Алгебра и анализ
Том 17 (2005), №3

Посвящается Л. Д. Фаддееву в связи с его 70-летием

О $U_q(sl_2)$-ИНВАРИАНТНЫХ R-МАТРИЦАХ ДЛЯ СТАРШИХ СПИНОВ

© А. Г. БЫЦКО

Изучается спектральное разложение регулярных $U_q(sl_2)$-инвариантных решений уравнения Янга–Бакстера. Разработан алгоритм нахождения всех возможных решений спина s. Он позволяет также реконструировать R-матрицу по данному гамильтониану спиновой цепочки со взаимодействием ближайших соседей. Алгоритм основан на редукции уравнения Янга–Бакстера на определенные подпространства. В качестве приложения получен полный список неэквивалентных регулярных $U_q(sl_2)$-инвариантных R-матриц для q в общем положении и спинов $s \leqslant \frac{3}{2}$. Получены также некоторые дальнейшие результаты, касающиеся спектральных разложений для старших спинов. В частности, доказано, что определенные типы регулярных sl_2-инвариантных R-матриц не имеют $U_q(sl_2)$-инвариантных аналогов.

§1. Введение

Квантовая алгебра Ли $U_q(sl_2)$ определена как универсальная обертывающая алгебра над $\mathbb{C}$ с единицей e и генераторами $S^{\pm}$, S^z, удовлетворяющими следующим соотношениям [1, 2]:

$$[S^+, S^-] = [2S^z]_q, \quad [S^z, S^{\pm}] = \pm S^{\pm}, \tag{1}$$

где $[t]_q = (q^t - q^{-t})/(q - q^{-1})$. $U_q(sl_2)$ может быть снабжена структурой алгебры Хопфа [3–5]. В частности, коумножение (коассоциативный линейный

Работа поддержана грантом INTAS YS-03-55-962 и грантами РФФИ 02-01-00085 и 03-01-00593.

гомоморфизм) определяется следующим образом:

$$\Delta(S^{\pm}) = S^{\pm} \otimes q^{-S^z} + q^{S^z} \otimes S^{\pm}, \quad \Delta(S^z) = S^z \otimes e + e \otimes S^z. \tag{2}$$

Для q общего положения структура представлений алгебры (1)–(2) та же, что и для недеформированной алгебры sl_2 [6]. В частности, неприводимые представления старшего веса V_s параметризуются неотрицательным целым или полуцелым числом s (далее называемом *спином*) и являются $(2s{+}1)$-мерными. Мы будем использовать стандартное обозначение, $|k\rangle$, $k = -s \ldots, s$, для базисных векторов V_s таких, что $S^z|k\rangle = k|k\rangle$, $\langle k'|k\rangle = \delta_{kk'}$.

Пусть $\mathbb{E}$ обозначает единичный оператор на $V_s^{\otimes 2}$. Рассмотрим операторнозначные функции, $R(\lambda) : \mathbb{C} \mapsto \mathrm{End}\, V_s^{\otimes 2}$, для которых выполняются следующие свойства:

$$\textit{регулярность}: \quad R(0) = \mathbb{E}, \tag{3}$$

$$\textit{унитарность}: \quad R(\lambda)\, R(-\lambda) = \mathbb{E}, \tag{4}$$

$$\textit{спектральное разложение}: \quad R(\lambda) = \sum_{j=0}^{2s} r_j(\lambda) P^j, \tag{5}$$

$$\textit{нормировка}: \quad r_{2s}(\lambda) = 1. \tag{6}$$

Здесь P^j есть проектор на V_j — подпространство спина j в $V_s^{\otimes 2}$; $r_j(\lambda)$ — скалярная функция. Свойство (5) эквивалентно требованию $U_q(sl_2)$-*инвариантности*, т. е.

$$[R(\lambda), \Delta(\xi)] = 0 \quad \forall \xi \in U_q(sl_2). \tag{7}$$

Для выполнения (3)–(4) коэффициенты $r_j(\lambda)$ должны удовлетворять соотношениям

$$r_j(0) = 1, \quad r_j(\lambda) r_j(-\lambda) = 1. \tag{8}$$

В дальнейшем мы будем считать, что $r_j(\lambda)$ аналитичны в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$. Нормировочное условие (6) наложено для того, чтобы исключить несущественную свободу в умножении $R(\lambda)$ на произвольную аналитическую функцию, сохраняющую условия (8).

Для данной $R(\lambda)$, удовлетворяющей (3)–(4), определим *оператор* Янга–Бакстера (YB), $Y(\lambda, \mu) : \mathbb{C}^2 \mapsto \mathrm{End}\, V_s^{\otimes 3}$, следующим образом:

$$Y(\lambda, \mu) = R_{12}(\lambda)\, R_{23}(\lambda + \mu)\, R_{12}(\mu) - R_{23}(\mu)\, R_{12}(\lambda + \mu)\, R_{23}(\lambda). \tag{9}$$

Здесь и ниже мы используем стандартные обозначения — нижние индексы указывают компоненты тензорного произведения $V_s^{\otimes 3}$. Будем говорить, что

$R(\lambda)$ есть ($U_q(sl_2)$-инвариантная) *R-матрица*, если соответствующий YB-оператор равен нулю на $V_s^{\otimes 3}$,

$$Y(\lambda, \mu) = 0. \tag{10}$$

Преимущество подхода к *уравнению* YB (10) как к условию зануления YB-оператора состоит в том, что, как мы покажем ниже, условия равенства нулю YB-оператора на определенных *подпространствах* в $V_s^{\otimes 3}$ используют меньше коэффициентов $r_j(\lambda)$. Более того, коэффициенты $r_j(\lambda)$, найденные при разрешении этого условия для некоторого подпространства, могут быть далее использованы для формулирования и решения условий равенства нулю YB-оператора на других подпространствах. Рекурсивная процедура такого типа будет представлена в следующей части.

Замечание 1. Уравнения (8) и (10) сохраняются при умножении спектрального параметра на произвольную конечную константу,

$$\lambda \to \gamma\lambda. \tag{11}$$

Мы будем рассматривать R-матрицы, связанные таким преобразованием при конечной ненулевой γ, как эквивалентные.

Замечание 2. Условия (3) и (6) вместе с уравнением YB гарантируют унитарность R-матрицы (см. приложение A).

Для $q = 1$ известны [7–11] четыре различных типа sl_2-инвариантных R-матриц:

$$R(\lambda) = (1-\lambda)^{-1}\Big(\mathbb{E} - \lambda\,\mathbb{P}\Big), \tag{12}$$

$$R(\lambda) = P^{2s} + \sum_{j=0}^{2s-1}\left(\prod_{k=j+1}^{2s}\frac{k+\lambda}{k-\lambda}\right)P^j, \tag{13}$$

$$R(\lambda) = (1-\lambda)^{-1}\Big(\mathbb{E} - \lambda\mathbb{P} + \frac{\beta\lambda}{\lambda-\alpha}P^0\Big), \tag{14}$$

$$\alpha = s + \tfrac{1}{2} + (-1)^{2s+1}, \quad \beta = (2s+1)(-1)^{2s+1},$$

$$R(\lambda) = \mathbb{E} + (b^2+1)\frac{1-e^\lambda}{e^\lambda - b^2}P^0, \quad b + b^{-1} = 2s+1, \tag{15}$$

где

$$\mathbb{P} = \sum_{j=0}^{2s}(-1)^{2s-j}P^j \tag{16}$$

есть оператор перестановки в $V_s \otimes V_s$. Отметим, что для всех типов решений, кроме последнего, мы имеем

$$R(\pm\infty) = \mathbb{P}. \tag{17}$$

При $s = \frac{1}{2}$ R-матрицы (13) и (14) вырождаются в (12), а четвертое решение, (15), отсутствует. При $s = 1$ R-матрицы (13) и (14) эквивалентны. Для $q = 1$ и $s = 3$ известно дополнительное решение, не эквивалентное (12)–(15). Оно имеет вид [12]

$$R(\lambda) = P^6 + \frac{1+\lambda}{1-\lambda}P^5 + P^4 + \frac{4+\lambda}{4-\lambda}P^3 + P^2 + \frac{1+\lambda}{1-\lambda}P^1 + \frac{1+\lambda}{1-\lambda}\frac{6+\lambda}{6-\lambda}P^0. \tag{18}$$

Численный поиск на компьютере [12] дает основание предполагать, что решения (12)–(15) и (18) исчерпывают список sl_2-инвариантных R-матриц. Однако соответствующая классификационная теорема пока не была доказана.

