第7章　微分方程式の対称

この章では, 変換群を用いて微分方程式の解法をする. 導関数や不定積分については既知とする.

7.1　常微分方程式

本書では, 微分方程式の一番簡単な例である**導関数に関して可解な次数 1 の常微分方程式**のみを扱う.

定義 41 微分方程式は, 次の形の方程式である*:*

$$y' = f(x, y). \tag{7.1}$$

ただし, y は x に依存する変数で, プライム $'$ は x に関する動関数を意味し, $f(x,y)$ は x と y の 2 変数関数で「十分よい (連続で微分可能)」ものと仮定する.

定義 42 方程式 *7.1* の**解**とは *7.1* に代入すると真の恒等式になる関数 $y = \phi(x)$ である. したがって, 任意の x の値に対して, 次の式が成り立つ*:*

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x)).$$

y が x にどのように依存するかに興味があるので, x を **独立変数**, y を**従属変数**とよぶことにする. 方程式 (7.1) は $dy/dx = f(x,y)$ とも書かれる. ただし, $dy/dx = y'$ で, dy, dx はそれぞれ, y, x の非常に小さい (“無限小の”) 増分である. この dy, dx を**微分**という.[1]

ここに微分方程式の例がある：

$$y' = y - x. \tag{7.2}$$

直接代入することによって, $y = x + 1$ と $y = e^x + x + 1$ はどちらも, 方程式 (7.2) の解であることが確かめられる.

常微分方程式理論の主な定理は, どのような微分方程式に対しても, その解の集合が 1-パラメーター族 $y = \psi(x, c)$ として表されることである. このような関数 $\psi(x,c)$ は与えられた方程式の**一般解**とよばれる. たとえば, 方程式 (7.2) の一般解は $y = ce^x + x + 1$ である. その一般解は $c = 0$ と $c = 1$ のとき, それぞれ特殊解 $y = x + 1$, $y = e^x + x + 1$ となる.

微分方程式の解の族 $\psi(x,c)$ は任意の 1 パラメーター関数族ではないことに注意しよう.

[1]現代的な立場からみると, 微分の概念は**微分形式**で形式化されているが, 本書ではそのことに触れないで, 17, 18 世紀の数学者に従って, 直感的意味での微分を扱う.

練習 159. 次の特殊解の組をもつ (1 次) 微分方程式は存在するか：
(a) $y = 0$, $y = 1$ (定数関数)；　(b) $y = 1$, $y = x$.

微分方程式 7.1 の右辺の関数 $f(x, y)$ は x, あるいは y, あるいは x, y 両方を自由にとれる. たとえば, 次のような方程式を考えることができる：

$$y' = 2, \tag{7.3}$$

$$y' = \cos x, \tag{7.4}$$

$$y' = y^2. \tag{7.5}$$

練習 160. 方程式 7.3, 7.4 の一般解を求めよ. また, 方程式 7.5 の特殊解を推測せよ.

方程式 7.3 と 7.4 は, その右辺が x だけに依存するような次の方程式の類に族する：

$$y' = f(x). \tag{7.6}$$

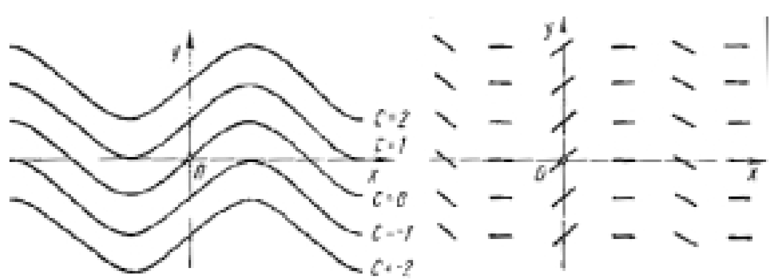
承知のように, このような方程式に対する一般解は不定積分

$$y = \int f(x)dx \tag{7.7}$$

によって求められる. ただし, 右辺は「定数を足して変わらない」ものと定義されている. もっと正確に言うと, $F(x)$ が $f(x)$ のある**原始関数**, すなわち $F'(x) = f(x)$ となる関数であるならば, 方程式 7.6 の一般解は次のように書かれる：

$$y = F(x) + C. \tag{7.8}$$

任意定数 C を含むこの式は, 方程式 7.6 のすべての解である. 関数 7.8 のすべてのグラフは交点がなく, (x, y) 平面全体を占める. たとえば, 方程式 7.4 の一般解は図 7.1a のグラフで表される.



