, 146] (в особенности см. обзор [128]) М. Ш. Бирман, отчасти с сотрудниками и учениками, подробно изучает эту проблему. Существенно различие между случаями, когда $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+)$, и случаем $\lambda = \lambda_+$ (когда точка наблюдения совпадает с правым краем лакуны). Для первого случая в [110] была установлена общая „теорема сравнения“. Пусть A полуограничен снизу, а B получается из A возмущением, относительно ограниченным с нулевой гранью (в смысле квадратичных форм). Теорема сравнения утверждает, что при некоторых предположениях о V величины $N(A, V, \alpha, \lambda)$ и $N(B, V, \alpha, \mu)$ имеют одинаковое асимптотическое поведение при $\alpha \to \infty$ при всех вещественных $\lambda \in \rho(A)$, $\mu \in \rho(B)$ (здесь $\rho(\cdot)$ — резольвентное множество оператора). В применении к возмущенному периодическому оператору Шрёдингера $-\Delta + p(x) - tV(x)$ (когда $A = -\Delta$, $B = -\Delta + p(x)$, где $p(x)$ — периодический потенциал) это позволяет использовать известные результаты об отрицательном спектре „обычного“ оператора Шрёдингера $-\Delta - tV(x)$; см. §9. Случай $\lambda = \lambda_+$ значительно сложнее; здесь могут проявиться пороговые эффекты, упомянутые в §9.

10.3. Остановимся на результатах для случая, когда невозмущенный оператор действует в $L_2(\mathbb{R}^d)$ и имеет вид

$$H = -\operatorname{div} g(x)\nabla + p(x),$$

где положительно определенная матрица-функция $g(x)$ и вещественная функция $p(x)$ периодичны относительно некоторой решетки. Для простоты будем считать, что решетка периодов есть $\mathbb{Z}^d$. Напомним вначале, как устроен спектр периодического оператора H. В силу теории Флоке–Блоха оператор H раскладывается (в смысле унитарной эквивалентности) в прямой интеграл

$$H \sim \int_{[-\pi,\pi)^d}^{\oplus} H(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}, \tag{10.1}$$

где операторы $H(\mathbf{k})$ действуют в $L_2(\mathbb{Q}^d)$ и зависят от параметра $\mathbf{k}$ (*квазиимпульса*). Напомним, что $\mathbb{Q}^d$ обозначает единичный куб в $\mathbb{R}^d$. Оператор $H(\mathbf{k})$ задается дифференциальным выражением

$$H(\mathbf{k}) = (\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g(x)(\mathbf{D}+\mathbf{k}) + p(x) \tag{10.2}$$

при периодических граничных условиях; здесь $\mathbf{D} = -i\nabla$. Спектр операторов $H(\mathbf{k})$ дискретен; соответствующие упорядоченные собственные значения обозначим через $E_j(\mathbf{k})$, $j \in \mathbb{N}$ (они нумеруются с учетом кратностей). Соответствующие собственные функции оператора $H(\mathbf{k})$ обозначим через $\varphi_j(x;\mathbf{k})$. Собственные значения $E_j(\mathbf{k})$ как функции параметра $\mathbf{k}$ называются *зонными функциями*. Зонные функции непрерывны и $(2\pi\mathbb{Z})^d$-периодичны. Спектр оператора H имеет *зонную структуру*: он является объединением замкнутых отрезков (спектральных зон), представляющих собой образы функций $E_j(\cdot)$, $j \in \mathbb{N}$. Зоны могут перекрываться (при $d \geqslant 2$); с другой стороны, в спектре могут открываться лакуны. Пусть (λ_-, λ_+) — такая лакуна. Тогда число λ_+ совпадает с минимумом некоторой зонной функции $E_j(\cdot)$. Обычно делаются предположения о „регулярном“ устройстве края лакуны. Они состоят в том, что зонная функция E_j, реализующая край лакуны, только одна, и что E_j имеет конечное число точек минимума, причем вблизи этих точек минимума поведение E_j квадратичное. На нижнем краю спектра эти условия выполнены автоматически. Под *пороговыми характеристиками* оператора H на краю лакуны λ_+ подразумеваются асимптотики функций $E_j(\cdot)$ и $\varphi_j(x;\cdot)$ вблизи точек минимума E_j.

10.4. Рассмотрим возмущенный оператор $H(t) = H - tV$, где $V(x)$ — вещественная функция, исчезающая при $|x| \to \infty$. Для спектра оператора $H(t)$ в лакуне картина аналогична поведению отрицательного дискретного спектра обычного оператора Шрёдингера. Пусть $d \geqslant 3$. Тогда случай $V \in L_{d/2}(\mathbb{R}^d)$ регулярный, $N(H,V,\alpha,\lambda_+)$ имеет вейлевскую асимптотику. Случай $V \notin L_{d/2}(\mathbb{R}^d)$ нерегулярный; для всякого $q > d/2$ можно указать класс потенциалов V, таких что $N(H,V,\alpha,\lambda_+) \sim C\alpha^q$. При этом асимптотический коэффициент C определяется не только потенциалом V, но и пороговыми характеристиками оператора H на краю лакуны. Соответствующие асимптотики называют „пороговыми“. При $d \geqslant 3$ регулярный случай изучался в [127], а нерегулярный — в [134].

Как и для „обычного“ оператора Шрёдингера, двумерный случай — особый; спектр в полубесконечной лакуне $(-\infty, \lambda_+)$ для двумерного оператора $H(t)$ изучался в статье М. Ш. [144], совместной с А. А. Лаптевым и Т. А. Суслиной. Асимптотики здесь могут быть нерегулярными. Для всякого $q > 1$ был выделен класс потенциалов V, для которых $N(H, V, \alpha, \lambda_+) \sim C\alpha^q$; коэффициент C имеет пороговую природу. Был также указан класс потенциалов V, для которых наблюдается конкуренция между вейлевской и пороговой асимптотикой: $N(H, V, \alpha, \lambda_+) \sim C\alpha$ (т. е. порядок асимптотики вейлевский), но асимптотический коэффициент представляет собой сумму вейлевского и порогового членов.

Отметим также статью М. Ш. [146], совместную с М. З. Соломяком, в которой подобные эффекты наблюдались для оператора второго порядка в d-мерном волноводе, периодическом в одном направлении. Коэффициенты невозмущенного оператора также предполагаются периодическими, а возмущение стремится к нулю при $|x| \to \infty$ вдоль оси волновода. Изучается дискретный спектр возмущенного оператора в полубесконечной лакуне. Эта задача близка к одномерной, хотя и существенно более сложна. В отличие от задачи во всем $\mathbb{R}^d$ здесь пороговый эффект проявляется в любой размерности $d > 1$.

§11. Абсолютная непрерывность спектра периодических операторов математической физики

11.1. Как обсуждалось выше в п. 10.3, спектр периодического эллиптического оператора, действующего в $L_2(\mathbb{R}^d)$, имеет зонную структуру. Теоретически какая-либо спектральная зона может вырождаться в точку, являющуюся собственным значением бесконечной кратности. Это происходит, если соответствующая зонная функция постоянна: $E_j(\mathbf{k}) = \mathrm{const}$. (Известны примеры операторов, для которых такое вырождение действительно происходит.) Если же вырожденных зон нет, то спектр периодического оператора оказывается чисто абсолютно непрерывным. Проблема доказательства отсутствия вырожденных спектральных зон — важная и трудная задача.