Аналогами (13) и (15) для $q \neq 1$ являются следующие решения [13, 11]:

$$R(\lambda) = P^{2s} + \sum_{j=0}^{2s-1}\left(\prod_{k=j+1}^{2s}\frac{[k+\lambda]_q}{[k-\lambda]_q}\right)P^j, \tag{19}$$

$$R(\lambda) = \mathbb{E} + (b^2+1)\frac{1-e^\lambda}{e^\lambda - b^2}P^0, \quad b + b^{-1} = [2s+1]_q. \tag{20}$$

Целью настоящей работы являются изучение $U_q(sl_2)$-инвариантных решений уравнения Янга–Бакстера при q в общем положении (т. е. q не является корнем из единицы и $q \neq 0, \infty$) и развитие систематического метода нахождения всех возможных наборов $r_j(\lambda)$ для данного спина s. В частности, мы докажем, что (12), (14) и (18) не имеют регулярных $U_q(sl_2)$-инвариантных аналогов. Наш подход будет основан на том, что $U_q(sl_2)$-инвариантность R-матрицы означает, что соответствующий YB-оператор коммутирует с действием $U_q(sl_2)$ на $V_s^{\otimes 3}$. Это действие задается следующим образом:

$$S^z_{123} = (\Delta \otimes id)\,\Delta S^z = S^z_1 + S^z_2 + S^z_3, \tag{21}$$

$$S^\pm_{123} = (\Delta \otimes id)\,\Delta S^\pm = S^\pm_{12}\, q^{-S^z_3} + q^{S^z_{12}}\, S^\pm_3 = q^{S^z_1}\, S^\pm_{23} + S^\pm_1\, q^{-S^z_{23}}. \tag{22}$$

Утверждение

$$[Y(\lambda,\mu), S^z_{123}] = [Y(\lambda,\mu), S^\pm_{123}] = 0 \tag{23}$$

следует из того факта, что проекторы P^j суть функции от ΔC, где C — оператор Казимира алгебры $U_q(sl_2)$. Из (21)–(22) очевидно, что P^j_l, $l = \{12\}, \{23\}$ коммутируют с S^z_{123} и $S^\pm_{123}$.

§2. Редуцированные уравнения Янга–Бакстера

2.1. Алгебра Гекке–Темперли–Либа в уравнении YB. Взаимосвязи между алгебрами Гекке, группами кос и постоянными (т. е. не зависящими от спектрального параметра λ) решениями уравнения YB хорошо известны. Используя алгебру Темперли–Либа [14], Бакстер [11] построил R-матрицу с нетривиальной зависимостью от спектрального параметра. Для целей данной работы нам будет нужен следующий, несколько обобщенный, вариант этой конструкции.

Лемма 1. *Рассмотрим ассоциативную алгебру над* $\mathbb{C}$ *с единичным элементом* $\mathbb{E}$ *и генераторами* U_l, *где* $l = \{12\}, \{23\}$, *которые удовлетворяют следующим соотношениям Геккевского типа* (η_0 *и* η_1 *суть скалярные константы и* $\Re\eta_0 \geqslant 0$)

$$U_l^2 = \eta_0 U_l + \eta_1 \mathbb{E}, \tag{24}$$

$$U_{12} U_{23} U_{12} - U_{23} U_{12} U_{23} = U_{12} - U_{23}. \tag{25}$$

Пусть $g(\lambda)$ *— функция, аналитичная в некоторой окрестности точки* $\lambda = 0$ *и удовлетворяющая условию* $g(0) = 0$. *Тогда* $R_l(\lambda) = \mathbb{E} + g(\lambda)\, U_l$ *удовлетворяет уравнению YB* (10), *если и только если*

$$g(\lambda) = \begin{cases} \frac{2\gamma\lambda}{1-\gamma\lambda}, & \text{если } \eta_0 = 2; \\ b\,\frac{1-e^{\gamma\lambda}}{e^{\gamma\lambda}-b^2},\quad b + b^{-1} = \eta_0, & \text{если } \eta_0 \neq 2. \end{cases} \tag{26}$$

Здесь γ *— произвольная конечная константа.*

Замечание 3. R-матрицы (12) и (15) представляют собой два примера, где U_l являются элементами $\operatorname{End} V_s^{\otimes 3}$ вида (e — единичный оператор на V_s)

$$U_{12} = U \otimes e, \qquad U_{23} = e \otimes U. \tag{27}$$

В этих примерах $U = \mathbb{E} + \mathbb{P}$, $\eta_0 = 2$ и $U = P^0$, $\eta_0 = 2s{+}1$ соответственно. Подчеркнем, однако, что, в общем случае, условия леммы 1 *не* требуют, чтобы U_l имели вид (27), где $U \in \operatorname{End} V^{\otimes 2}$. Фактически, ниже мы будем применять лемму 1 в случаях, где подлежащее линейное пространство не является тензорным кубом $V^{\otimes 3}$.

Доказательство. Ради полноты изложения дадим доказательство этой леммы. Подставляя $R_l(\lambda)$ в (10) и используя (24)–(25), можно редуцировать уравнение YB к виду $(\ldots)(U_{12} - U_{23}) = 0$, где $(\ldots)$ является скалярным множителем. Следовательно, уравнение YB выполняется, если и только если этот множитель равен нулю, что равносильно требованию выполнения следующего функционального уравнения:

$$g(\lambda - \mu)\, g(\lambda)\, g(\mu) + \eta_0\, g(\lambda - \mu)\, g(\mu) + g(\lambda - \mu) - g(\lambda) + g(\mu) = 0. \tag{28}$$

Дифференцируя (28) по μ, полагая $\mu = \lambda$ и принимая во внимание условие $g(0) = 0$, мы выводим дифференциальное уравнение

$$g'(\lambda) = g'(0)\left((g(\lambda))^2 + \eta_0\, g(\lambda) + 1\right). \tag{29}$$

Его решение дается формулой (26), и легко проверить, что оно действительно удовлетворяет (28). •

Замечание 4. Анализ уравнения (28) меняется, если мы отбросим условие $g(0) = 0$. В этом случае подстановка $\mu = \lambda$ сводит (28) к алгебраическому уравнению

$$(g(\lambda))^2 + \eta_0\, g(\lambda) + 1 = 0, \tag{30}$$

которое означает, что $g(\lambda)$ является константой. Возможные значения этой константы, т. е. корни (30), даются формулой (26) в пределе $\gamma\lambda \to \pm\infty$.

Теперь мы применим лемму 1 для получения некоторой информации о спектральном разложении регулярной $U_q(sl_2)$-инвариантной R-матрицы.

Предложение 1. *Пусть $R(\lambda)$ — $U_q(sl_2)$-инвариантное решение уравнения YB (10) на $V_s^{\otimes 3}$, удовлетворяющее условиям (6) и (8). Тогда второй старший коэффициент в его спектральном разложении имеет вид*

$$r_{2s-1}(\lambda) = \begin{cases} \frac{1+\gamma\lambda}{1-\gamma\lambda}, & \text{если } q = 1; \\ \frac{[2s+\gamma\lambda]_q}{[2s-\gamma\lambda]_q}, & \text{если } q \neq 1, \end{cases} \tag{31}$$

где γ — произвольная конечная константа.

Доказательство. Пусть $\widetilde{W}_1$ обозначает подпространство в $V_s^{\otimes 3}$, являющееся линейной оболочкой векторов

$$|1\rangle_{123} = |s{-}1\rangle_1 |s\rangle_2 |s\rangle_3, \quad |2\rangle_{123} = |s\rangle_1 |s{-}1\rangle_2 |s\rangle_3, \quad |3\rangle_{123} = |s\rangle_1 |s\rangle_2 |s{-}1\rangle_3. \tag{32}$$

Из (23) и разложения Клебша–Гордана (КГ) пространства $V_s^{\otimes 2}$ (явный вид коэффициентов КГ дан в [15, 16]),

$$|2s, 2s-1\rangle = \alpha_s\, |s\rangle|s-1\rangle + \beta_s\, |s-1\rangle|s\rangle, \tag{33}$$

$$|2s-1, 2s-1\rangle = \beta_s\, |s\rangle|s-1\rangle - \alpha_s\, |s-1\rangle|s\rangle, \tag{34}$$

$$\alpha_s = q^s\,(q^{2s} + q^{-2s})^{-\frac{1}{2}}, \quad \beta_s = q^{-s}\,(q^{2s} + q^{-2s})^{-\frac{1}{2}}, \tag{35}$$

мы заключаем, что $\widetilde{W}_1$ является инвариантным подпространством YB-оператора для рассматриваемой R-матрицы. Заметим, что сужение P_l^j, $l = \{12\}, \{23\}$ на $\widetilde{W}_1$ равно нулю, если $j < 2s{-}1$. Таким образом,

$$R_l(\lambda)\Big|_{\widetilde{W}_1} = P_l^{2s} + r_{2s-1}(\lambda) P_l^{2s-1}. \tag{36}$$

Более того, принимая во внимание (33)–(34) и вводя $\tilde{g}(\lambda) = r_{2s-1}(\lambda) - 1$, мы замечаем, что (36) можно переписать в следующем виде:

$$R_l(\lambda)\Big|_{\widetilde{W}_1} = \mathbb{E} + \tilde{g}(\lambda)\,\pi_l\,, \tag{37}$$