a　　　　b

図 7.1: 微分方程式の解と方向場のグラフ

微分方程式の解の集合ばかりでなく, 微分方程式自身を幾何学的な対象として描くことができる. 方程式 $y' = f(x, y)$ が意味することは, 点 (x, y) における (わかっていない) 解のグラフの傾き (もっと正確には, 傾きの角の正接) は, わかている数 $f(x, y)$ に等しい

ということである．よって, 平面の任意の点 (x, y) における積分曲線 (ある解のグラフ) が通過する方向がわかる．結局次のことがわかる：**微分方程式 7.1 と関連する幾何学的対象は平面の方向場である．** 方向場は, いたるところで固定されていて平面上の任意の点に対してその点を通るある直線を定義している．

微分方程式の求積法の問題は, 幾何学的には次のように明確に述べられる：**平面上に方向場が与えられたとき, その与えられた場にいたるところで接する曲線すべてを求めよ．** このような曲線を方向場の**積分曲線**という．図 7.1, 7.2 はそれぞれ方程式 7.4 と 7.2 に対応する方向場と積分曲線の族を示している．

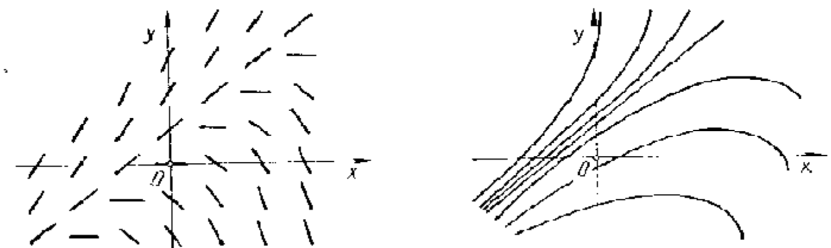


図 7.2: 別の微分方程式の解と方向場のグラフ

練習 161.　方程式 7.3, 7.5 に対する方向場と積分曲線族を描け．

練習 162.　図 7.3 に示されている方向場の積分曲線はなにか．また, この場は任意の微分方程式に対応してい

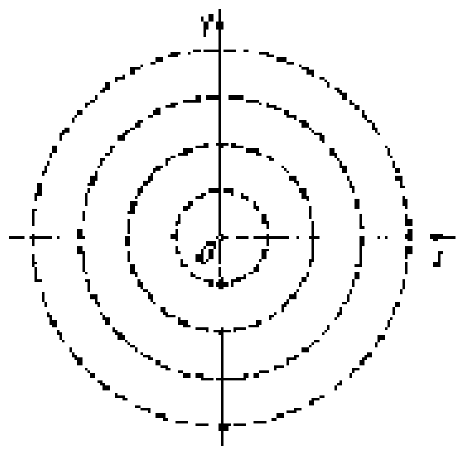


図 7.3: 平面上の方向場

不定積分だけを使って (y と独立な)7.6 式の形の方程式ばかりでなく, 次の形の方程式も求めることができる：

$$y' = f(x)g(y). \tag{7.9}$$

これは, 次の古典的な方法によって解かれる．y' を 2 つの微分の比 dy/dx とし (i.e. $y' = dy/dx$ とおく), 7.9 を書き直すと, 次のようになる：

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx. \tag{7.10}$$

みてわかるように, その変数は分離されている. すなわち, 左辺は y だけの関数, 右辺は x だけの関数である. このため, 7.9 の形の方程式を**変数分離形の方程式**という. 7.10 式の両辺を積分すると,

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx \tag{7.11}$$

となる (この方程式の右辺, または左辺は任意定数 C が含まれていると考える). これは, (7.9) 式の一般解を含む方程式である. したがって, y が x で表される関数ならば, 一般解を得ることができるのである.

問題 58 次の微分方程式の一般解を求めよ：

$$y' = (2x+1)/(3y^2). \tag{7.12}$$

解答. この方程式を微分で書き直すと, $3y^2\,dy = (2x+1)\,dx$ となる. その不定積分を求めると, $y^3 = x^2 + x + C$ を得る. ゆえに, $y = \sqrt[3]{x^2+x+C}$. これが 7.12 式の一般解である.