Впервые отсутствие вырожденных спектральных зон для периодического оператора Шрёдингера $H = -\Delta + p(x)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$ было доказано Л. Томасом в 1973 г. Поясним основную идею схемы Томаса. Пусть, для простоты, решетка периодов есть $\mathbb{Z}^d$. Пусть $H(\mathbf{k})$ — семейство операторов в $L_2(\mathbb{Q}^d)$, возникающих при разложении оператора H в прямой интеграл (см. (10.1), (10.2) при $g = 1$). Это аналитическое семейство операторов с компактной резольвентой. Схема Томаса состоит в изучении аналитического продолжения операторного семейства $H(\mathbf{k})$ на комплексные значения квазиимпульса. Точнее, рассматриваются значения $\mathbf{k} = (\pi + iy, \mathbf{k}')$, где $\mathbf{k}' \in \mathbb{R}^{d-1}$ фиксировано, а $y = \operatorname{Im} k_1$ — большой параметр. Томас показал, что соответствующий оператор $H(y) := H(\pi + iy, \mathbf{k}')$ обратим при достаточно большом $|y|$. Более того, справедлива *оценка Томаса*

$$\|H(y)^{-1}\| \leqslant C(1 + |y|)^{-1}, \quad |y| \geqslant y_0. \tag{11.1}$$

Используя аналитическую альтернативу Фредгольма, отсюда легко вывести отсутствие вырожденных спектральных зон.

Вначале оценка (11.1) устанавливается (с помощью рядов Фурье) для „свободного“ оператора $H_0(y)$, отвечающего случаю $p(x) = 0$. Затем потенциал $p(x)$ удается учесть как аддитивное возмущение, и оценка (11.1) переносится на случай „возмущенного“ оператора $H(y)$.

11.2. Существенно более сложный случай представляет собой *магнитный оператор Шрёдингера* $M = (\mathbf{D} - \mathbf{A}(x))^2 + p(x)$. Здесь $\mathbf{A}(x)$ — периодический векторный (магнитный) потенциал. Доказать оценку вида (11.1) для соответствующего оператора $M(y)$, рассматривая $M(y)$ как аддитивное возмущение „свободного“ оператора $H_0(y)$, уже не удается: возмущение содержит члены порядка $|y|$. Эту трудность не удавалось преодолеть почти четверть века.

В 1997 г. в прорывной работе [131] М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной была доказана абсолютная непрерывность спектра периодического магнитного гамильтониана M в размерности $d = 2$. Подход из [131] был основан на изучении оператора $P = (\mathbf{D} - \mathbf{A})^2 + \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$ (одного из двух блоков двумерного оператора Паули), допускающего удобную факторизацию. Благодаря этой факторизации удалось рассмотреть $P(y)$ как мультипликативное возмущение оператора $H_0(y)$ и доказать оценку вида (11.1) для $P(y)^{-1}$. После этого переход от $P(y)$ к $M(y)$ уже не представлял проблемы и происходил как учет аддитивного возмущения.

После почти 25-летнего застоя работа [131] вызвала появление целой серии работ разных авторов по проблеме абсолютной непрерывности спектра периодических операторов. При $d \geqslant 3$ задача об абсолютной непрерывности спектра периодического магнитного гамильтониана была решена в 1997 г. А. В. Соболевым (случай $d \geqslant 3$ оказался существенно сложнее двумерного).

Сам М. Ш. вместе с Т. А. Суслиной продолжал исследования по этой теме в работах [138, 140–142, 148] (в работе [142] соавтором был также Р. Г. Штеренберг, ученик М. Ш.).

§12. Пороговые свойства и задачи усреднения периодических дифференциальных операторов

12.1. Последний большой и важный цикл работ М. Ш. Бирмана (совместных с Т. А. Суслиной), основные из которых — это [145, 151, 155, 156, 158, 161], посвящен исследованию пороговых свойств и задач усреднения периодических дифференциальных операторов. Началось с работы [139], в которой были исследованы спектральные характеристики двумерного периодического оператора Паули на краю спектра (пороговые характеристики). Стало ясным, что „хорошие“ свойства пороговых характеристик связаны не только с конкретной спецификой оператора Паули, но и с наличием факторизации вида X^*X, где X — однородный дифференциальный оператор первого порядка. Это наблюдение привело к выделению широкого класса матричных периодических дифференциальных операторов (см. п. 12.2) и изучению их пороговых свойств. В процессе этой работы у М. Ш. возникла мысль, что пороговые свойства периодических дифференциальных операторов должны иметь связь с задачами усреднения в пределе малого периода (с гомогенизацией). Впоследствии было понято, что процедуру усреднения периодического оператора можно и полезно изучать как проявление спектрального порогового эффекта на краю спектра. На этом пути были получены результаты нового типа в теории усреднений, получившие название „операторные оценки погрешности“.

12.2. Опишем класс операторов. В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассматривается матричный эллиптический оператор A второго порядка, допускающий факторизацию вида

$$A = A(g,f) = f(x)^* b(\mathbf{D})^* g(x) b(\mathbf{D}) f(x). \tag{12.1}$$

Здесь $g(x)$ и $f(x)$ — периодические матрицы-функции размеров $m \times m$ и $n \times n$ соответственно, где $m \geqslant n$. Обе матрицы ограничены и ограниченно обратимы, а $g(x)$ положительно определена. Далее, $b(\mathbf{D})$ — $(m \times n)$-матричный однородный дифференциальный оператор первого порядка; его символ $b(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, есть матрица максимального ранга при всех $\xi \neq 0$. В случае, когда $f(x)$ — единичная матрица, используем обозначение $\widehat{A} = \widehat{A}(g) = A(g,\mathbf{1})$. Многие периодические операторы математической физики допускают подобную факторизацию.

12.3. Основные объекты исследования — операторы $\widehat{A}_\varepsilon = \widehat{A}(g^\varepsilon)$, $A_\varepsilon = A(g^\varepsilon, f^\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, где $g^\varepsilon(x) = g(\varepsilon^{-1}x)$, $f^\varepsilon(x) = f(\varepsilon^{-1}x)$. Коэффициенты этих операторов быстро осциллируют при малом ε. *Теория усреднений* изучает свойства подобных операторов при $\varepsilon \to 0$.

Типичная эллиптическая задача усреднения состоит в изучении поведения при малом ε решения u_ε уравнения

$$\widehat{A}_\varepsilon u_\varepsilon + u_\varepsilon = F, \quad F \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n). \tag{12.2}$$

Известно, что существует предел: $u_\varepsilon \to u_0$ при $\varepsilon \to 0$, где u_0 — решение так называемого „усредненного“ (или „эффективного“) уравнения

$$\widehat{A}^0 u_0 + u_0 = F. \tag{12.3}$$

Здесь $\widehat{A}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ — „эффективный“ оператор, а g^0 — постоянная положительная „эффективная“ матрица. Рецепт нахождения эффективной матрицы хорошо известен. Он нетривиален: g^0 определяется в терминах периодических решений некоторых вспомогательных эллиптических задач на ячейке решетки периодов.

Возникает вопрос о характере сходимости u_ε к u_0 и об оценке погрешности. Традиционными методами теории усреднений устанавливается сильная сходимость в L_2 с погрешностью $\|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2} \leqslant C\varepsilon$. Однако оставалось неизвестным, как постоянная C зависит от правой части F уравнения (12.2).

В работе [145] было впервые показано, что справедлива оценка

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2} \leqslant C\varepsilon \|F\|_{L_2}. \tag{12.4}$$

Оценку (12.4) можно переписать в операторных терминах:

$$\|(\widehat{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\widehat{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2 \to L_2} \leqslant C\varepsilon, \tag{12.5}$$

отсюда и пошел термин „операторные оценки погрешности“. Оценка (12.5) точна по порядку; постоянная C явно контролируется. В работе [151] была найдена аналогичная, но несколько более сложная, аппроксимация и для резольвенты более общего оператора A_ε.

В дальнейшем в [155, 156] были получены более точные аппроксимации резольвенты для операторов $\widehat{A}_\varepsilon$ и A_ε по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ с погрешностью $O(\varepsilon^2)$. В [158] найдены аппроксимации резольвенты по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ в пространство Соболева $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, с погрешностью $O(\varepsilon)$. И в том и в другом случае в аппроксимациях необходимо учитывать члены порядка ε — так называемые корректоры. Был обнаружен интересный эффект: форма корректора зависит от того, в какой операторной норме проводятся оценки.