где π_l являются проекторами, $\pi_l^2 = \pi_l$. В базисе (32) они имеют вид

$$\pi_{12} = \alpha_s^2\,|1\rangle\,\langle 1| - \alpha_s\,\beta_s\,|1\rangle\,\langle 2| - \alpha_s\,\beta_s\,|2\rangle\,\langle 1| + \beta_s^2\,|2\rangle\,\langle 2|, \tag{38}$$

$$\pi_{23} = \alpha_s^2\,|2\rangle\,\langle 2| - \alpha_s\,\beta_s\,|2\rangle\,\langle 3| - \alpha_s\,\beta_s\,|3\rangle\,\langle 2| + \beta_s^2\,|3\rangle\,\langle 3|. \tag{39}$$

Теперь, замечая, что

$$\pi_{12}\,\pi_{23}\,\pi_{12} = (\alpha_s\,\beta_s)^2\,\pi_{12}, \qquad \pi_{23}\,\pi_{12}\,\pi_{23} = (\alpha_s\,\beta_s)^2\,\pi_{23}, \tag{40}$$

мы видим, что для (37) выполняются условия леммы 1, если отождествить $U_l = (\alpha_s\beta_s)^{-1}\pi_l$, $g(\lambda) = \alpha_s\beta_s\,\tilde{g}(\lambda)$, и $\eta_0 = (\alpha_s\beta_s)^{-1}$. Подставляя это значение η_0 в (26) и вспоминая, что $\tilde{g}(\lambda) = r_{2s-1}(\lambda) - 1$, мы получаем (31), где мы заменили $e^{\gamma\lambda}$ на $q^{2\gamma\lambda}$ ради удобства сравнения с пределом $q = 1$. Поскольку мы требуем регулярности $R(\lambda)$, константа γ должна быть конечной. •

2.2. Инвариантные подпространства. Доказательство предложения 1 показывает, что редукция YB-оператора на некоторое инвариантное подпространство упрощает нахождение коэффициентов $r_j(\lambda)$ рассматриваемой R-матрицы. В дальнейшем мы будем развивать этот метод, используя имеющуюся информацию о разложении КГ тензорных произведений представлений $U_q(sl_2)$. Таким способом мы выведем систему связанных функциональных уравнений, подобных (28), и покажем, что соответствующие необходимые условия представляют собой систему связанных алгебраических уравнений.

В предложении 1 мы использовали то, что YB-оператор (9) коммутирует с S^z_{123}. Теперь мы используем также и то, что $Y(\lambda,\mu)$ коммутирует с $S^{\pm}_{123}$.

Обозначим символом $\lfloor t \rfloor$ целую часть числа t. Определим подпространство $W_n^{(s)} \subset V_s^{\otimes 3}$ для $n = 0, 1, \ldots, \lfloor 3s \rfloor$ как линейную оболочку векторов старшего веса спина $(3s-n)$, т. е.

$$W_n^{(s)} = \{\, \psi \in V_s^{\otimes 3} \mid S^+_{123}\psi = 0,\ \ S^z_{123}\psi = (3s-n)\psi \,\}. \tag{41}$$

Рассмотрим следующие два базиса в $W_n^{(s)}$ (здесь и далее $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}_q$ и $\begin{Bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{Bmatrix}_q$ обозначают соответственно коэффициенты КГ и 6-j символы алгебры

$U_q(sl_2)$):

$$|n;k\rangle_{123}=\sum_m |m\rangle_1\,|2s-k,3s-n-m\rangle_{23}\begin{bmatrix} s & 2s-k & 3s-n\\ m & 3s-n-m & 3s-n\end{bmatrix}_q, \quad (42)$$

$$|n;k\rangle'_{123}=\sum_m |2s-k,3s-n-m\rangle_{12}\,|m\rangle_3\begin{bmatrix} 2s-k & s & 3s-n\\ 3s-n-m & m & 3s-n\end{bmatrix}_q. \quad (43)$$

Базисные векторы $W_n^{(s)}$ нумеруются целым $k\in I_n^{(s)}$, где

$$I_n^{(s)}=\begin{cases} 0\leqslant k\leqslant n & \text{для } 0\leqslant n\leqslant 2s;\\ n-2s\leqslant k\leqslant 4s-n & \text{для } 2s\leqslant n\leqslant \lfloor 3s\rfloor.\end{cases} \quad (44)$$

Суммирование в (42)–(43) ведется по тем значениям m, для которых коэффициенты КГ в правой части (42)–(43) не равны нулю, т. е. $(s-n+k)\leqslant m \leqslant \min(s,5s-n-k)$.

Рассмотрим матрицу перехода, $A^{(s,n)}$, связывающую базисы (42) и (43), т. е. ортогональную матрицу, элементы которой суть следующие скалярные произведения:

$$A_{kk'}^{(s,n)}=\langle n;k|n;k'\rangle'. \quad (45)$$

Матрица перехода зависит от q, но ради компактности обозначений мы не будем указывать аргумент q явно, если это по контексту не требуется.

Предложение 2.

i) *Элементы матрицы $A^{(s,n)}$ выражаются в терминах 6–j символов алгебры $U_q(sl_2)$ следующим образом:*

$$A_{kk'}^{(s,n)}=(-1)^{2s-n}\sqrt{[4s-2k+1]_q[4s-2k'+1]_q}\begin{Bmatrix} s & s & 2s-k\\ s & 3s-n & 2s-k'\end{Bmatrix}_q. \quad (46)$$

ii) $A^{(s,n)}$ *самодуальна по аргументу q,*

$$A_q^{(s,n)}=A_{q^{-1}}^{(s,n)}. \quad (47)$$

iii) $A^{(s,n)}$ *ортогональна, симметрична и совпадает со своей обратной (t обозначает матричное транспонирование),*

$$A^{(s,n)}=\left(A^{(s,n)}\right)^t=\left(A^{(s,n)}\right)^{-1}. \quad (48)$$

Как следствие, $A^{(s,n)}$ имеет собственные значения только ± 1.

iv) *Для матрицы перехода выполняются следующие соотношения „дуальности" между спином и уровнем:*

$$A_q^{(s,1)}=A_{q^{2s}}^{(\frac12,1)}, \quad (49)$$

$$A_q^{(s,n)}=A_q^{(2s-\frac n2,6s-2n)}, \quad (50)$$

где $n \leqslant 2s$.

Явные формулы для элементов матрицы $A^{(s,n)}$ и доказательство ее вышеперечисленных свойств даны в приложениях B и C.

Замечание 5. Из iii) и iv) следует, что $\frac{1}{2}(\mathbb{E} \pm A^{(s,n)})$ являются проекторами рангов $n_\pm$. В частности, при $n \leqslant 2s$ мы имеем $n_+ = \lfloor \frac{n}{2}+1 \rfloor$, $n_- = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$.

Свойства матрицы перехода, приведенные в предложении 2, делают ее эффективным инструментом для работы с сужениями $U_q(sl_2)$-инвариантных операторов на подпространства $W_n^{(s)}$. В качестве простого примера докажем следующее хорошо известное утверждение.

Лемма 2. *Следующее тождество выполняется на* $V_s^{\otimes 3}$:

$$P^0_{23}\, P^j_{12}\, P^0_{23} = \frac{[2j+1]_q}{[2s+1]_q^2}\, P^0_{23}. \tag{51}$$

Доказательство. Заметим, что $P^0_{12}\big|_{W_n^{(s)}}$ и $P^0_{23}\big|_{W_n^{(s)}}$ равны нулю для всех n, за исключением $n = 2s$. Таким образом, достаточно доказать соотношение (51), когда оно редуцировано на $W_{2s}^{(s)}$. Обозначим $p^j = P^j_{23}\big|_{W_{2s}^{(s)}}$. В базисе (42) мы имеем $p^j_{ab} = \delta_{a,2s-j}\delta_{b,2s-j}$. Поэтому в этом базисе левая часть (51) принимает следующий вид:

$$p^0\, A^{(s,2s)}\, p^j\, A^{(s,2s)}\, p^0 = \big(A^{(s,2s)}_{2s-j,2s}\big)^2\, p^0. \tag{52}$$

Значение $A^{(s,2s)}_{2s-j,2s}$ легко вычисляется (см. формулу (97) в приложении B), и его квадрат дает скалярный коэффициент в правой части (51). •

2.3. Редуцированные уравнения Янга–Бакстера. Уравнения (23) означают, что $W_n^{(s)}$ — инвариантное подпространство для YB-оператора (9). Введем *редуцированный* YB-оператор: $Y_n(\lambda,\mu) = Y(\lambda,\mu)\,\big|_{W_n^{(s)}}$ (сужение $Y(\lambda,\mu)$ на $W_n^{(s)}$). Заметим, что редукции P^j_l на $W_n^{(s)}$ диагональны в базисах (43) и (42) для $l = \{12\}$ и $l = \{23\}$ соответственно. Более того, они равны нулю, если j не принадлежит интервалу

$$|2s-n| \leqslant j \leqslant \min(2s, 4s-n). \tag{53}$$

Поэтому $R_l(\lambda)\big|_{W_n^{(s)}}$ представляются в базисе (43) следующим образом:

$$R_{12}(\lambda)\,\Big|_{W_n^{(s)}} = A^{(s,n)}\, D(\lambda)\, \big(A^{(s,n)}\big)^{-1}, \quad R_{23}(\lambda)\,\Big|_{W_n^{(s)}} = D(\lambda), \tag{54}$$

$$D_{kk'}(\lambda) = \delta_{kk'}\, r_{2s-k}(\lambda), \tag{55}$$

где $k \in I_n^{(s)}$, как указано в (44). Отсюда, принимая во внимание свойство (48), мы заключаем, что $Y_n(\lambda, \mu)$ принимает в базисе (43) следующий вид:

$$\begin{aligned} Y_n(\lambda,\mu) = A^{(s,n)}\, D(\lambda-\mu)\, A^{(s,n)}\, D(\lambda)\, A^{(s,n)}\, D(\mu) \\ - D(\mu)\, A^{(s,n)}\, D(\lambda)\, A^{(s,n)}\, D(\lambda-\mu)\, A^{(s,n)}. \end{aligned} \tag{56}$$