変数分離形の方程式 (7.9) の特別な場合は, その方程式の右辺がただ 1 つの変数 x, または y だけに依存するものである.

練習 163. 方程式 7.5 の一般解を求めよ.

7.2 変数変換

微分方程式と本書のメインテーマ—平面変換—との関係についての議論にうつろう.

微分方程式のいろいろな解法においてきわめて重要な役割を果たすのが**変数変換**である. 公式

$$\begin{cases} u = \varphi(x,y) \\ v = \psi(x,y) \end{cases} \tag{7.13}$$

に従って, 変数 x, y を新しい変数 u, v に変えると, 方程式 $y' = f(x,y)$ は, 別の方程式

$$v' = g(u,v) \tag{7.14}$$

に変わる. ただし, この「$'$」は x ではなく, u に関する導関数を意味している. このとき, もし, この方程式の変数が分離するならば, この方程式は解かれる. 7.13 式を用いて, 最初の変数に戻すと元の方程式の解が得られる.

これまで述べたことは, 最も簡単なものであるが積分法の大変有効なものである. すなわち変数分離形の方程式を導く変数変換をすることである.

問題 59 変数分離形の方程式に変えることによって, 方程式 $y' = y - x$ *(7.2)* を解け.

解答. 次の変数変換をしよう：

$$\begin{cases} u &= x \\ v &= y - x - 1. \end{cases}$$

$u = x$ であるから, u に関する導関数は x に関する導関数である. よって, どちらも「$'$」で表して, 混乱は起こらない. 次に, $y' = v' + 1$ であるから, これを与えられた方程式に代入すると, 方程式 $v' = v$ を得る. これは変数分離形の方程式で, 一般解 $v = Ce^u$ をもつ. 変数 x, y に戻すと, 初めの方程式の一般解 $y = Ce^x + x + 1$ が得られる.

練習 164. 方程式 $y' = y^2 + 2xy + x^2 - 1$ を変数分離形の方程式に変える変数変換を求めよ.

変数変換の公式 7.13 は, 次の 2 つの幾何学的な意味をもつ.

1. x, y を平面上のある点のデカルト座標点とみなすと, u, v は別の曲線座標系の同じ点の座標とみることができる. たとえば, 公式

$$\begin{cases} u &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ v &= \arctan \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

または, 同値な公式

$$\begin{cases} x &= u \cos v \\ y &= u \sin v \end{cases}$$

は極座標系 (u, v) を導入する.

2. 点 (x, y) を点 (u, v) $(u = \varphi(x, y),\ v = \psi(u, v))$ にうつす平面変換を扱うこととして考えられる. この場合, すべての座標は 1 つの同じ座標系で計算される. この変換を視覚的にわかりやすくするためには, 2 つの座標軸 $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ の像を描くといいだろう.

7.3 Bernoulli 方程式

微分方程式に変数変換を応用した最初の歴史上の人物は, 多分, **Johann Bernoulli** であろう. 彼は, 微分方程式

$$y' = Ay + By^n, \tag{7.15}$$

を解いた (この方程式は現在彼の名前がつけられている). ただし, A, B は与えられている x 変数関数である. 彼は, この方程式をもっと簡単な次の**線形**方程式に還元しようとした：

$$y' = Py + Q, \tag{7.16}$$

ただし, P, Q は x の関数である.

まず, その線型方程式の解法の仕方を説明しよう. わからない関数 y を $y = uv$ とおく. ただし, u, v は, わかっていない x 変数関数である. これを方程式 7.16 に代入すると, 次の式を得る：

$$u'v + uv' = Puv + Q.$$

2つの関係 $u' = Pu$, $v' = Q/u$ が成立するならば, この方程式はみたされる. 最初の方程式は, 変数分離形の方程式である. よって, 関数 $u(x)$ は, 求められる. その $u(x)$ を二番目の式 $v' = Q/u$ に代入すると, 簡単な積分法で $v(x)$ を求めることができる. このように, 解 $y = u(x)v(x)$ を得るのである.