12.4. Общие результаты применялись к конкретным операторам математической физики. Наиболее сложной оказалась задача усреднения для стационарной периодической системы Максвелла, которая изучалась в [151, гл. 7; 159] и в работах Т. А. Суслиной. Впоследствии метод, развитый первоначально для эллиптических задач, был распространен Т. А. Суслиной и на параболические задачи усреднения.

Последний значительный результат в этой области, полученный в статье [161] М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной, касается операторных оценок погрешности в задачах усреднения для нестационарных уравнений типа Шрёдингера и гиперболического типа. Рассмотрим, например, задачу Коши для уравнения типа Шрёдингера:

$$i\frac{\partial u_\varepsilon(x,\tau)}{\partial\tau} = \widehat{A}_\varepsilon u_\varepsilon, \quad u_\varepsilon(x,0) = \phi(x); \quad \phi \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n).$$

При фиксированном τ и $\varepsilon \to 0$ решение u_ε сходится в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ к решению u_0 усредненной задачи:

$$i\frac{\partial u_0(x,\tau)}{\partial\tau} = \widehat{A}^0 u_0, \quad u_0(x,0) = \phi(x).$$

Вопрос заключается в оценке погрешности. Здесь возникают новые трудности: оценить разность операторных экспонент $\exp(-i\widehat{A}_\varepsilon\tau) - \exp(-i\widehat{A}^0\tau)$ по операторной норме в L_2 уже не удается. Но удается получить оценку вида

$$\|\exp(-i\widehat{A}_\varepsilon\tau) - \exp(-i\widehat{A}^0\tau)\|_{H^3\to L_2} \leqslant (C_1 + C_2|\tau|)\varepsilon,$$

что позволяет дать квалифицированные оценки погрешности:

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2} \leqslant (C_1 + C_2|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{s/3}, \quad \phi \in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \quad 0 < s \leqslant 3.$$

Аналогичные результаты получаются и в случае гиперболических уравнений.

12.5. Поясним основные идеи метода на примере получения оценки (12.5). Будем опять считать, что решетка периодов есть $\mathbb{Z}^d$. *Масштабным преобразованием* (12.5) сводится к оценке

$$\|(\widehat{A} + \varepsilon^2 I)^{-1} - (\widehat{A}^0 + \varepsilon^2 I)^{-1}\|_{L_2\to L_2} \leqslant C\varepsilon^{-1}. \tag{12.6}$$

Таким образом, требуется аппроксимировать резольвенту оператора $\widehat{A}$ в точке $-\varepsilon^2$, близкой к нижнему краю спектра $\lambda = 0$. Естественно, что главный вклад в такую аппроксимацию должны давать пороговые характеристики оператора $\widehat{A}$ на краю спектра. Оператор $\widehat{A}$ раскладывается в прямой интеграл по операторам $\widehat{A}(\mathbf{k})$, действующим в $L_2(\mathbb{Q}^d)$ (ср. разложение (10.1), (10.2)). Тогда оценка (12.6) равносильна аналогичной аппроксимации по операторной норме в $L_2(\mathbb{Q}^d)$ для резольвенты $(\widehat{A}(\mathbf{k}) + \varepsilon^2 I)^{-1}$ (аппроксимация должна быть равномерной по параметру $\mathbf{k} \in [-\pi,\pi)^d$). Основная часть исследования касается изучения свойств операторного семейства $\widehat{A}(\mathbf{k})$ — аналитического операторного семейства с компактной резольвентой — методами *аналитической теории возмущений* по одномерному параметру $t = |\mathbf{k}|$. На этом пути удается построить подходящую аппроксимацию резольвенты в терминах вспомогательного оператора конечного ранга („*спектрального ростка*“), несущего информацию о пороговых характеристиках оператора $\widehat{A}$. Выясняется, что эффективный оператор $\widehat{A}^0$ имеет тот же росток; это и приводит к цели.

Таким образом, обсуждаемый метод показывает, что процедура усреднения является проявлением порогового эффекта на краю спектра оператора $\widehat{A}$.

§13. Заключительные замечания

В заключение мы хотели бы поделиться некоторыми общими впечатлениями о научном стиле М. Ш. Бирмана, накопленными за долгие годы наших контактов с ним.

Одно из важнейших качеств М. Ш. — стратегический характер его математического мышления. Он редко думал в терминах отдельных задач, как бы интересны и важны они ни были сами по себе. Он всегда стремился выявить и прояснить основные принципы, определяющие общий характер возможных результатов в том круге вопросов, над которым он работал. Для него типичен такой подход: сначала строится общая схема, включающая рассматриваемую задачу (или, чаще, задачи), затем она всесторонне анализируется. Возникающая при этом теория оказывается применимой к широкому кругу проблем данного типа. Наконец, выясняется, как реализуются объекты общей теории в случае рассматриваемого конкретного вопроса. Как правило, этот путь приводит к исчерпывающему анализу не только исходной задачи, но и всего рассматриваемого класса проблем. Этот подход ярко проявился уже в его работах по теории расширений (см. §2 настоящего обзора). То же можно сказать и о работах М. Ш. по спектру сингулярных граничных задач. Из числа более поздних примеров — новый подход к теории гомогенизации (см. §12).

М. Ш. отлично осознавал эту свою черту. Однажды один из нас рассказал ему, что разобрался с задачей, к которой первоначально не видел подходов. Он ответил:

— Разобрался с задачей? Это хорошо! А вот я, наверное, навсегда обречен разбираться с проблемами.

Сказанное не означает, что М. Ш. был слабее в решении конкретных задач. Его статьи по теории рассеяния, а также по применению техники квадратичных форм для анализа краевых задач, изобилуют техническими находками, получившими в дальнейшем широкое применение в работах многих математиков и физиков. Каждый из авторов может привести много случаев, когда при совместной работе с М. Ш. возникающее препятствие удавалось преодолеть с помощью приема, предложенного им в одной из его более ранних статей. В таких случаях он любил приводить цитату из Козьмы Пруткова: „Погоди, прелестница, поздно или рано шелковую лестницу выну из кармана“.

М. Ш. обладал поразительной способностью разглядеть за частным примером проблему, а за техническим приемом идею или даже общую идеологию. Характерный пример 1-го типа — работа [25] по оператору Лапласа в областях с углами. Пример 2-го типа связан со статьей [38], в которой был разработан метод кусочно-полиномиальных приближений. Первоначальной целью авторов, как указано в §7, были признаки ядерности интегральных операторов в весовых пространствах L_2. Обратив внимание на нелинейный вариант метода, М. Ш. предположил, что с его помощью можно будет оценить ε-энтропию вложений классов Соболева в пространства C и L_q. Это предположение блестяще оправдалось.

М. Ш. была свойственна исключительная независимость мышления. Одно из ее проявлений — свобода при введении новых понятий. Вот один из примеров. В течение долгого времени принято было описывать свойства спектра компактных операторов в терминах классов Шаттена–фон Неймана, хотя во многих важных вопросах такое описание заведомо не точно. В статье [22] М. Ш. вводит в рассмотрение классы, которые теперь называют „слабыми классами Шаттена–фон Неймана“. Это позволило ему для рассматриваемой в [22] задачи получить оценки спектра в точных терминах. Другой пример (из поздних работ) — введение нового понятия „спектрального ростка“, играющего ключевую роль в описании пороговых свойств периодического эллиптического оператора.

М. Ш. был склонен к самоанализу. Получив научный результат, он всегда задавал себе вопрос: почему это получилось у меня и не выходило у других? В этом не было оттенка самохвальства: он стремился осознать, какое именно сочетание опыта и знаний помогло ему решить задачу.

Его всегда влекло вперед, хотя он не пренебрегал разработкой уже начатой тематики. М. Ш. говорил: „Я всю жизнь пишу одну работу“, хотя он внес значительный вклад в разные области математической физики, теории функций, спектральной теории операторов, уравнений в частных производных. Но, когда он переходил от одной тематики к другой, всегда прослеживались ниточки, связывающие эти темы между собой. В обзоре мы старались эти ниточки отмечать. Он обладал потрясающей интуицией. Безошибочно чувствовал, чем стоит заниматься, а чем нет. Чувствовал связи между разными областями или объектами исследований порой на каком-то иррациональном уровне.