Соответствующее *редуцированное* уравнение YB есть

$$\begin{aligned} A^{(s,n)}\, D(\lambda-\mu)\, A^{(s,n)}\, D(\lambda)\, A^{(s,n)}\, D(\mu) \\ = D(\mu)\, A^{(s,n)}\, D(\lambda)\, A^{(s,n)}\, D(\lambda-\mu)\, A^{(s,n)}. \end{aligned} \tag{57}$$

Оно является условием равенства нулю YB-оператора (9) на $W_n^{(s)}$. Отметим, что (48) означает, что редуцированный YB-оператор антисимметричен, $\big(Y_n(\lambda,\mu)\big)^t = -Y_n(\lambda,\mu)$. Следовательно, (57) содержит следующие независимые соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j\in I_n^{(s)}} r_{2s-i}(\lambda-\mu) r_{2s-j}(\lambda) A_{ij}^{(s,n)} \\ \times \big(r_{2s-a}(\mu) A_{aj}^{(s,n)} A_{ib}^{(s,n)} - r_{2s-b}(\mu) A_{ai}^{(s,n)} A_{jb}^{(s,n)}\big) = 0, \\ a<b,\ \ a,b \in I_n^{(s)}. \end{aligned} \tag{58}$$

Подчеркнем, что благодаря тому, что YB-оператор коммутирует с S_{123}^-, уравнения (58) для данного уровня n гарантируют зануление YB-оператора не только на подпространстве $W_n^{(s)}$, но также и на большем подпространстве, которое натянуто на *все* векторы, получаемые из $W_n^{(s)}$ действием $(S_{123}^-)^m$, $m{=}0,\dots,6s{-}2n$. (Это имеет близкое сходство со структурой собственных векторов в алгебраическом Бете анзатце, см. обзор [18].) Таким образом, набор редуцированных уравнений Янга–Бакстера (58), $n=1,\dots,\lfloor 3s\rfloor$, не столь переопределен, как исходное уравнение (10), содержащее $\dim V_s^{\otimes 3} = (2s{+}1)^3$ функциональных уравнений (хотя некоторые из них, вообще говоря, не независимы). Однако даже этот набор уравнений остается переопределенным. Действительно, (58) для уровня $n \leqslant 2s$ включает $r_j(\lambda)$ с $j = 2s{-}n,\dots,2s$. Поэтому достаточно решить (58) для $n=1,\dots,2s$, чтобы найти все коэффициенты $r_j(\lambda)$, задающие R-матрицу. Но эти коэффициенты должны также удовлетворять оставшимся редуцированным уравнениям YB для $n=2s{+}1,\dots,\lfloor 3s\rfloor$.

Замечание 6. Для $s=\frac{1}{2}$ мы имеем $2s{=}\lfloor 3s\rfloor{=}1$, и потому соответствующий набор редуцированных уравнений YB не переопределен. Действительно, в этом случае (58) содержит только одно независимое уравнение. Несколько менее тривиальным является замечание, что набор редуцированных уравнений YB не переопределен и для $s = 1$ (см. доказательство предложения 5).

Теперь, применяя технику редуцированных уравнений YB, мы докажем следующее утверждение.

Предложение 3. *Пусть* $R(\lambda)$ — $U_q(sl_2)$*-инвариантное решение уравнения* (10) *на* $V_s^{\otimes 3}$ *для спина* $s \geqslant \frac{n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *удовлетворяющее условиям* (6) *и* (8). *Если* n *старших коэффициентов его спектрального разложения совпадают, т. е.* $r_{2s}(\lambda) = r_{2s-1}(\lambda) = \cdots = r_{2s-n+1}(\lambda) = 1$, *то*

$$r_{2s-n}(\lambda) = 1 + \eta_0\, g(\lambda), \tag{59}$$

где $g(\lambda)$ *дается формулой* (26), *причем*

$$\eta_0 = \frac{[2s-n]!}{[2s]!}\,\frac{[4s-n+1]!}{[4s-2n+1]!}. \tag{60}$$

Здесь q*-факториал определен как* $[n]! = \prod_{k=1}^{n}[k]_q$ *для* $n \in \mathbb{Z}_+$ *и* $[0]! = 1$.

Доказательство. Соответствующее редуцированное уравнение YB (с n в (57) тем же, что и в (59)), умноженное слева на $A^{(s,n)}$, можно рассматривать как уравнение YB (10) для $R_{12}(\lambda) = D(\lambda)$ и $R_{23}(\lambda) = A^{(s,n)}\, D(\lambda)\, A^{(s,n)}$. Далее, заметим, что

$$D(\lambda) = \mathbb{E} + \tilde{g}(\lambda)\,\pi, \qquad A^{(s,n)}\, D(\lambda)\, A^{(s,n)} = \mathbb{E} + \tilde{g}(\lambda)\,\pi', \tag{61}$$

где $\tilde{g}(\lambda) = r_{2s-n}(\lambda) - 1$, π — матрица такая, что $\pi_{ab} = \delta_{an}\delta_{bn}$, $a, b = 0, \ldots, n$, и $\pi' = A^{(s,n)}\,\pi\, A^{(s,n)}$. Очевидно, что π и π' являются проекторами ранга один. Более того, вычисление, аналогичное (52), показывает, что

$$\pi\,\pi'\,\pi = \eta_0^{-2}\,\pi, \qquad \pi'\,\pi\,\pi' = \eta_0^{-2}\,\pi', \qquad \eta_0 = \left|A_{nn}^{(s,n)}\right|^{-1}. \tag{62}$$

Отсюда следует (59), поскольку мы можем применить лемму 1, отождествляя $U_{12} = \eta_0\,\pi$, $U_{23} = \eta_0\,\pi'$ и $\tilde{g}(\lambda) = \eta_0\, g(\lambda)$. Явный вид η_0, данный в (60), легко получается из (97). •

Это предложение обобщает одновременно лемму 1 и предложение 1. Для $n = 1$ уравнение (60) дает $\eta_0 = q^{2s} + q^{-2s}$, и мы возвращаемся к случаю, рассмотренному в предложении 1. Для $n = 2s$ уравнение (60) дает $\eta_0 = [2s+1]_q$; соответствующая R-матрица дается формулой (20), что является частным примером для случая, рассмотренного в лемме 1 (см. замечание 3). Неясно, существует ли пример R-матрицы с такими коэффициентами $r_j(\lambda)$, как описано в предложении 3 для $n \neq 1$ и $n \neq 2s$. Тем не менее это предложение будет полезно для анализа решений уравнения YB (см. §3). Для этого анализа будет полезным также и следующее утверждение.

Предложение 4. *Пусть $R(\lambda)$ — $U_q(sl_2)$-инвариантное решение уравнения* (10) *на $V_s^{\otimes 3}$ для полуцелого спина $s \geqslant \frac{3}{2}$, удовлетворяющее условиям* (6) *и* (8). *Тогда коэффициенты $r_{s-\frac{1}{2}}(\lambda)$ и $r_{s+\frac{1}{2}}(\lambda)$ его спектрального разложения связаны следующим образом:*

$$\frac{r_{s-\frac{1}{2}}(\lambda)}{r_{s+\frac{1}{2}}(\lambda)} = \begin{cases} \frac{1+\gamma\lambda}{1-\gamma\lambda}, & \text{если } q = 1; \\ \frac{[s+\frac{1}{2}+\gamma\lambda]_q}{[s+\frac{1}{2}-\gamma\lambda]_q}, & \text{если } q \neq 1, \end{cases} \tag{63}$$

где γ — произвольная конечная константа.