練習 165. 次の方程式の一般解を求めよ：

$$y' = 2\frac{y}{x} - x^3 + x.$$

問題 60 *Bernoulli 方程式 7.15 を線形方程式 7.16 に変える変換を求めよ.*

解答. 方程式 7.15, 7.16 は従属変数 y の指数の値だけが異なっている. よって, $y = v^k$ という形の変換を試すのが自然だろう (これは独立変数 x を変えない). (7.16) 式に, $y = v^k$ を代入すると

$$kv^{k-1}v' = Av^k + Bv^{kn},$$

または

$$v' = \frac{A}{k}v + \frac{B}{k}v^{kn-k+1}.$$

となる. $k = 1/(1-n)$ とすると, 指数 $kn - k + 1$ は 0 になり, 上記の方程式は線型方程式になる. よって, 求める変換は $y = v^{1/(1-n)}$ であることがわかる.

練習 166. 次の方程式の一般解を求めよ：

$$y' = \frac{xy^2 + 1}{2y}.$$

練習 160 が解けた (または, この本の終わりの答えをみた) 読者は, その解が初等関数で閉じた式として, 従来の公式では得られないという事実に戸惑うかもしれない. したがって, **求積法**について少し述べなければならない. 関数

$$\int e^{-x^2/2}dx,$$

は, 初等関数 (多項式, 三角関数, 対数関数や, 指数関数の組合せの関数) ではないけれども, 実は, 初等的な関数とほとんど同じくらい良いものである. この数値は任意の次数

の精度で計算機で求められ, その性質は良く知られている (実際, この関数は確立論や統計学で広く用いられている). 同様なことが任意の初等関数の積分にもいえる. このことは, 次の重要な概念の基礎となっている.

微分方程式は, その一般解が初等関数, 不定積分, 逆関数の式で書けるとき, **求積法で解ける**という.

求積法で解けない方程式の最も簡単な例は, 次の方程式である：

$$y' = y^2 + x.$$

(この事実は1841年, J.Liouville によって証明された). この方程式は, いわゆる **Riccati 方程式**

$$y' = a(y^2 + x^n) \tag{7.17}$$

の特別な場合である.

練習 167. Riccati 方程式 7.17 の $n = 0$ のときの一般解を求めよ.

1742年に D.Bernoulli と J.Riccati は, 方程式7.17が求積法で解ける媒介変数 n の値の離散列を発見した. これは, 大変すっきりとしたトリックで証明された. 実は, 変換からなる巡回群を用いて証明された (あとで少し説明する). このアイデアは, 方程式7.17を同じ形であるが異なる指数 n をもつ方程式に変える変数変換をみつけ, $n = 0$ の場合 (このとき, 練習 167からわかるように, (7.16) 式は求積法で解ける) に帰着させることだった. 次のこのことについて説明しよう.

まず, 次のように従属変数を変えてみよう：

$$y = \frac{1}{x^2 v} - \frac{1}{ax}.$$

この式を方程式7.17に代入して整理すると, v に関する次の方程式を得る：

$$v' = a\left(-\frac{1}{x^2} - x^{n+2}v^2\right), \tag{7.18}$$

ただし, 「$'$」は, 以前と同様, x に関する導関数を意味する.

これは, もはや Riccati 方程式ではないが, 規則[2] $u = x^{n+3}$ (または, $x = u^{1/(n+3)}$) に従って独立変数 x を変えると, Riccati 方程式になる. 事実, 連鎖律によって次のようになる：

$$v' = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{du}\frac{du}{dx} = \frac{dv}{du}(n+3)x^{n+2} = (n+3)u^{\frac{n+2}{n+3}}\frac{dv}{du}.$$

この変換後, 簡単な計算で方程式7.18は次の式になる：

$$\frac{dv}{du} = -\frac{a}{n+3}\left(v^2 + u^{-}\frac{n+4}{n+3}\right).$$

[2]Bernoulli と Riccati によって発見された変換を引用するだけである. 彼らが**どのようにして**それらを発見したのかは誰も知るよしもない!

この式は Riccati 方程式であるが, 指数 n のところが $-(n+4)/(n+3)$ になった Riccati 方程式である.

たとえば, $n=-4$ である方程式ならば, この変換のあと, $n=0$ である方程式を得る—それは, 求積法で解ける方程式である. したがって, $n=-4$ である Riccati 方程式もまた求積法で解けることがわかる.

練習 168. 方程式 $y'=y^2+x^{-4}$ の一般解を求めよ.

練習 169. Riccati 方程式が求積法で解ける n のもう 1 つの値を求めよ.