При этом склад его ума, пожалуй, не был чисто математическим. При выборе тем для исследования он часто руководствовался прямыми приложениями к естественным физическим задачам. Он обладал многими талантами, и математике повезло, что именно она оказалась его избранницей.

Безразлично относясь к почетным чинам и званиям, он всегда считал ниже своего достоинства их добиваться. Но на склоне лет, уже будучи тяжело больным, радовался присуждению ему звания заслуженного деятеля науки РФ, почетного профессора СПбГУ, премии Чебышева — наград, свидетельствовавших о (запоздалом) признании его заслуг.

Благодаря своему острому уму, широкой образованности и быстрой реакции на окружающее, М. Ш. оказывался лидером в любой компании, где ему доводилось участвовать. Слушать его всегда было интересно и поучительно.

Память о Михаиле Шлемовиче Бирмане навсегда сохранится в сердцах тех, кому посчастливилось знать этого замечательного ученого и человека.

Список публикаций М. Ш. Бирмана

1. Статьи.

1. Бирман М. Ш., *Некоторые оценки для метода наискорейшего спуска*, Успехи мат. наук **5** (1950), №3, 152–155.
2. Бирман М. Ш., *О вычислении собственных чисел методом наискорейшего спуска*, Зап. Ленингр. горн. ин-та **27** (1952), №1, 209–216.
3. Бирман М. Ш., *Об одном варианте метода последовательных приближений*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., физ., хим. **1952**, №9, 69–76.
4. Бирман М. Ш., *К теории самосопряженных расширений положительно определенных операторов*, Докл. АН СССР **91** (1953), №2, 189–191.
5. Бирман М. Ш., *К теории общих краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений*, Докл. АН СССР **92** (1953), №2, 205–208.
6. Бирман М. Ш., *О минимальных функционалах для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка*, Докл. АН СССР **93** (1953), №6, 953–956.
7. Бирман М. Ш., *О спектре сингулярных граничных задач для эллиптических дифференциальных уравнений*, Докл. АН СССР **97** (1954), №1, 5–7.

8. Бирман М. Ш., *О вариационном методе Треффтца для уравнения* $\Delta^2 u = f$, Докл. АН СССР **101** (1955), №2, 201–204.
9. Бирман М. Ш., *О методе Фридрихса — расширения положительно определенного оператора до самосопряженного*, Зап. Ленингр. горн. ин-та **33** (1956), №3, 132–136.
10. Бирман М. Ш., *К теории самосопряженных расширений положительно определенных операторов*, Мат. сб. **38** (1956), №4, 431–450.
11. Бирман М. Ш., *Вариационные методы решения краевых задач, аналогичные методу Треффтца*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астроном. **1956**, вып. 3, 69–89.
12. Бирман М. Ш., *Метод квадратичных форм в задачах о малом параметре при старших производных*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астроном. **1957**, вып. 3, 9–12.
13. Бирман М. Ш., *Характеристика эллиптических дифференциальных операторов с максимальной областью определения*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астроном. **1957**, вып. 4, 177–183.
14. Бирман М. Ш., *О многомерных краевых задачах с малым параметром при старших производных*, Успехи мат. наук **12** (1957), №6, 212–213.
15. Бирман М. Ш., *Возмущения квадратичных форм и спектр сингулярных граничных задач*, Докл. АН СССР **125** (1959), №3, 471–474.
16. Бирман М. Ш., *О спектре операторов Шредингера и Дирака*, Докл. АН СССР **129** (1959), №2, 239–241.
17. Бирман М. Ш., *О дискретной части спектра операторов Шредингера и Дирака*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астроном. **1960**, вып. 2, 167–168.
18. Бирман М. Ш., Павлов Б. С., *О полной непрерывности некоторых операторов вложения*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астроном. **1961**, вып. 1, 61–74.
19. Бирман М. Ш., *О спектре сингулярных граничных задач*, Мат. сб. **55** (1961), №2, 125–174.
20. Бирман М. Ш., *О возмущении спектра сингулярного эллиптического оператора при изменении границы и граничных условий*, Докл. АН СССР **137** (1961), №4, 761–763.
21. Бирман М. Ш., *О числе собственных значений в задаче квантового рассеяния*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астроном. **1961**, вып. 3, 163–166.
22. Бирман М. Ш., *Возмущения непрерывного спектра сингулярного эллиптического оператора при изменении границы и граничных*

условий, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астроном. **1962**, вып. 1, 22–55.

23. Бирман М. Ш., *Об условиях существования волновых операторов*, Докл. АН СССР **143** (1962), №3, 506–509.
24. Бирман М. Ш., Крейн М. Г., *К теории волновых операторов и операторов рассеяния*, Докл. АН СССР **144** (1962), №3, 475–478.
25. Бирман М. Ш., Скворцов Г. Е., *О квадратичной суммируемости старших производных решения задачи Дирихле в области с кусочно-гладкой границей*, Изв. вузов. Мат. **1962**, №5, 12–21.
26. Бирман М. Ш., *Об одном признаке существования волновых операторов*, Докл. АН СССР **147** (1962), №5, 1008–1009.
27. Бирман М. Ш., *Об условиях существования волновых операторов*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **27** (1963), №4, 883–906.
28. Birman M. Sh., Krein M. G., *Some topics of the theory of the wave and scattering operators*, 1963 Outlines Joint Sympos. Partial Differential Equations (Novosibirsk, 1963), Acad. Sci. USSR Siberian Branch, Moscow, 1963, pp. 39–45.
29. Бирман М. Ш., Глазман И. М., *Спектры сингулярных дифференциальных операторов*, Труды четвертого Всесоюзного математического съезда (Ленинград, 1961). Т. 2, Наука, Л., 1964, с. 253–261.
30. Бирман М. Ш., Энтина С. Б., *О стационарном подходе в абстрактной теории рассеяния*, Докл. АН СССР **155** (1964), №3, 506–508.
31. Бирман М. Ш., *Локальный признак существования волновых операторов*, Докл. АН СССР **159** (1964), №3, 485–488.
32. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *О двойных операторных интегралах Стилтьеса*, Докл. АН СССР **165** (1965), №6, 1223–1226.
33. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Двойные операторные интегралы Стилтьеса*, Пробл. мат. физ., вып. 1, ЛГУ, Л., 1966, с. 33–67.
34. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *О приближении функций классов W_p^α кусочно-полиномиальными функциями*, Докл. АН СССР **171** (1966), №5, 1015–1018.
35. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Двойные операторные интегралы Стилтьеса и задачи о множителях*, Докл. АН СССР **171** (1966), №6, 1251–1254.
36. Бирман М. Ш., Энтина С. Б., *Стационарный подход в абстрактной теории рассеяния*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **31** (1967), №2, 401–430.
37. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Двойные операторные интегралы Стилтьеса*. II, Пробл. мат. физ., вып. 2, ЛГУ, Л., 1967, с. 26–60.

38. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Кусочно-полиномиальные приближения функций классов* W_p^α, Мат. сб. **73** (1967), №3, 331–355.
39. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Об оценках сингулярных чисел интегральных операторов.* I, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астроном. **1967**, вып. 2, 43–53.
40. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Об оценках сингулярных чисел интегральных операторов.* II, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астроном. **1967**, вып. 3, 21–28.
41. Бирман М. Ш., *Локальный признак существования волновых операторов*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **32** (1968), №4, 914–942.
42. Белопольский А. Л., Бирман М. Ш., *Существование волновых операторов в теории рассеяния для пары пространств*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **32** (1968), №5, 1162–1175.
43. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Об оценках сингулярных чисел интегральных операторов.* III. *Операторы в неограниченных областях*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астроном. **1969**, вып. 1, 35–48.
44. Бирман М. Ш., *Некоторые приложения локального признака существования волновых операторов*, Докл. АН СССР **185** (1969), №4, 735–738.
45. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Замечания о ядерности интегральных операторов и об ограниченности псевдодифференциальных операторов*, Изв. вузов. Мат. **1969**, №9, 11–17.
46. Бирман М. Ш., *Задачи рассеяния для дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами*, Функц. анал. и его прил. **3** (1969), №3, 1–16.
47. Бирман М. Ш., *Признак существования полных волновых операторов в теории рассеяния для пары пространств*, Пробл. мат. физ., вып. 4, ЛГУ, Л., 1970, с. 22–26.
48. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Асимптотика спектра слабо полярных интегральных операторов*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **34** (1970), №5, 1142–1158.
49. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *О главном члене спектральной асимптотики для „негладких“ эллиптических задач*, Функц. анал. и его прил. **4** (1970), №4, 1–13.
50. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *К доказательству теоремы об асимптотике спектра вещественной компоненты вольтеррова оператора с ядерной мнимой компонентой*, Мат. исслед. **5** (1970), №4, 16–25.