Доказательство. Матрица $D(\lambda)$ в редуцированном уравнении YB может быть умножена на произвольную функцию $\varphi(\lambda)$, аналитичную в окрестности точки $\lambda = 0$ и удовлетворяющую соотношению $\varphi(\lambda)\varphi(-\lambda) = 1$. Поэтому в (57) для $n = 3s-\frac{1}{2}$ мы можем выбрать $D(\lambda) = \mathrm{diag}\,(1, g(\lambda))$, где $g(\lambda) = \frac{r_{s-\frac{1}{2}}(\lambda)}{r_{s+\frac{1}{2}}(\lambda)}$. Далее, по соотношению дуальности (50) мы имеем $A^{(s,3s-\frac{1}{2})} = A^{(\frac{s}{2}+\frac{1}{4},1)}$ для полуцелых спинов $s \geqslant \frac{3}{2}$. Отсюда, применяя предложение 1, мы заключаем, что $g(\lambda) = r_{2s'-1}(\lambda)$, где $s' = \frac{s}{2} + \frac{1}{4}$. •

2.4. Необходимые условия. Дифференцируя (58) по μ, полагая $\mu = \lambda$ и принимая во внимание условие регулярности $D(0) = \mathbb{E}$, мы выводим следующую систему уравнений (штрих обозначает производную по спектральному параметру):

$$\sum_{i,j\in I_n^{(s)}} r'_{2s-i}(0) r_{2s-j}(\lambda)\, A_{ij}^{(s,n)} \left(r_{2s-a}(\lambda)\, A_{aj}^{(s,n)}\, A_{ib}^{(s,n)} - r_{2s-b}(\lambda)\, A_{ai}^{(s,n)}\, A_{jb}^{(s,n)}\right)$$
$$= A_{ab}^{(s,n)} \left(r'_{2s-a}(\lambda)\, r_{2s-b}(\lambda) - r'_{2s-b}(\lambda)\, r_{2s-a}(\lambda)\right), \quad a < b, \quad a, b \in I_n^{(s)}. \tag{64}$$

Здесь мы выполнили суммирование в правой части, используя то, что $\left(A^{(s,n)}A^{(s,n)}\right)_{ab} = \delta_{ab}$. Важно отметить, что хотя (64) содержат производные, они в действительности являются линейными *алгебраическими* уравнениями на $r_j(\lambda)$ для $j \neq a, b$.

Легко проверить, что (64) выполняются тривиально для $\lambda = 0$. Поэтому рассмотрим члены старших порядков в разложении (64) около $\lambda = 0$. Обозначим $r'_{2s-a}(0) \equiv \xi_a$. В первом порядке по λ суммирование по i, j можно выполнить, и мы получаем условия

$$A_{ab}^{(s,n)} \left(r''_{2s-a}(0) - r''_{2s-b}(0)\right) = A_{ab}^{(s,n)} \left(\xi_a^2 - \xi_b^2\right), \tag{65}$$

которые всегда выполняются, поскольку унитарность (4) означает, что

$$r''_{2s-a}(0) = \xi_a^2. \tag{66}$$

Во втором порядке по λ уравнения (64) превращаются в систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j\in I_n^{(s)}} \xi_i\,\xi_j^2\,A_{ij}^{(s,n)}\,(A_{aj}^{(s,n)}\,A_{ib}^{(s,n)} - A_{ai}^{(s,n)}\,A_{jb}^{(s,n)})\\
&+ (\xi_a - \xi_b)\sum_{i,j\in I_n^{(s)}} \xi_i\,\xi_j A_{ij}^{(s,n)}(A_{aj}^{(s,n)}A_{ib}^{(s,n)} + A_{ai}^{(s,n)}\,A_{jb}^{(s,n)})\\
&= A_{ab}^{(s,n)}(r'''_{2s-a}(0) - r'''_{2s-b}(0) - \xi_a^3 + \xi_b^3 + \xi_a^2\,\xi_b - \xi_b^2\,\xi_a),\\
&\qquad a<b,\ \ a,b\in I_n^{(s)}.
\end{aligned}\tag{67}$$

Замечательно, что уравнения (64) и (67) могут быть явно решены рекуррентным способом. Опишем соответствующий алгоритм. Мы начинаем с уровня $n=1$, для которого $r_{2s}(\lambda)=1$ и $r_{2s-1}(\lambda)$ дается формулой (31). Теперь допустим, что мы нашли $r_j(\lambda)$, $j=2s{-}n,\dots,2s$, которые решают уравнения (64) для некоторого уровня $n<2s$. Тогда уравнения (64) и (67) на уровне $(n{+}1)$ позволяют нам выразить $r_{2s-n-1}(\lambda)$ *алгебраически* через уже найденные $r_j(\lambda)$. Действительно, поскольку мы уже знаем ξ_j для $j=0,\dots,n$, то уравнения (67) для $2s{-}n\leqslant a<b\leqslant n$ становятся квадратными уравнениями по отношению к ξ_{n+1}. Решая их и подставляя найденные значения ξ_{n+1} в (64) для $2s{-}n\leqslant a<b\leqslant n$, мы получаем систему линейных уравнений на $r_{2s-n-1}(\lambda)$. Нахождение всех возможных решений этой системы завершает $(n{+}1)$-й шаг рекурсии. Продолжая процедуру до $n=2s$, мы получим все возможные решения для $r_j(\lambda)$ и, таким образом, построим *все* возможные анзатцы для регулярных $U_q(sl_2)$-инвариантных R-матриц спина s. Затем, поскольку (64) являются необходимыми, но не достаточными условиями, мы должны проверить, какие из этих анзатцов действительно удовлетворяют уравнению YB (10) или, альтернативно, редуцированным уравнениям YB (58) для всех n до $\lfloor 3s\rfloor$.

2.5. Гамильтонианы спиновых цепочек и реконструкция R-матриц. Исключительная важность уравнения YB для квантового метода обратной задачи рассеяния (см. обзоры [17, 18]) состоит в том, что его решения могут быть использованы для построения семейств квантовых интегралов движения в инволюции. В частности, регулярные решения уравнения YB позволяют построить *локальные* интегралы движения для решеточных моделей. Первый из этих интегралов для R-матрицы вида (5)

$$\mathcal{H}=\sum_k H_{k,k+1},\qquad H=\partial_\lambda R(\lambda)\Big|_{\lambda=0}=\sum_{j=0}^{2s-1}\xi_{2s-j}\,P^j \tag{68}$$

обычно рассматривается как гамильтониан магнитной цепочки спина s со взаимодействием ближайших узлов. Здесь $H \in \mathrm{End}\ V_s^{\otimes 2}$ и $\mathcal{H} \in \mathrm{End}\ V_s^{\otimes L}$, где L — число узлов решетки. Заметим, что в (68) мы учли нормировочное условие (6), которое означает, что $\xi_0 = 0$ (тем самым фиксируя выбор аддитивной постоянной в гамильтониане). R-матрицы, эквивалентные в смысле преобразования (11), порождают гамильтонианы, связанные просто умножением на константу, $H \to \gamma H$; мы будем считать такие гамильтонианы эквивалентными.

Важно отметить, что, как было замечено в [12] для регулярных решений уравнения YB, различные гамильтонианы соответствуют различным R-матрицам. В нашем контексте это утверждение можно сформулировать следующим образом.

Лемма 3. *Пусть* $R^{(1)}(\lambda)$ *и* $R^{(2)}(\lambda)$ *— два решения уравнения YB* (10) *на* $V_s^{\otimes 3}$, *удовлетворяющие условиям* (5), (6) *и* (8). *Соответствующие гамильтонианы* (68) *совпадают,* $H^{(1)} = H^{(2)}$, *если и только если* $R^{(1)}(\lambda) = R^{(2)}(\lambda)$.

Доказательство. Импликация „если" очевидна. Далее, теорема 3 в [12] утверждает, что если гамильтонианы, соответствующие двум регулярным R-матрицам, аналитичным в окрестности точки $\lambda = 0$, совпадают, то $R^{(1)}(\lambda) = \varphi(\lambda)\, R^{(2)}(\lambda)$, где скалярная функция $\varphi(\lambda)$ аналитична в окрестности точки $\lambda = 0$ и удовлетворяет условию $\varphi(0) = 1$. В рассматриваемом случае аналитичность $r_j(\lambda)$ вместе с условием (6) означают, что $\varphi(\lambda) = 1$. •

Замечание 7. Алгоритм, данный в 2.4, дополняет эту лемму конструктивной процедурой, которая позволяет *реконструировать* R-матрицу по данному гамильтониану. Действительно, если мы знаем гамильтониан в виде (68), т. е. мы знаем все ξ_j, то мы можем решить (64) рекурсивно, начиная с $r_{2s}(\lambda) = 1$, находя, таким образом, все коэффициенты $r_j(\lambda)$ соответствующей регулярной $U_q(sl_2)$-инвариантной R-матрицы. В отличие от общей ситуации лемма 3 гарантирует единственность искомого набора коэффициентов $r_j(\lambda)$.

