Fizmatclub.spb.ru Весна 2008

Д.С.Челкак. SLE (Schramm-Lowner Evolution), двумерные решеточные модели, голоморфные и гармонические функции на решетках.

SLE – это случайная кривая (т.е. вероятностная мера на пространстве кривых), заданная в односвязной области на плоскости с двумя отмеченными граничными точками. Этот объект (под названием Stochastic Lowner Evolution) был введен O.Schramm'ом [1] в 1999г. и, благодаря своей важности и "каноничности", практически мгновенно стал предметом активных исследований (за работы по этой тематике С.Смирнов был награжден премией института Клэя(2001), а W.Werner – медалью Филдса(2006)).

В курсе планируется обсудить две группы вопросов. Первая относится к самой конструкции SLE и включает в себя (по-видимому, лишь в обзорном(!) порядке): доказательство теоремы единственности, упомянутой выше [1]; простейшие свойства кривой (гельдеровость; простота/самокасание при $\varkappa < 4$, $\varkappa > 4$) [2]; обратимость/дуальность SLE [3],[4]; размерность кривой [5],[6]; естественные обобщения при наличии других выделенных точек на границе [7]. Поскольку доказательства всех этих результатов довольно сложны, глубина обзора будет меняться от темы к теме (почти никогда не доходя до полностью законченных рассуждений).

Вторая группа вопросов связана с доказательством(!) сходимости (в частности, существования предельной вероятностной меры на кривых при измельчении решетки) интерфейсов двумерных статистических решеточных моделей к SLE. На сегодняшний день этот предельный переход осуществлен лишь для нескольких моделей (перколяция на шестиугольной решетке [8], LERW/UST на квадратной [9], модель Изинга при критической температуре [10]). В частности, планируется обсудить:
– принцип конформного мартингала [10], лежащий в основе доказательств сходимости;
– возникающую теорию голоморфных функций на (квадратной) решетке;
– (только при удачном стечении обстоятельств) дискретные голоморфные функции в задачах "random domino tiling" (работы R.Kenyon'a [11]);
– теорию голоморфных функций на изорадиальных графах [11], [12];
– недавно полученное доказательство универсальности (т.е. независимости предела от конкретного вида решетки) модели Изинга на изорадиальных графах.

Идеальная аудитория - старшекурсники, аспиранты и все желающие узнать про эту современную область чуть больше и чуть более строго, чем это можно сделать на обзорных докладах. Для понимания необходимо уверенное знание базовых курсов ТФКП и ТВ (однако никаких знаний о решеточных моделях не предполагается). Из-за катастрофического недостатка образования у докладчика, обсуждение связей, например, с конформной теорией поля не планируется, акцент будет сделан на доказательствах в рамках самой теории SLE.

Курс непосредственно связан с двумя миникурсами С.Смирнова, читавшимися в рамках проекта `fizmatclub.spb.ru` в 2005 и 2006 г.г.

Список литературы

[LawlerBook]
G.F.Lawler: Conformally invariant processes in the plane. Math. Surveys Monogr. 114, AMS, Providence, RI, 2005. Preliminary version: `www.math.cornell.edu/~lawler/book.ps`

[WernerNotes]
W.Werner: Random planar curves and Schramm-Loewner evolutions. In Lectures on Probability Theory and Statistics. Lecture Notes in Math. 1840. Springer-Verlag, Berlin 2004, 107–195. Preliminary version: `arXiv:math/0303354v1`

Оригинальные работы:

[1] O.Schramm: Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees. Israel J. Math. 118 (2000), 221–288. `arXiv:math/9904022v2`

[2] S.Rohde, O.Schramm: Basic properties of SLE. Annals Math. 161 (2005), 879–920. `arXiv:math/0106036`

[3] D.Zhan: Revesibility of chordal SLE. `arXiv:0705.1852`

[4] J.Dubedat: Duality of Schramm-Loewner Evolutions. `arXiv:0711.1884`

[5] V.Beffara: The dimension of the SLE curves. `arXiv:math/0211322v2`

[6] G.F.Lawler: Dimension and natural parametrization for SLE curves. `arXiv:0712.3263v1`

[7] O.Schramm, D.B.Wilson: SLE coordinate changes. New York Journal of Mathematics, 11: 659–669, 2005. `arXiv:math/0505368v3`

[8] S.Smirnov: Critical percolation in the plane: conformal invariance, Cardy's formula, scaling limits. Comptes Rendus de l'Academie des Sciences Series I Mathematics, Volume 333, Number 3, 1 August 2001 , pp. 239–244(6). `http://www.math.kth.se/~stas/papers/percol.dvi`

[9] G.F.Lawler, O.Schramm, W.Werner: Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees. Ann. Probab. vol. 32, no. 1B, 939–995, 2004. `arXiv:math/0112234v3`

[10] S.Smirnov: Towards conformal invariance of 2D lattice models. International Congress of Mathematicians. Vol. II, 1421-1451, Eur. Math. Soc., Zurich, 2006. `arXiv:0708.0032v1`

[11] R.Kenyon: An introduction to the dimer model. `arXiv:math/0310326v1`

[12] C.Mercat: Discrete Riemann Surfaces and the Ising Model. Comm. Math. Phys. 218(1), 177–216, 2001.