51. Бирман М. Ш., *Работы по спектральной теории дифференциальных операторов*, Математика в Петербургском–Ленинградском университете, ЛГУ, Л., 1970, с. 129–133.
52. Бирман М. Ш., *Задачи рассеяния для дифференциальных операторов при возмущении пространства*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **35** (1971), №2, 440–455.
53. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Об асимптотике спектра „негладких“ эллиптических уравнений*, Функц. анал. и его прил. **5** (1971), №1, 69–70.
54. Бирман М. Ш., Борзов В. В., *Об асимптотике дискретного спектра некоторых сингулярных дифференциальных операторов*, Пробл. мат. физ., вып. 5, ЛГУ, Л., 1971, с. 24–38.
55. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Замечания о функции спектрального сдвига*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **27** (1972), 33–46.
56. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Спектральная асимптотика негладких эллиптических операторов*, Докл. АН СССР **205** (1972), №2, 267–270.
57. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Спектральная асимптотика негладких эллиптических операторов.* I, Тр. Моск. мат. о-ва **27** (1972), 3–52.
58. Бабич В. М., Бирман М. Ш., Смирнов В. И., Соломяк М. З., Уральцева Н. Н., *Ольга Александровна Ладыженская* (*к пятидесятилетию со дня рождения*), Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астроном. **1972**, вып. 2, 159–160.
59. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Двойные операторные интегралы Стилтьеса.* III. *Предельный переход под знаком интеграла*, Пробл. мат. физ., вып. 6, ЛГУ, Л., 1973, с. 27–53.
60. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Спектральная асимптотика негладких эллиптических операторов.* II, Тр. Моск. мат. о-ва **28** (1973), 3–34.
61. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Об эквивалентных перенормировках классов W_p^r при разбиениях области*, Изв. вузов. Мат. **1973**, №3, 19–27.
62. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Количественный анализ в теоремах вложения Соболева и приложения к спектральной теории*, Десятая летняя математическая школа (Кацивели–Нальчик, 1972), Ин-т мат. АН Укр. ССР, Киев, 1974, с. 5–189.

63. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Об одной ,,модельной" неэллиптической спектральной задаче*, Сборник статей, посвященных памяти академика В. И. Смирнова, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астроном. **1975**, вып. 1, 39–45.
64. Бирман М. Ш., Коплиенко Л. С., Соломяк М. З., *Оценки спектра разности дробных степеней самосопряженных операторов*, Изв. вузов. Мат. **1975**, №3, 3–10.
65. Алексеев А. Б., Бирман М. Ш., *Асимптотика спектра эллиптических граничных задач с разрешимыми связями*, Докл. АН СССР **230** (1976), №3, 505–507.
66. Алексеев А. Б., Бирман М. Ш., *Вариационная постановка задачи о колебаниях резонатора, заполненного анизотропной слоистой средой*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астроном. **1977**, вып. 2, 9–15.
67. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Асимптотика спектра псевдодифференциальных операторов с анизотропно-однородными символами*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астроном. **1977**, вып. 3, 13–21.
68. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Применение интерполяционных методов к оценкам спектра интегральных операторов*, Теория операторов в функциональных пространствах, Наука, Сиб. отд., Новосибирск, 1977, с. 42–70.
69. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Оценки сингулярных чисел интегральных операторов*, Успехи мат. наук **32** (1977), №1, 17–84.
70. Алексеев А. Б., Бирман М. Ш., *Асимптотика дискретного спектра в эллиптических задачах с разрешимыми дифференциальными связями*, Успехи мат. наук **32** (1977), №1, 232–233.
71. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Асимптотика спектра дифференциальных уравнений*, Итоги науки и техн. Мат. анал., т. 14. ВИНИТИ АН СССР, М., 1977, с. 5–58.
72. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Об асимптотике спектра эллиптических вариационных задач с дифференциальными связями*, Труды Всесоюзной конференции по уравнениям с частными производными, посвященной 75-летию акад. Петровского, МГУ, М., 1978, с. 51–52.
73. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Асимптотика спектра псевдодифференциальных операторов с анизотропно-однородными символами.* II, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астроном. **1979**, вып. 3, 5–10.

74. Бирман М. Ш., Вершик А. М., Соломяк М. З., *Произведение перестановочных спектральных мер может не быть счетно-аддитивным*, Функц. анал. и его прил. **13** (1979), №1, 61–62.
75. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Асимптотика спектра вариационных задач на решениях эллиптических уравнений*, Сиб. мат. ж. **20** (1979), №1, 3–22.
76. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Об асимптотике спектра вариационных задач на решениях эллиптических уравнений*, Дифференциальные уравнения с частными производными: Труды конф. (Новосибирск, 1978), Наука, Сиб. отд., Новосибирск, 1980, с. 221–223.
77. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Асимптотика спектра вариационных задач на решениях эллиптических уравнений в неограниченных областях*, Функц. анал. и его прил. **14** (1980), №4, 27–35.
78. Бирман М. Ш., Яфаев Д. Р., *Асимптотика спектра s-матрицы при потенциальном рассеянии*, Докл. АН СССР **255** (1980), №5, 1085–1087.
79. Бирман М. Ш., *О квазиклассической спектральной асимптотике одного класса интегральных операторов*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **98** (1980), 22–32.
80. Бирман М. Ш., Яфаев Д. Р., *Асимптотика спектра матрицы рассеяния*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **110** (1981), 3–29.
81. Бирман М. Ш., Яфаев Д. Р., *Асимптотика предельных фаз при рассеянии на потенциале без сферической симметрии*, Теор. и мат. физ. **51** (1982), №1, 44–53.
82. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Асимптотика спектра вариационных задач на решениях эллиптических систем*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **115** (1982), 23–39.
83. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Асимптотика спектра псевдодифференциальных вариационных задач со связями*, Пробл. мат. физ., вып. 10, ЛГУ, Л., 1982, с. 20–36.
84. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *О подпространствах, допускающих псевдодифференциальный проектор*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астроном. **1982**, вып. 1, 18–25.
85. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Компактные операторы со степенной асимптотикой сингулярных чисел*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **126** (1983), 21–30.