§3. Анализ редуцированных уравнений Янга–Бакстера

3.1. Асимптотические решения. Отметим, что описанная выше техника применима и в предельном случае $\lambda \to \infty$. В этом пределе, если существует $\check{R}^{\pm 1} = \lim_{\lambda \to \pm\infty} R(\lambda)$, то уравнение YB (10) превращается в

$$\check{R}_{12}\, \check{R}_{23}\, \check{R}_{12} = \check{R}_{23}\, \check{R}_{12}\, \check{R}_{23}. \tag{69}$$

Обозначим $d_j = \lim_{\lambda \to +\infty} r_j(\lambda)$. Тогда $\check{R} = \sum_{j=0}^{2s} d_j P^j$. Условие (6) означает, что d_{2s}=1. Переходя к пределу $\lambda \to \infty$ в (57), мы получаем систему алгебраических уравнений на коэффициенты d_j,

$$A^{(s,n)}\,D\,A^{(s,n)}\,D\,A^{(s,n)}\,D = D\,A^{(s,n)}\,D\,A^{(s,n)}\,D\,A^{(s,n)}. \tag{70}$$

Здесь $n = 1, \ldots, \lfloor 3s \rfloor$ и $D_{kk'} = \delta_{kk'}\, d_{2s-k}$, где $k \in I_n^{(s)}$. Аналогично случаю с нетривиальной зависимостью R-матрицы от спектрального параметра (70) содержит следующие независимые уравнения:

$$(d_a - d_b) \sum_{i,j \in I_n^{(s)}} d_i\, d_j\, A_{ij}^{(s,n)}\, A_{ai}^{(s,n)}\, A_{jb}^{(s,n)} = 0, \quad a < b, \ \ a, b \in I_n^{(s)}. \tag{71}$$

Эта система уравнений может быть решена рекурсивно при помощи алгоритма, данного в 2.4. В этом контексте полезно отметить, что одно частное решение известно априори, а именно

$$d_j = (-1)^{2s-j}\, q^{2s(2s+1)-j(j+1)}, \tag{72}$$

которое получается из (19) в пределе $q^\lambda \to \infty$.

3.2. Редуцированные уравнения YB для $n = 1$ **и** $n = 2$. Матрица перехода для $n = 1$ имеет следующий явный вид:

$$A^{(s,1)} = \frac{1}{\{2s\}_q} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{1+\{4s\}_q} \\ \sqrt{1+\{4s\}_q} & -1 \end{pmatrix}, \tag{73}$$

где мы обозначили $\{t\}_q = q^t + q^{-t}$. В этом случае (64) содержит только одно уравнение. Принимая во внимание, что $r_{2s}(\lambda) = 1$, и подставляя $r_{2s-1}(\lambda) = 1 + \{2s\}_q\, g(\lambda)$, легко видеть, что это уравнение совпадает с (29). Следовательно, мы получаем то же выражение для $r_{2s-1}(\lambda)$, что и в предложении 1. Соответственно уравнение (71) или выполняется тривиально, если $d_{2s-1} = 1$, или является квадратным уравнением, имеющим корни $d_{2s-1} = -q^{\pm 4s}$.

Матрица перехода для $n = 2$ имеет следующий явный вид:

$$A^{(s,2)} = \begin{pmatrix} \frac{[2s-1]_q}{\{2s\}_q [4s-1]_q} & \rho_s \sqrt{\frac{[2]_q\,[6s-1]_q}{\{2s\}_q\,[4s-1]_q}} & \rho_s \frac{\sqrt{[6s-1]_q\,[6s-2]_q}}{[4s-1]_q} \\ \rho_s \sqrt{\frac{[2]_q\,[6s-1]_q}{\{2s\}_q\,[4s-1]_q}} & \{4s-1\}_q\,(\rho_s)^2 & -\rho_s \sqrt{\frac{[2]_q\,[6s-2]_q}{\{2s-1\}_q\,[4s-1]_q}} \\ \rho_s \frac{\sqrt{[6s-1]_q\,[6s-2]_q}}{[4s-1]_q} & -\rho_s \sqrt{\frac{[2]_q\,[6s-2]_q}{\{2s-1\}_q\,[4s-1]_q}} & \frac{[2s]_q}{\{2s-1\}_q [4s-1]_q} \end{pmatrix}, \tag{74}$$

где мы ввели обозначение $\rho_s = (\{2s-1\}_q \{2s\}_q)^{-\frac{1}{2}}$. Заметим, что имеют место следующие полезные для вычислений тождества:

$$A_{01}^{(s,2)}\, A_{12}^{(s,2)} = A_{02}^{(s,2)}\, \big(A_{11}^{(s,2)} - 1\big), \quad A_{11}^{(s,2)} = 1 - [2]_q\, (\rho_s)^2. \tag{75}$$

Анализ уравнения (58) подразделяется на два случая: $r_{2s-1}(\lambda) = 1$ и $r_{2s-1}(\lambda) \neq 1$. В первом из них применимо предложение 3, что дает

$$r_{2s-2}(\lambda) = \frac{b^2 e^\lambda - 1}{b^2 - e^\lambda}, \quad b + b^{-1} = \frac{[4s-1]_q \{2s-1\}_q}{[2s]_q}. \tag{76}$$

Во втором случае без потери общности мы можем выбрать $\gamma = 1$ в (31), что соответствует

$$r_{2s-1}(\lambda) = \frac{[2s+\lambda]_q}{[2s-\lambda]_q}, \quad d_{2s-1} = -q^{4s}, \quad \xi_1 = \varkappa_q \frac{\{2s\}_q}{[2s]_q}, \quad \varkappa_q \equiv \frac{2\log q}{q - q^{-1}}. \tag{77}$$

В этом случае легко проверить, что три уравнения, содержащиеся в (71) для $n = 2$, имеют только один общий корень, а именно

$$d_{2s-2} = q^{8s-2}. \tag{78}$$

Подставляя в (67) значения $\xi_0 = 0$ и ξ_1, указанное в (77), получаем квадратное уравнение относительно ξ_2, корни которого имеют следующий вид:

$$\xi_2 = \frac{2\varkappa_q [4s-1]_q}{[2s-1]_q [2s]_q}, \quad \xi_2 = \varkappa_q (q - q^{-1})^2 \frac{[4s-1]_q}{\{4s-1\}_q}. \tag{79}$$

Соответствующие решения (64) имеют вид

$$r_{2s-2}(\lambda) = \frac{[2s+\lambda]_q}{[2s-\lambda]_q} \frac{[2s-1+\lambda]_q}{[2s-1-\lambda]_q}, \quad r_{2s-2}(\lambda) = \frac{\{4s-1+\lambda\}_q}{\{4s-1-\lambda\}_q}. \tag{80}$$

Оба эти решения удовлетворяют редуцированному уравнению YB (58) для уровня $n = 2$, что можно проверить непосредственно.

Предложение 5. *Для q в общем положении неэквивалентные регулярные $U_q(sl_2)$-инвариантные решения уравнения YB* (10) *спина $s = 1$, удовлетворяющие условию* (6), *исчерпываются следующими тремя типами:*

$$R(\lambda) = P^2 + P^1 + \frac{b^2 e^\lambda - 1}{b^2 - e^\lambda} P^0, \quad b + b^{-1} = [3]_q, \tag{81}$$

$$R(\lambda) = P^2 + \frac{[2+\lambda]_q}{[2-\lambda]_q} P^1 + \frac{[2+\lambda]_q}{[2-\lambda]_q} \frac{[1+\lambda]_q}{[1-\lambda]_q} P^0, \tag{82}$$

$$R(\lambda) = P^2 + \frac{[2+\lambda]_q}{[2-\lambda]_q} P^1 + \frac{\{3+\lambda\}_q}{\{3-\lambda\}_q} P^0. \tag{83}$$

Доказательство. Для $n \leqslant 2s$ мы имеем $\dim W_n^{(s)} = (n+1)$. Как уже было отмечено, редуцированное уравнение YB (57) гарантирует зануление YB-оператора на всех векторах вида $(S_{123}^-)^m W_n^{(s)}$, т. е. на подпространстве размерности $\Delta_n^{(s)} = (6s-2n+1) \dim W_n^{(s)}$. В частности, мы имеем $\Delta_0^{(1)} +$

$\Delta_1^{(1)}+\Delta_2^{(1)}=26$, что означает, что соответствующее редуцированное уравнение YB выполняется на уровне $n=3$ автоматически, поскольку подпространство $W_3^{(1)}$ одномерно. Поэтому для $s=1$ редуцированные уравнения YB уровней $n=1,2$ являются не только необходимыми, но и достаточными условиями. Как было показано выше в этом параграфе, решения этих уравнений исчерпываются формулами (76) и (80), что для $s=1$ дает (81)–(83). •

Таким образом, для спина $s=1$ все три неэквивалентных sl_2-инвариантных R-матрицы (15), (13) и (12) имеют $U_q(sl_2)$-инвариантные аналоги. Два из них принадлежат к хорошо известным классам (19) и (20). Последний, (83), по-видимому, представляет собой особый случай; ранее он был найден в [19, 20] посредством бакстеризации алгебры Бирмана–Венцля–Мураками.

3.3. Редуцированные уравнения YB для $n=3$. 12 элементов матрицы перехода для $n=3$ даются формулами (97)–(98), а остальные четыре имеют вид

$$A_{11}^{(s,3)}=\frac{[2]_q[2s-1]_q[6s-2]_q-([2s-2]_q)^2}{\{2s-1\}_q[4s-3]_q[4s]_q}, \tag{84}$$

$$A_{12}^{(s,3)}=A_{21}^{(s,3)}=\frac{[2s-2]_q}{[4s-2]_q}([6s-2]_q-[2]_q[2s-1]_q)$$
$$\times\sqrt{\frac{[2s-1]_q[6s-3]_q}{[4s-4]_q[4s-3]_q[4s-1]_q[4s]_q}}, \tag{85}$$

$$A_{22}^{(s,3)}=\frac{[2s-2]_q-[2]_q[6s-3]_q}{\{2s-2\}_q\{2s-1\}_q[4s-1]_q}. \tag{86}$$

Предложение 6. *Для q в общем положении неэквивалентные регулярные $U_q(sl_2)$-инвариантные решения уравнения YB* (10) *спина $s=\frac{3}{2}$, удовлетворяющие условию* (6), *исчерпываются типами* (19) *и* (20).