これらの結果を踏まえて, 一般的な定理にしよう. 我々はもう **Riccati 方程式が指数 m に対して求積法で解けるならば, それは** $-(n+4)/(n+3)=m$ **i.e.** $n=-(3m+4)/(m+1)$ **となる指数 n に対しても求積法で解ける**ことは知っている.

このことを踏まえて次の分数線形関数を考えよう：

$$q(m)=-\frac{3m+4}{m+1}.$$

したがって, Riccati 方程式 7.17 が指数 m に対して求積法で解けるならば, それは値 $q(m)$ に対しても解けることになる. その変換を繰り返すと, 指数 $q(q(m))$, $q(q(q(m)))$ に対して, そして一般に $q^k(m)$ に対して求積法で解けることが推測できる. ただし, q^k は変換 q の k 乗である.

練習 170. $q^k(m)$ の式を求めよ.

逆変換 q^{-1} にも, 同じ性質があることに注意しよう. すなわち変換 q^{-1} も「求積法で解ける指数」を「求積法で解ける指数」にうつす変換である. このように, 分数線形変換 q によって生成される無限巡回群が得られる. この無限巡回群は, 実数全体の集合 (Raccati 方程式の指数) に作用する. 求積法で解ける Ricatti 方程式の性質は, この作用の不変量である. したがって, その作用による任意の軌道は, その方程式が求積法で解けるべき指数で完全に構成されているか, あるいはその方程式が求積法で解けないようなべき指数だけを含んでいるかのどちらかである.

とくに, 数 0 の軌道は, 求積法で解ける Riccati 方程式の無限列を与える. それらのべき指数は

$$q^k(0)=\frac{4k}{1-2k}\quad(k\in\mathbb{Z})$$

である. $k\to\infty$ のとき, $q^k(0)\to-2$ となることに注意しよう.

練習 171. Riccati 方程式 7.17 は $n=-2$ に対しても求積法で解けることを証明せよ.

しかしながら「求積法で解ける」べき指数 $n=-2$ から始めると, $n=2$ 以外の求積法で解けるべき指数はみつけられない. なぜなら, -2 は q の不動点だから, 軌道はただ 1 点で構成されるからである.

結局, Riccati べき指数の集合において, 求積法で解ける 2 つの軌道をみつけた. J. Liouville は, この他の残されたすべての値に対して, Riccati 方程式が求積法で解けないことを証明した.

7.4 点変換

これまで, 次の形の変数変換だけを扱ってきた：

$$\begin{cases} x &= \varphi(u) \\ y &= \psi(u,v). \end{cases} \tag{7.19}$$

つまり, 独立変数 x は新しい従属変数 u だけで表されている. このとき, 連鎖律 $dy/dx = dy/du \cdot du/dx$ により, 導関数 dy/dx を u, v, du/dv の式で表すのは易しい.

しかし, 任意の変換 $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$ を考えることができる (**点変換**という). この場合の導関数 dy/dx に対する変換公式を導くためには, **偏導関数**の概念が必要である.

定義 43 $z = h(x,y)$ を *2* 変数関数とする. このとき, y の値が $y = y_0$ と固定されているならば, z は *1* 変数関数 $z = h(x,y_0)$ になる. この $z = h(x,y_0)$ の点 x_0 における導関数を**関数** $h(x,y)$ **の点** (x_0,y_0) **における** x **に関する偏微分係数**といい, $\frac{\partial h}{\partial x}(x_0,y_0)$ と表す. 記号的には次のように定義される：

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{dh(x,y_0)}{dx}|_{x=x_0} = \lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{h(x_0+\varepsilon,y_0)-h(x_0,y_0)}{\varepsilon}.$$

問題 61 関数 $z = \sqrt{9-x^2-y^2}$ の点 $(2,1)$ における x に関する偏微分係数を求めよ.