86. Birman M. Sh., *Re-expansion operators as objects of spectral analysis*, Linear and Complex Analysis Problem Book. 199 Research Problems, Lecture Notes in Math., vol. 1043, Springer-Verlag, Berlin, 1984, pp. 130–134.
87. Birman M. Sh., Solomyak M. Z., *Some problems on compact operators with power-like behaviour of singular numbers*, Linear and Complex Analysis Problem Book. 199 Research Problems, Lecture Notes in Math., 1043, Springer-Verlag, Berlin, 1984, pp. 217–218.
88. Бирман М. Ш., *Об операторе Максвелла в областях с ребрами*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **147** (1985), 3–9.
89. Бирман М. Ш., *Оператор Максвелла для резонатора с входящими ребрами*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1 **1986**, вып. 3, 3–8.
90. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Оператор Максвелла в областях с негладкой границей*, Сиб. мат. ж. **28** (1987), №1, 23-36.
91. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Вейлевская асимптотика спектра оператора Максвелла для областей с липшицевой границей*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1 **1987**, вып. 3, 23–28.
92. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Построение в кусочно-гладкой области функции класса H^2 по значению конормальной производной*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **163** (1987), 17–28.
93. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *L_2-теория оператора Максвелла в произвольных областях*, Успехи мат. наук **42** (1987), №6, 61–76.
94. Бирман М. Ш., Яфаев Д. Р., *Общая схема в стационарной теории рассеяния*, Пробл. мат. физ., вып. 12, ЛГУ, Л., 1987, с. 89–117.
95. Бирман М. Ш., *Оператор Максвелла для периодического резонатора с входящими ребрами*, Тр. Мат. ин-та АН СССР **179** (1988), 23–35.
96. Birman M. Sh., Solomyak M. Z., *The L_2-theory of the Maxwell operator in domains with nonsmooth boundary*, Symposium “Partial Differential Equations” (Holzhau, 1988), Teubner-Texte Math., vol. 112, Teubner, Leipzig, 1989, pp. 33–41.
97. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Самосопряженный оператор Максвелла в произвольных областях*, Алгебра и анализ **1** (1989), вып. 1, 96–110.
98. Birman M. Sh., Solomyak M. Z., *Interpolation estimates for the number of negative eigenvalues of a Schrödinger operator*, Schrödinger Operators, Standard and Nonstandard (Dubna, 1988), World Sci. Publishing, Teaneck, NJ, 1989, pp. 2–18.
99. Бирман М. Ш., Яфаев Д. Р., *О ядерном методе в теории потенциального рассеяния*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **171** (1989), 12–35.

100. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Операторное интегрирование, возмущения и коммутаторы*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **170** (1989), 34–66.
101. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Оценки разности дробных степеней самосопряженных операторов при неограниченных возмущениях*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **178** (1989), 120–145.
102. Birman M. Sh., Solomyak M. Z., *Negative discrete spectrum of the Schrödinger operator with large coupling constant: a qualitative discussion*, Order, Disorder and Chaos in Quantum Systems (Dubna, 1989), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 46, Birkhäuser, Basel, 1990, pp. 3–16.
103. Birman M. Sh., *Discrete spectrum in the gaps of the continuous one in the large-coupling-constant limit*, Order, Disorder and Chaos in Quantum Systems (Dubna, 1989), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 46, Birkhäuser, Basel, 1990, pp. 17–25.
104. Birman M. Sh., Solomyak M. Z., *The estimates for the number of negative bound states of the Schrödinger operator for large coupling constants*, Integral Equations and Inverse Problems (Varna, 1989), Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 235, Longman Sci. Tech., Harlow, 1991, pp. 49–57.
105. Бирман М. Ш., Крейн С. Г., Ладыженская О. А., Розенблюм Г. В., Сафаров Ю. Г., *Михаил Захарович Соломяк (к шестидесятилетию со дня рождения)*, Успехи мат. наук **46** (1991), №4, 183–184.
106. Бирман М. Ш., *О дискретном спектре в лакунах возмущенного периодического оператора второго порядка*, Функц. анал. и его прил. **25** (1991), №2, 89–92.
107. Birman M. Sh., *Discrete spectrum in a gap of perturbed periodic operator at large coupling constants*, Rigorous Results in Quantum Dynamics (Liblice, 1990), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1991, pp. 16–24.
108. Birman M. Sh., Solomyak M. Z., *Discrete negative spectrum under nonregular perturbations (polyharmonic operators, Schrödinger operators with a magnetic field, periodic operators)*, Rigorous Results in Quantum Dynamics (Liblice, 1990), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1991, pp. 25–36.
109. Birman M. Sh., Solomyak M. Z., *Estimates for the number of negative eigenvalues of the Schrödinger operator and its generalizations*, Estimates and Asymptotics for Discrete Spectra of Integral and Differential Equations (Leningrad, 1989-90), Adv. Soviet Math., vol. 7, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, pp. 1–55.

110. Birman M. Sh., *Discrete spectrum in the gaps of a continuous one for perturbations with large coupling constant*, Estimates and Asymptotics for Discrete Spectra of Integral and Differential Equations (Leningrad, 1989-90), Adv. Soviet Math., vol. 7, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, pp. 57–73.
111. Birman M. Sh., Raikov G. D., *Discrete spectrum in the gaps for perturbations of the magnetic Schrödinger operator*, Estimates and Asymptotics for Discrete Spectra of Integral and Differential Equations (Leningrad, 1989-90), Adv. Soviet Math., vol. 7, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, pp. 75–84.
112. Birman M. Sh., Karadzhov G. E., Solomyak M. Z., *Boundedness conditions and spectrum estimates for the operators $b(X)a(D)$ and their analogs*, Estimates and Asymptotics for Discrete Spectra of Integral and Differential Equations (Leningrad, 1989-90), Adv. Soviet Math., vol. 7, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, pp. 85–106.
113. Birman M. Sh., Solomyak M. Z., *Schrödinger operator. Estimates for number of bound states as function-theoretical problem*, Spectral Theory of Operators (Novgorod, 1989), Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 150, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, pp. 1–54.
114. Бирман М. Ш., *Три задачи теории сплошных сред в многогранниках*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **200** (1992), 27–37.
115. Бирман М. Ш., Яфаев Д. Р., *Функция спектрального сдвига. Работы М. Г. Крейна и их дальнейшее развитие*, Алгебра и анализ **4** (1992), вып. 5, 1–44.
116. Бирман М. Ш., Яфаев Д. Р., *Спектральные свойства матрицы рассеяния*, Алгебра и анализ **4** (1992), вып. 6, 1–27.
117. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Главные особенности электрической составляющей электромагнитного поля в областях с экранами*, Алгебра и анализ **5** (1993), вып. 1, 143–159.
118. Birman M. Sh., *Discrete spectrum of the periodic Schrödinger operator for non-negative perturbations*, Mathematical Results in Quantum Mechanics (Blossin, 1993), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 70, Birkhäuser, Basel, 1994, pp. 3–7.
119. Birman M. Sh., Weidl T., *The discrete spectrum in a gap of the continuous one for compact supported perturbations*, Mathematical Results in Quantum Mechanics (Blossin, 1993), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 70, Birkhäuser, Basel, 1994, pp. 9–12.
120. Birman M. Sh., Laptev A., *Discrete spectrum of the perturbed Dirac operator*, Mathematical Results in Quantum Mechanics (Blossin, 1993), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 70, Birkhäuser, Basel, 1994, pp. 55–59.

121. Бирман М. Ш., Яфаев Д. Р., *Матрица рассеяния при возмущении периодического оператора Шредингера убывающим потенциалом*, Алгебра и анализ **6** (1994), вып. 3, 17–39.
122. Birman M. Sh., *Discrete spectrum of the periodic elliptic operator with a differential perturbation*, Journées "Équations aux Dérivées Partielles" (Saint-Jean-de-Monts, 1994), Exp. No. XIV, École Polytech., Palaiseau, 1994, 4 pp.
123. Birman M. Sh., Laptev A., *Discrete spectrum of the perturbed Dirac operator*, Ark. Mat. **32** (1994), no. 1, 13–32.
124. Birman M. Sh., *Ilya Bakelman in Russia. A tribute to Ilya Bakelman* (College Station, TX, 1993), Discourses Math. Appl., vol. 3, Texas A & M Univ., College Station, TX, 1994, pp. 2–4.
125. Арнольд В. И., Бирман М. Ш., Гельфанд И. М., и др., *Анатолий Моисеевич Вершик* (*к шестидесятилетию со дня рождения*), Успехи мат. наук **49** (1994), №3, 195–204.
126. Birman M. Sh., *Spectral shift function and double operator integrals*, Linear and Complex Analysis Problem Book 3. Part I, Lecture Notes in Math., vol. 1573, Springer-Verlag, Berlin, 1994, pp. 272–273.
127. Birman M. Sh., *The discrete spectrum in gaps of the perturbed periodic Schrödinger operator.* I. *Regular perturbations*, Boundary Value Problems, Schrödinger Operators, Deformation Quantization, Math. Top., vol. 8, Akademie Verlag, Berlin, 1995, pp. 334–352.
128. Бирман М. Ш., *Дискретный спектр периодического оператора Шредингера, возмущенного убывающим потенциалом*, Алгебра и анализ **8** (1996), вып. 1, 3–20.
129. Birman M., Solomyak M., *Tensor product of a finite number of spectral measures is always a spectral measure*, Integral Equations Operator Theory **24** (1996), no. 2, 179–187.
130. Birman M. Sh., Laptev A., *The negative discrete spectrum of a two-dimensional Schrödinger operator*, Comm. Pure Appl. Math. **49** (1996), no. 9, 967–997.
131. Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Двумерный периодический магнитный гамильтониан абсолютно непрерывен*, Алгебра и анализ **9** (1997), вып. 1, 32–48.
132. Birman M. Sh., Laptev A., Solomyak M., *The negative discrete spectrum of the operator* $(-\Delta)^l - \alpha V$ *in* $L_2(\mathbf{R}^d)$ *for* d *even and* $2l \geqslant d$, Ark. Mat. **35** (1997), no. 1, 87–126.
133. Birman M. Sh., Laptev A., *"Non-standard" spectral asymptotics for a two-dimensional Schrödinger operator*, Partial Differential Equations