Доказательство. Проанализируем спектральное разложение возможных решений редуцированных уравнений YB для спина $\frac{3}{2}$ и $n=1,2,3$. Первый возможный случай — $r_2(\lambda)=r_1(\lambda)=1$; здесь $r_0(\lambda)$ определяется предложением 3, а соответствующая R-матрица дается формулой (20). Далее, случай $r_2(\lambda)=1$, $r_1(\lambda)\neq 1$ описывается тем же предложением для $n=2$, и $r_1(\lambda)$ дается формулой (76). Однако этот случай приходится исключить, поскольку формула (76) для $s=1$ несовместна с утверждением предложения 4, которое требует $b=q^2$. В оставшемся случае $r_2(\lambda)\neq 1$ без потери общности мы можем выбрать $\gamma=1$ в (31), что дает $r_2(\lambda)=\frac{[3+\lambda]_q}{[3-\lambda]_q}$, и в соответствии с анализом, выполненным в 3.2, $r_1(\lambda)$ дается одним из выражений в (80). Однако второе из них приходится исключить как несовместное с предложением 4. Таким образом, у нас остается

$$r_2(\lambda) = \frac{[3+\lambda]_q\,[2+\lambda]_q}{[3-\lambda]_q\,[2-\lambda]_q}, \qquad \xi_0 = 0, \qquad \xi_1 = \varkappa_q \frac{\{3\}_q}{[3]_q}, \qquad \xi_2 = 2\varkappa_q \frac{[5]_q}{[2]_q[3]_q}. \tag{87}$$

Подставляя эти значения в (67) для $n = 3$ и $s = \frac{3}{2}$, мы получаем систему трех квадратных уравнений на ξ_3. Прямое вычисление, использующее (97)–(98) и (84)–(86), показывает, что эти три уравнения имеют только один общий корень, а именно

$$\xi_3 = \varkappa_q \frac{\{2\}_q(5+3\{2\}_q)}{[2]_q[3]_q}. \tag{88}$$

Это значение соответствует (19) для $s = \frac{3}{2}$. По лемме 3 R-матрица восстанавливается по (87) и (88) единственным образом, а потому она и есть та, что дается формулой (19). •

Из доказанного предложения видно, что в отличие от случая спина $s = 1$ только две из четырех sl_2-инвариантных R-матриц (12)–(15) имеют $U_q(sl_2)$-аналоги для спина $s = \frac{3}{2}$. В действительности, анализируя редуцированные уравнения YB для $n = 3$, мы можем обобщить это наблюдение и для старших спинов.

Предложение 7. *Пусть $R(\lambda)$ — $U_q(sl_2)$-инвариантное решение уравнения YB* (10) *на $V_s^{\otimes 3}$ для спина $s \geqslant 2$, удовлетворяющее* (6) *и* (8). *Если $r_{2s-1}(\lambda) = \frac{[2s+\lambda]_q}{[2s-\lambda]_q}$, то*

$$r_{2s-2}(\lambda) = \frac{[2s+\lambda]_q\,[2s-1+\lambda]_q}{[2s-\lambda]_q\,[2s-1-\lambda]_q}. \tag{89}$$

Как следствие, для $s \geqslant 2$ не существует $U_q(sl_2)$-инвариантных регулярных R-матриц, которые в пределе $q \to 1$ переходят в (12) *или* (14).

Доказательство. Пусть $q = 1+h$, $h \ll 1$, так что $[t]_q = t + t(t-1)h^2/3 + O(h^3)$. Поскольку $A_q^{(s,n)}$ зависит от q гладко, имеем $A_q^{(s,n)} = A_{q=1}^{(s,n)} + O(h^2)$. Рассмотрим редуцированные уравнения YB (67) для $n = 3$, где $\xi_0 = 0$, ξ_1 дается (77), а ξ_2 дается вторым выражением в (79). Применяя (97)–(98) и (84)–(86), находим следующие h-разложения этих уравнений для $(a,b)=(0,1)$, $(0,2)$ и $(1,3)$ соответственно:

$$\begin{aligned} 0 &= (5s^2-3s)\,\xi_3^2+(3-6s)\,\xi_3+1 \\ &\quad -\tfrac{2}{3}h^2\big((25s^4-32s^3+9s^2)\,\xi_3^2+(78s^3-81s^2+21s)\,\xi_3-47s^2+35s-3\big) \\ &\quad +O(h^3), \end{aligned} \tag{90}$$

$$0=h^2\big((7s^2-3s)\,\xi_3^2+(3-10s)\,\xi_3+3\big)+O(h^3), \tag{91}$$

$$\begin{aligned} 0 &= (5s^2-3s)\,\xi_3^2+(3-6s)\,\xi_3+1 \\ &\quad +\tfrac{4}{3}h^2\big((19s^4-35s^3+17s^2-3s)\,\xi_3^2 \\ &\qquad +(138s^3-201s^2+96s-15)\xi_3-85s^2+90s-20\big)+O(h^3). \end{aligned} \tag{92}$$

Отсюда видно, что в нулевом порядке по h (91) выполняется тривиально, в то время как (90) и (92) дают одно и то же квадратное уравнение, имеющее следующие корни:

$$\xi_3=\tfrac{1}{s},\qquad \xi_3=\tfrac{1}{5s-3}. \tag{93}$$

Таким образом, при $q=1$ уравнения (90)–(92) совместны (в частности, первое значение в (93) соответствует решениям типа (12) и (14)).

Во втором порядке по h (91) имеет корни $\xi_3=\frac{1}{s}$ и $\xi_3=\frac{1}{7s-3}$. Но для (90) и (92) поправки порядка h^2 к первому значению в (93) имеют вид

$$\xi_3=\tfrac{1}{s}+h^2\left(\tfrac{28}{3}s-6\right)+O(h^3),\qquad \xi_3=\tfrac{1}{s}+h^2\left(\tfrac{46}{3}-\tfrac{4}{s}-12s\right)+O(h^3). \tag{94}$$

Следовательно, уже во втором порядке по h совместность (90)–(92) утрачивается. Это означает, что второе выражение в (80) для $r_{2s-2}(\lambda)$ исключается. И, как следует из анализа, проведенного в п. 3.2, единственно возможной формой $r_{2s-2}(\lambda)$ является первое выражение в (80). R-матрица с таким спектральным коэффициентом не может быть q-деформацией (12) или (14) для $s\geqslant 2$, поскольку соответствующее значение ξ_2 не равно нулю в пределе $q\to 1$. •

Замечание 8. Заметим, что коэффициент $r_3(\lambda)$ особого решения (18) соответствует (после перенормировки $\lambda\to\lambda/6$) второму значению в (93). Как мы видели в доказательстве предложения 7, это значение не является корнем (91) при $h\neq 0$. Следовательно, мы заключаем, что (18) не имеет регулярного $U_q(sl_2)$-инвариантного аналога.

Благодарность. Автор благодарен проф. Ф. Шомерусу за оказанное гостеприимство в научном центре SPhT CEA–Saclay, где была выполнена часть этой работы.

Приложение А.

Лемма 4. *Пусть* $R(\lambda)$ — $U_q(sl_2)$*-инвариантное решение уравнения YB* (10) *на* $V_s^{\otimes 3}$*, удовлетворяющее условиям* (3) *и* (6). *Тогда* $R(\lambda)$ *унитарна, т. е. удовлетворяет также и условию* (4).

Доказательство. Уравнение (5) гарантирует, что $R(\lambda)$ коммутирует с $R(\mu)$. Введем $X^\lambda = R(\lambda)R(-\lambda)$. Тогда из уравнения YB для $\mu = -\lambda$ следует, что $X^\lambda_{12} = X^\lambda_{23}$. Применяя tr_{23} и tr_3 к этому равенству (следуя [12], где рассматривалось менее тривиальное уравнение $X_{12} - X_{23} = Z_{123}$), можно заключить, что $X^\lambda = c\mathbb{E}$, где c — скалярная константа. С другой стороны, мы имеем $X^\lambda = P^{2s} + \ldots$ в соответствии с (6). Отсюда $c = 1$ и $X^\lambda = \mathbb{E}$. •

Приложение В. Коумножение (2) определяет структуру разложения Клебша–Гордана (CG) тензорных произведений неприводимых представлений. Соответствующие коэффициенты CG и 6-j символы были выведены и изучены в [15, 16]. Конкретный 6-j символ, который возник в (46), дается формулой

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} s & s & 2s-k \\ s & 3s-n & 2s-k' \end{Bmatrix}_q &= F_k^s F_{k'}^s \sum_l (-1)^l [l+1]! \\ &\times\Big([l-4s+k]!\,[l-4s+k']!\,[l-6s+n+k]!\,[l-6s+n+k']! \\ &\times[6s-n-l]!\,[6s-k-k'-l]!\,[8s-n-k-k'-l]!\Big)^{-1}, \qquad (95)\end{aligned}$$

где

$$F_k^s = [2s-k]!\left(\frac{[k]!\,[n-k]!\,[2s-n+k]!\,[4s-n-k]!}{[4s-k+1]!\,[6s-n-k+1]!}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (96)$$

и q-факториал определен как $[n]! = \prod_{k=1}^n [k]_q$ для $n \in \mathbb{Z}_+$ и $[0]! = 1$. Сумма в (95) берется по тем l, для которых аргументы q-факториалов неотрицательны.