> **解答.** z に $y = 1$ を代入すると, 1 変数関数 $z = \sqrt{8-x^2}$ になる. よって, $z_x = -x/\sqrt{8-x^2}$. ゆえに
>
> $$\frac{\partial z}{\partial x}(2,1) = -1.$$

点 (x_0,y_0) が変化すると, $\frac{\partial}{\partial x}(x_0,y_0)$ の値は変数 x_0, y_0 の関数になる. 具体的な座標 (x_0,y_0) の代わりに, 記号 (x,y) を用いると, この関数は変数 x,y の関数となり, $\partial z/\partial x$, またはただ単に, z_x と表される. これを z の x に関する**偏導関数**という. たとえば, 関数 $z = \sqrt{9-x^2-y^2}$ の x に関する偏導関数は, 次のようになる：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}.$$

変導関数 z_x を計算するためには, $z(x,y)$ を x について微分しなければならない. このとき, 変数 y は任意の定数として扱われる.

y に関する偏導関数も同様に定義される. 同じように, x を定数として扱う. したがって, 関数 $x = \sqrt{9-x^2-y^2}$ の y に関する偏導関数は, 次のようになる：

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}.$$

さて, 導関数の幾何学的意味を説明しよう. 点 $(x,y,z(x,y))$ すべてから構成される 3 次元空間内の曲面を考えよう—この曲面を, 与えられた 2 変数関数の**グラフ**という. 図 7.4 は関数 $z = \sqrt{9-x^2-y^2}$ のグラフである.

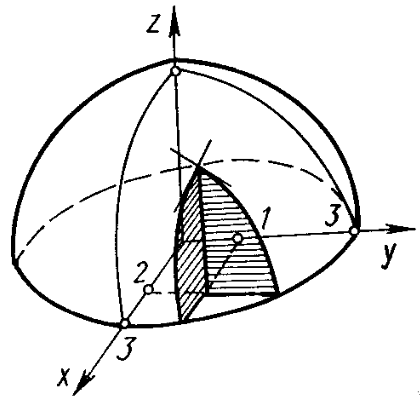


図 7.4: 偏微分

ある 2 変数関数の曲面 M とその領域内の点 (x_0, y_0) が与えられているとする．このとき, 平面 $y = y_0$ を描いてみよう．平面 $y = y_0$ は, $y = y_0$ 上のある平面曲線に沿って曲面 M を切っている．この曲線の点 (x_0, y_0) における接線の傾きが $z_x(x_0, y_0)$ である．

一方, $z_y(x_0, y_0)$ は, 平面 $x = x_0$ による曲面 M の切り口における接線の傾きである．図 7.4 は, 関数 $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ の点 $(2, 1)$ における両方の切り口と接線を示している．

その 2 接線を通る平面は, その関数のグラフの与えられた点における

接平面となり, その方程式は

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0), \tag{7.20}$$

となる．ただし, $z_0 = h(x_0, y_0)$, $p = \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0)$, $q = \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0)$ である．事実, $x = x_0$ を 7.20 に代入すると, y の関数とみられる $h(x_0, y)$ のグラフの接平面の方程式を得る．また, $y = y_0$ を代入すると, $h(x, y_0)$ に対する同様の方程式を得る．

点 (x, y) は, (x_0, y_0) に十分近いところにあるならば, M 上の点 $(x, y, h(x, y))$ と接平面 (7.20) 上の点 $(x, y, p(x - x_0) + q(y - y_0) + z_0)$ は, 互いに大変接近していることになる．したがって, 独立変数 (x_0, y_0) が (x_0, y_0) に動くとき, この動き (シフト) が非常に小さいならば, 7.20 式によって計算できる差 $z - z_0$ は, $h(x, y)$ の増分とみなされることができる．このとき, 3 変数 x, y, z の無限小の増分をそれぞれ dx, dy, dz と表すと, 次のように書くことができる：

$$dz = z_x dx + z_y dy. \tag{7.21}$$

(**2 変数関数の全微分**の公式)

さて, 変数 x, y をそれぞれ, 次の任意の点変換の像

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases} \tag{7.22}$$

とするとき, dy/dx を u, v で表してみよう．$y' = dy/dx$, $v' = dv/du$(この「$'$」は, それぞれ異なる意味をもつことに注意!) とすると, 7.21 より次のように表される：

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y_u du + y_v dv}{x_u du + x_v dv} = \frac{y_u + y_v \frac{dv}{du}}{x_u + x_v \frac{dv}{du}} = \frac{y_u + y_v v'}{x_u + x_v v'}. \tag{7.23}$$

したがって, 導関数 y' は u と v に依存する係数をもつ v' の分数線形関数, すなわち v' の射影変換として表されることがわかる (6.2 参照). ところで, この注目すべき事実は, 射影幾何学と常微分方程式の間の深い関係を導く. しかし, 本書ではそのことについて議論しない.