and their Applications (Toronto, ON, 1995), CRM Proc. Lecture Notes, vol. 12, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 9–16.

134. Бирман М. Ш., *Дискретный спектр в лакунах возмущенного периодического оператора Шредингера.* II. *Нерегулярные возмущения*, Алгебра и анализ **9** (1997), вып. 6, 62–89.

135. Бирман М. Ш., Пушницкий А. Б., *Дискретный спектр в лакунах возмущенного псевдорелятивистского магнитного гамильтониана*, Зап. науч. семин. ПОМИ **249** (1997), 102–117.

136. Birman M. Sh., Pushnitski A. B., *Spectral shift function, amazing and multifaceted*, Integral Equations Operator Theory **30** (1998), no. 2, 191–199.

137. Birman M. Sh., Laptev A., Solomyak M., *On the eigenvalue behaviour for a class of differential operators on semiaxis*, Math. Nachr. **195** (1998), 17–46.

138. Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Абсолютная непрерывность двумерного периодического магнитного гамильтониана с разрывным векторным потенциалом*, Алгебра и анализ **10** (1998), вып. 4, 1–36.

139. Birman M. Sh., Suslina T. A., *Two-dimensional periodic Pauli operator. The effective masses at the lower edge of the spectrum*, Mathematical Results in Quantum Mechanics (Prague, 1998), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 108, Birkhäuser, Basel, 1999, pp. 13–31.

140. Birman M. Sh., Suslina T. A., *The periodic Dirac operator is absolutely continuous*, Integral Equations Operator Theory **34** (1999), no. 4, 377–395.

141. Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодический магнитный гамильтониан с переменной метрикой. Проблема абсолютной непрерывности*, Алгебра и анализ **11** (1999), вып. 2, 1–40.

142. Бирман М. Ш., Суслина Т. А., Штеренберг Р. Г., *Абсолютная непрерывность двумерного оператора Шредингера с дельта-потенциалом, сосредоточенным на периодической системе кривых*, Алгебра и анализ **12** (2000), вып. 6, 140–177.

143. Birman M. Sh., Suslina T. A., *On the absolute continuity of the periodic Schrödinger and Dirac operators with magnetic potential*, Differential Equations and Mathematical Physics (Birmingham, AL, 1999), AMS/IP Stud. Adv. Math., vol. 16, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, pp. 41–49.

144. Бирман М. Ш., Лаптев А., Суслина Т. А., *Дискретный спектр двумерного периодического эллиптического оператора второго порядка возмущенного убывающим потенциалом.* I. *Полубесконечная лакуна*, Алгебра и анализ **12** (2000), вып. 4, 36–78.
145. Birman M. Sh., Suslina T. A., *Threshold effects near the lower edge of the spectrum for periodic differential operators of mathematical physics*, Systems, Approximation, Singular Integral Operators, and Related Topics (Bordeaux, 2000), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 129, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 71–107.
146. Birman M. Sh., Solomyak M. Z., *On the negative discrete spectrum of a periodic elliptic operator in a waveguide-type domain, perturbed by a decaying potential*, J. Anal. Math. **83** (2001), 337–391.
147. Амосов Б. А., Бирман М. Ш., Вишик М. И., и др., *Михаил Семенович Агранович* (*к семидесятилетию со дня рождения*), Успехи мат. наук **56** (2001), №4, 163–168.
148. Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Абсолютная непрерывность спектра периодического оператора теории упругости при постоянном модуле сдвига*, Нелинейные задачи математической физики и смежные вопросы II. В честь акад. О. А. Ладыженской, Междунар. мат. сер., т. 2. Тамара Рожковская, Новосибирск, 2002, с. 65–70.
149. Архипова А. А., Бирман М. Ш., Буслаев В. С. и др., *К юбилею Ольги Александровны Ладыженской*, Зап. науч. семин. ПОМИ **288** (2002), 5–13.
150. Бирман М. Ш., *О процедуре усреднения для периодических операторов в окрестности края внутренней лакуны*, Алгебра и анализ **15** (2003), вып. 4, 61–71.
151. Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), вып. 5, 1–108.
152. Birman M. Sh., Solomyak M. Z., *Double operator integrals in a Hilbert space*, Integral Equations Operator Theory **47** (2003), 131–168.
153. Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение многомерного периодического эллиптического оператора в окрестности края внутренней лакуны*, Зап. науч. семин. ПОМИ **318** (2004), 60–74.
154. Арнольд В. И., Бирман М. Ш., Вершик А. М. и др., *Ольга Александровна Ладыженская*, Успехи мат. наук **59** (2004), №3, 151–152.
155. Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Пороговые аппроксимации резольвенты факторизованного самосопряженного семейства с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 5, 69–90.

156. Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 6, 1–104.
157. Алексеев А. Б., Бирман М. Ш., Филонов Н. Д., *Асимптотика спектра одной „негладкой“ вариационной задачи с разрешимой связью*, Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 5, 1–22.
158. Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева* $H^1(\mathbb{R}^d)$, Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 6, 1–130.
159. Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение стационарной периодической системы Максвелла в случае постоянной магнитной проницаемости*, Функц. анал. и его прил. **41** (2007), №2, 3–23.
160. Birman M. Sh., Filonov N. D., *Weyl asymptotics of the spectrum of the Maxwell operator with non-smooth coefficients in Lipschitz domains*, Nonlinear Equations and Spectral Theory, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 220, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, pp. 27–44.
161. Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении нестационарных периодических уравнений*, Алгебра и анализ **20** (2008), вып. 6, 30–107.
162. Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Принцип предельного поглощения и процедура усреднения для периодических эллиптических операторов*, Функц. анал. и его прил. **42** (2008), №4, 105–108.
163. Birman M. Sh., Suslina T. A., *Homogenization of periodic differential operators as a spectral threshold effect*, New Trends in Mathematical Physics. Selected Contributions of the XVth International Congress on Mathematical Physics, Springer, Berlin, 2009, pp. 667–683.
164. Бирман М. Ш., Слоущ В. А., *Двусторонние оценки для следа разности пары полугрупп*, Функц. анал. и его прил. **43** (2009), №3, 26–32.
165. Birman M. Sh., Sloushch V. A., *Discrete spectrum of the periodic Schrödinger operator with a variable metric perturbed by a nonnegative potential*, Math. Model. Nat. Phenom. **5** (2010), no. 4, 32–53.
166. Birman M. Sh., Suslina T. A., *The analog of the limiting absorption principle in homogenization of periodic elliptic operators*, Operator Theory and its Applications: In Memory of V. B. Lidskii (1924–2008), Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 231, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, pp. 35–57.

2. Книги.