Для $n \leqslant 2s$ и k'=0 or k'=n сумма в правой части (95) содержит только один член (l=$6s-n$ или l=$6s-n-k$ соответственно), и мы получаем

$$A^{(s,n)}_{k,n} = \frac{(-1)^k\sqrt{[4s-2k+1]_q}}{[2s-n]!} \times \left(\frac{[n]!\,[2s]!\,[2s-n+k]!\,[4s-n-k]!\,[4s-2n+1]!\,[6s-n-k+1]!}{[k]!\,[n-k]!\,[4s-k+1]!\,[4s-n+1]!\,[6s-2n+1]!}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (97)$$

$$A^{(s,n)}_{0,k} = [2s]!\sqrt{[4s-2k+1]_q} \times \left(\frac{[n]!\,[4s-n]!\,[4s-n-k]!\,[6s-n+1]!}{[k]!\,[n-k]!\,[2s-n+k]!\,[2s-n]!\,[4s]!\,[4s-k+1]!\,[6s-n-k+1]!}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (98)$$

Приложение С.

Доказательство предложения 2.

i) Применяя разложение Клебша-Гордана к $\{23\}$ и $\{12\}$ компонентам в (42) и (43) соответственно и используя ортонормированность базиса пространства V_s, $\langle p|p'\rangle = \delta_{pp'}$, находим, что скалярное произведение в (45) имеет вид

$$A^{(s,n)}_{kk'} = \sum_{m,m'} \begin{bmatrix} s & 2s-k & 3s-n \\ m & 3s-n-m & 3s-n \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} 2s-k' & s & 3s-n \\ 3s-n-m' & m & 3s-n \end{bmatrix}_q \times \begin{bmatrix} s & s & 2s-k \\ 3s-n-m-m' & m' & 3s-n-m \end{bmatrix}_q \times \begin{bmatrix} s & s & 2s-k' \\ m & 3s-n-m-m' & 3s-n-m' \end{bmatrix}_q. \quad (99)$$

Для того чтобы выполнить суммирование по m, используем следующее тождество [15, 16]:

$$\sum_m \begin{bmatrix} a & b & e \\ m & m'-m & m' \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} b & d & f \\ m'-m & m'' & m''+m'-m \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} a & f & c \\ m & m''+m'-m & m''+m' \end{bmatrix}_q = (-1)^{a+b+c+d}\sqrt{[2e+1]_q\,[2f+1]_q} \begin{bmatrix} e & d & c \\ m' & m'' & m''+m' \end{bmatrix}_q \begin{Bmatrix} a & b & e \\ d & c & f \end{Bmatrix}_q. \quad (100)$$

После этого суммирование по m' сводится к

$$\sum_{m'} \begin{bmatrix} 2s-k' & s & 3s-n \\ 3s-n-m' & m' & 3s-n \end{bmatrix}_q^2 = \langle n;k'|n;k'\rangle = 1. \quad (101)$$

Оставшиеся множители в (100) дают правую часть (46).

ii) Самодуальность матрицы перехода по отношению к замене $q \to q^{-1}$ следует из того факта, что 6-j символы инвариантны по отношению к этой операции (поскольку в отличие от CG коэффициентов они целиком выражаются в терминах q-чисел [15, 16]).

iii) Очевидная инвариантность выражения (95) по отношению к замене $k \leftrightarrow k'$ означает, что матрица перехода симметрична. Поскольку $A_q^{(s,n)}$ ортогональна по построению, заключаем, что $A_q^{(s,n)}$ совпадает со своей обратной.

iv) Формула (49), очевидно, следует из (73). В терминах матричных элементов соотношение дуальности (50) имеет следующий вид:

$$A_{k,k'}^{(s,n)} = A_{\tilde{k},\tilde{k}'}^{(\tilde{s},\tilde{n})}, \tag{102}$$

$$\tilde{s} = 2s - \tfrac{n}{2}, \quad \tilde{n} = 6s - 2n, \quad \tilde{k} = k - n + 2s, \quad \tilde{k}' = k' - n + 2s, \tag{103}$$

где $0 \leqslant k, k' \leqslant n$. Сдвиги в $\tilde{k}$, $\tilde{k}'$ необходимы для того, чтобы выполнялось (44) (заметим, что $2s - n = \tilde{n} - 2\tilde{s} \geqslant 0$). Уравнение (102) проверяется непосредственно, если выполнить в (46) замену переменных (103) и использовать явные выражения (95)–(96). Это завершает доказательство. •

Список литературы

[1] Кулиш П. П., Решетихин Н. Ю., *Квантовая линейная задача для уравнения синус-Гордон и высшие представления*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **101** (1981), 101–110.

[2] Склянин Е. К., *О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга–Бакстера*, Функц. анал. и его прил. **16** (1982), №4, 27–34.

[3] Склянин Е. К., *Об одной алгебре, порождаемой квадратичными соотношениями*, Успехи мат. наук **40** (1985), №2, 214.

[4] Jimbo M., *A q-difference analogue of $U(gl(N+1))$ and the Yang–Baxter equations*, Lett. Math. Phys. **10** (1985), 63–69.

[5] Дринфельд В. Г., *Алгебры Хопфа и квантовое уравнение Янга–Бакстера*, Докл. АН СССР **283** (1985), №5, 1060–1064.

[6] Rosso M., *Finite dimensional representations of the quantum analog of the enveloping algebra of a complex simple Lie algebra*, Comm. Math. Phys. **117** (1988), 581–593.

[7] McGuire J. B., *Study of exactly soluble one-dimensional N-body problems*, J. Math. Phys. **5** (1964), 622–636.

[8] Yang C. N., *Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction*, Phys. Rev. Lett. **19** (1967), 1212–1315.

[9] Kulish P. P., Reshetikhin N. Yu., Sklyanin E. K., *Yang–Baxter equations and representation theory*. I, Lett. Math. Phys. **5** (1981), 393–403.

[10] Zamolodchikov A. B., Zamolodchikov Al. B., *Factorized S-matrices in two dimensions as the exact solutions of certain relativistic quantum field theory models*, Ann. Phys. **120** (1979), 253–291.

[11] Baxter R. J., *The inversion relation method for some two-dimensional exactly solved models in lattice statistics*, J. Statist. Phys. **28** (1982), 1–41.

[12] Kennedy T., *Solutions of the Yang–Baxter equation for isotropic quantum spin chains*, J. Phys. A **25** (1992), 2809–2817.

[13] Jimbo M., *Quantum R-matrix for the generalized Toda system*, Comm. Math. Phys. **102** (1986), 537–547.

[14] Temperley H. N. V., Lieb E. H., *Relations between the "percolation" and "colouring" problem and other graph-theoretical problems associated with regular planar lattices: some exact results for the "percolation" problem*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **322** (1971), 251–280.

[15] Kirillov A. N., Reshetikhin N. Yu., *Representations of the algebra $U_q(su_2)$, q-orthogonal polynomials and invariants of links*, Infinite-Dimensional Lie Algebras and Groups (Luminy–Marseille, 1988), Adv. Ser. Math. Phys., vol. 7, World Sci. Publishing, Teaneck, NJ, 1989, pp. 289–339.

[16] Nomura M., *Relations for Clebsch–Gordan and Racah coefficients in $su_q(2)$ and Yang–Baxter equations*, J. Math. Phys. **30** (1989), 2397–2405.

[17] Kulish P. P., Sklyanin E. K., *Quantum spectral transform method. Recent developments*, Lecture Notes in Phys., vol. 151, Springer, Berlin–New York, 1982, pp. 61–119.

[18] Faddeev L. D., *How the algebraic Bethe ansatz works for integrable models*, Symétries Quantiques (Les Houches, 1995), North-Holland, Amsterdam, 1998, pp. 149–219; [hep-th/9605187]

[19] Jones V., *On a certain value of the Kauffman polynomial*, Comm. Math. Phys. **125** (1989), 459–467.

[20] Ma Z. Q., *Yang–Baxter equation and quantum enveloping algebras*, Adv. Ser. Theoret. Phys. Sci., vol. 1, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1993.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
191023, Санкт-Петербург
наб. р. Фонтанки, 27
Россия
E-mail: bytsko@pdmi.vas.ru

Поступило 14 января 2005 г.