以前注意したように, 7.22 式は平面上のある座標系から別の座標系への変換, あるいは $(u, v) \mapsto (x, y)$ による平面からそれ自身への写像とみなされる. 後者の場合において, 7.23 式は平面曲線の傾きがこの写像でうつすことによってどのように変化するかを表している (図 7.5 参照). すなわち v' は与えられた曲線に対する水平線からの角の正接で, 一方, y' はこの曲線の像に対する同様の角の正接である.

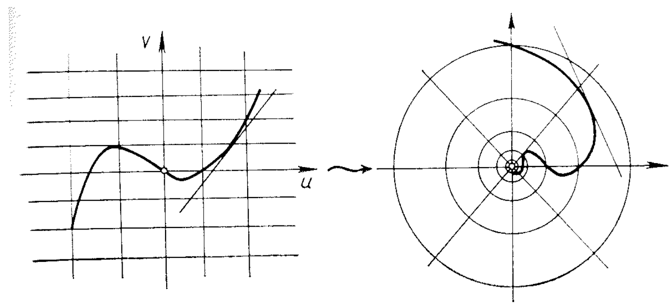


図 7.5: 点変換

方向 (直線) が付随した平面上の点を**コンタクト元**という. コンタクト元は, 3 つの数 (x, y, p) によって表される. ただし, (x, y) は平面上の与えられた点の座標で, p はその直線の傾き (その直線と水平軸となす角の正接) である. このように, すべてのコンタクト元の集合は, 3 次元空間を形成する. これを**コンタクト空間**という. その要素のいくつかは, 図 7.6 に示されている.

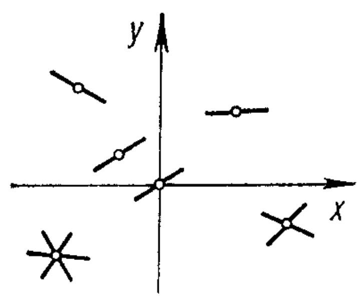


図 7.6: コンタクト元

7.23 式は 7.22 式とともに, コンタクト空間のある変換を定義している. また, それは 7.22 式だけで与えられる平面変換に対応する微分方程式である.

問題 62 円 $x^2 + y^2 = 1$ に関する反転に対応するコンタクト元の空間の変換を求めよ.

解答. その反転を施すと, (x,y) は次の (u,v) にうつる：

$$\begin{aligned} u &= \frac{x}{x^2+y^2} \\ v &= \frac{y}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

これらの関数の導関数は：

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad u_y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ v_x &= \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad v_y = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

であるから, これを 7.23 式に代入すると次のようになる：

$$v' = \frac{v_x + v_y y'}{u_x + u_y y'} = \frac{(x^2-y^2)y' - 2xy}{-2xyy' + y^2 - x^2}. \tag{7.24}$$

この結果の系として, 次のような定理を証明することができる. これは, 練習 153 の主張の一般化である (p.136).

定理 18 平面の反転は曲線どうしのなす角を保存する.

証明 2 曲線のなす角は, 定義よりその曲線の接線どうしのなす角である. (x,y)–平面上の 2 曲線の傾き角の正接が p_1 と p_2 であるとき, その曲線どうしのなす角 α は

$$\tan\alpha = \frac{p_1 - p_2}{1 + p_1 p_2}.$$

となる.

q_1, q_2 をその 2 曲線の反転による像の正接, β をそれらのなす角とすると, 次の式が成り立つ：

$$\tan\beta = \frac{q_1 - q_2}{1 + q_1 q_2}. \tag{7.25}$$

式 7.24 より

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{ap_1 + b}{bp_1 - a} \\ q_2 &= \frac{ap_2 + b}{bp_2 - a} \end{aligned}$$

となる. ただし a, b は点 (x,y) に依存する定数である.

この式を方程式 7.25 に代入すると

$$\tan\beta = \frac{\dfrac{ap_1+b}{bp_1-a} - \dfrac{ap_2+b}{bp_2-a}}{1 + \dfrac{ap_1+b}{bp_1-a}\dfrac{ap_2+b}{bp_2-a}} = -\frac{p_1-p_2}{1+p_1p_2} = -\tan\alpha,$$

となる. この等式は, 反転によって角は保存されるが, 平面の方向は変わることを意味している.