1. Бирман М. Ш., Виленкин Н. Я., Горин Е. А., Забрейко П. П., Иохвидов И. С., Кадец М. И., Костюченко А. Г., Красносельский М. А., Крейн С. Г., Митягин Б. С., Петунин Ю. И., Рутицкий Я. Б., Семенов Е. М., Соболев В. И., Стеценко В. Я., Фаддеев Л. Д., Цитланадзе Е. С., *Функциональный анализ.* (под ред. С. Г. Крейна), 2-е изд., испр. и доп., Справ. мат. б-ка, Наука, М., 1972, 544 с.
2. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, ЛГУ, Л., 1980, 264 с.
3. Birman M. Sh., Solomyak M. Z., *Quantitative analysis in Sobolev embedding theorems and applications to spectral theory*, Transl. from Russian by F. A. Cezus, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 114, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1980.
4. Birman M. Sh., Solomyak M. Z., *Spectral theory of selfadjoint operators in Hilbert space*, Transl. from the 1980 Russian original by S. Khrushchev and V. Peller, Math. Appl. (Soviet Series), D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987.
5. Бирман М. Ш., *Избранные труды. Математическая теория рассеяния. Функция спектрального сдвига*, РХД, Москва–Ижевск, 2010, 502 с.
6. Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, 2-е изд., испр. и доп., Лань, СПб., 2010, 464 с.

3. Редакторская деятельность.

1. Лакс Питер Д., Филлипс Ральф С., *Теория рассеяния.* Пер. с англ. Н. К. Никольского и Б. С. Павлова. Под ред. М. Ш. Бирмана. Мир, М., 1971, 312 с.
2. *Проблемы математической физики.* Вып. 1. *Спектральная теория и волновые процессы.* Под ред. М. Ш. Бирмана. ЛГУ, Л., 1966, 133 с.
3. *Проблемы математической физики.* Вып. 2. *Спектральная теория. Задачи дифракции.* Под ред. М. Ш. Бирмана. ЛГУ, Л., 1967, 158 с.
4. *Проблемы математической физики.* Вып. 3. *Спектральная теория.* Под ред. М. Ш. Бирмана. ЛГУ, Л., 1968, 104 с.
5. *Проблемы математической физики.* Вып. 4. *Спектральная теория. Волновые процессы.* Под ред. М. Ш. Бирмана. ЛГУ, Л., 1970, 135 с.

6. *Проблемы математической физики.* Вып. 5. *Спектральная теория.* Под ред. М. Ш. Бирмана. ЛГУ, Л., 1971, 128 с.
7. *Проблемы математической физики.* Вып. 6. *Теория функций. Спектральная теория. Распространение волн.* Под ред. М. Ш. Бирмана. ЛГУ, Л., 1973, 149 с.
8. *Проблемы математической физики.* Вып. 7. *Теория функций. Спектральная теория. Теория распространения волн.* Под ред. М. Ш. Бирмана. ЛГУ, Л., 1974, 185 с.
9. *Проблемы математической физики.* Вып. 8. *Дифференциальные уравнения. Спектральная теория. Теория распространения волн.* Под ред. М. Ш. Бирмана. ЛГУ, Л., 1976, 177 с.
10. *Проблемы математической физики.* Вып. 9. *Теория рассеяния. Теория колебаний.* Под ред. М. Ш. Бирмана. ЛГУ, Л., 1979, 188 с.
11. *Проблемы математической физики.* Вып. 10. *Спектральная теория. Волновые процессы.* Под ред. М. Ш. Бирмана. ЛГУ, Л., 1982, 303 с.
12. *Проблемы математической физики.* Вып. 11. *Дифференциальные уравнения. Теория рассеяния.* Под ред. М. Ш. Бирмана. ЛГУ, Л., 1986, 280 с.
13. *Проблемы математической физики.* Вып. 12. *Распространение волн. Теория рассеяния.* Под ред. М. Ш. Бирмана. ЛГУ, Л., 1987, 260 с.
14. *Проблемы математической физики.* Вып. 13. *Дифференциальные уравнения. Спектральная теория. Распространение волн.* Под ред. М. Ш. Бирмана. ЛГУ, Л., 1991, 309 с.
15. *Estimates and asymptotics for discrete spectra of integral and differential equations.* Papers from the Seminar on Mathematical Physics held in Leningrad, 1989-90. Edited by M. Birman. Transl. from Russian. Adv. in Soviet Math., vol. 7. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, 204 pp.
16. *Нелинейные задачи математической физики и смежные вопросы* I. В честь акад. О. А. Ладыженской. Редакторы: М. Ш. Бирман, С. Гильдебрандт, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. Междунар. мат. сер., т. 1. Тамара Рожковская, Новосибирск, 2002, 362 с.
17. *Нелинейные задачи математической физики и смежные вопросы* II. В честь акад. О. А. Ладыженской. Редакторы: М. Ш. Бирман, С. Гильдебрандт, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. Междунар. мат. сер., т. 2. Тамара Рожковская, Новосибирск, 2002, 347 с.

18. *Nonlinear equations and spectral theory.* Edited by M. Sh. Birman and N. N. Uraltseva. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 220. Adv. in Math. Sci., vol. 59. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 246 pp.

Список учеников М. Ш. Бирмана

1.* Павлов Борис Сергеевич (канд. — 1963)
2. Энтина София Борисовна (диплом — 1960)
3. Скворцов Генрих Евгеньевич (диплом — 1961)
4. Вержбинский Глеб Михайлович (канд. — 1968)
5.* Желудев Валерий Александрович (канд. — 1968)
6. Куренбин Олег Иванович (диплом — 1966)
7. Дейч Владимир Генрихович (канд. — 1971)
8.* Борзов Вадим Васильевич (канд. — 1971)
9. Ротфельд Сергей Юльевич (канд. — 1972)
10. Коплиенко Леонид Сергеевич (канд. — 1973)
11.* Яфаев Дмитрий Рауэльевич (канд. — 1973)
12.* Васюнин Василий Иванович (диплом — 1972)
13. Белопольский Андрей Львович (канд. — 1975)
14.* Найдхардт Хаген (диплом — 1975)
15. Алексеев Александр Борисович (канд. — 1977)
16. Суслов Александр Витальевич (диплом — 1978)
17.* Коротяев Евгений Леонидович (канд. — 1982)
18. Фирсова Наталия Евгеньевна (канд. — 1983)
19. Саяпова Маргарита Робертовна (диплом — 1980)
20. Андреев Алексей Сергеевич (канд. — 1984)
21. Солнышкин Сергей Николаевич (канд. — 1984)
22. Соболев Александр Владимирович (диплом — 1982)
23.* Райков Георгий Димитров (канд. — 1986)
24.* Суслина Татьяна Александровна (канд. — 1987)
25. Хрящев Сергей Викторович (канд. — 1994)
26.* Вайдль Тимо (диплом — 1994)
27. Сафронов Олег Леонидович (канд. — 1997)
28. Пушницкий Александр Борисович (канд. — 1998)
29. Филонов Николай Дмитриевич (канд. — 1999)
30. Слоущ Владимир Анатольевич (канд. — 2000)

31. Штеренберг Роман Григорьевич (канд. — 2003)
32. Франк Руперт (диплом — 2003)
33. Морозов Сергей Владимирович (диплом — 2005)

В скобках указан год защиты кандидатской диссертации или диплома об окончании университета под руководством М. Ш. Бирмана. Для тех, кто защитил кандидатскую диссертацию под руководством М. Ш. Бирмана, данные о защите диплома опущены. Информация по кандидатским диссертациям полная. По дипломам приведена имеющаяся у авторов (заведомо неполная) информация. Знаком * отмечены те, кто впоследствии стали докторами наук.

Поступило 31 октября 2010 г.

Department of Mathematics
The Weizmann Institute of Science
Rehovot 76100
Israel
E-mail: michail.solomyak@weizmann.ac.il

С.-Петербургский
государственный университет
физический факультет
198504, Санкт-Петербург
Петродворец, Ульяновская, 3
Россия
E-mail: suslina@list.ru

IRMAR
University Rennes-1
Rennes 35042
France
E-mail: dimitri.yafaev@univ-rennes1.fr