次に, 一般的な点変換を用いて微分方程式を解法する例をあげよう.

問題 63 次の微分方程式を解け：

$$y' = \frac{(y^2 - x^2)\left(x^2 + (x^2+y^2)^2\right) + 2\,xy\left(y^2 + (x^2+y^2)^2\right)}{2\,xy\left(x^2 + (x^2+y^2)^2\right) + (x^2 - y^2)\left(y^2 + (x^2+y^2)^2\right)}.$$

解答. 次の変数変換を行う：

$$\begin{aligned} x &= \frac{u}{u^2+v^2} \\ y &= \frac{v}{u^2+v^2} \\ y' &= \frac{(u^2-v^2)v' - 2uv}{-2uvv' + v^2 - u^2}. \end{aligned}$$

上の式を与えられた方程式に代入し, 整理すると次のようになる：

$$v' = \frac{u^2+1}{v^2-1}.$$

したがって, これらの変数を分離すると, $(v^2-1)dv = (u^2+1)du$ となるから, それを解くと一般解は次のようになる：

$$\frac{v^3}{3} = \frac{u^3}{3} + C.$$

変数を (x, y) に戻すと,

$$y^3 - x^3 = 3(x+y)(x^2+y^2)^2 + C(x^2+y^2)^3$$

となる. C は任意の定数である.

練習 172. (a)(x, y) をデカルト座標, (r, φ) をその平面上の極座標とする. このとき, $dr/d\varphi$ を dy/dx を用いて求めよ. (b)(a) の結果を使って, 微分方程式 $yy' + x = (x^2+y^2)(xy' - y)$ を解け.

7.5 1-パラメーター群

定義 44 平面変換の *1-パラメーター群*とは平面上への加群 $\mathbb{R}$ のある作用である.

これは任意の実数 t に対して, ある変換 g_t が次のように定義されていることと同値である：**任意の組** $s, t \in \mathbb{R}$ **に対して, 方程式** $g_t \circ g_s = g_{t+s}$ **が成り立つ. 言い換えると, 群** $\mathbb{R}$ **から平面変換群への準同型を扱うのと同じである**. このとき, $\{g_t\}$ を平面上の**変換の 1-パラメーター群**という. 1-パラメーター群は, 単なる集合 $\{g_t\}$ ではなく, パラメーター表示 $t \mapsto g_t$ をもつ集合であることを力説したい.

自明でない 1-パラメーター群の一番簡単な例は, 平行移動の群である. たとえば, Ox 軸方向の平行移動では, g_t はベクトル $t\mathbf{e}_1$ の移動である. ただし, $\mathbf{e}_1$ は水平方向の単位ベクトルである.

練習 173. 1-パラメーター群に属している任意の 2 つの変換は, 可換であることを証明せよ.

1-パラメーター群は 3 変数関数の組として座標で表される：

$$\begin{cases} x_t &= \varphi(x,y,t) \\ y_t &= \psi(x,y,t). \end{cases} \tag{7.26}$$

ここで, (x,y) は平面上の任意の点の座標で, (x_t,y_t) は変換 g_t によるその像の座標である. t の値が固定されると, 具体的な変換を定義する 2 変数関数の組を得る.

群の法則, すなわち関係式 $g_t \circ g_s = g_{s+t}$ は, 次のように関数 φ, ψ によって表される：

$$\begin{cases} \varphi(\varphi(x,y,s),\psi(x,y,s),t) = \varphi(x,y,s+t) \\ \psi(\varphi(x,y,s),\psi(x,y,s),t) = \psi(x,y,s+t). \end{cases} \tag{7.27}$$

この式は, 座標で表された 1-パラメーター群の定義である.

たとえば, 水平方向の移動で構成される群は次の関数によって表示できる：

$$\begin{cases} x_t &= x+t \\ y_t &= y \end{cases}$$

この式は関係式 7.27 を明らかにみたしている.

練習 174. ある点を中心とする正係数の相似拡大変換全体の集合は, 1-パラメーター群であるか.

用心深い読者は, 練習 174 の問題が正しくだされていないことに気がつくだろう. なぜなら, 1-パラメーター群は与えられた変換の集合上に, あらかじめ固定されたパラメーター表示を仮定しているからである. もし, 任意の数 $t \in \mathbb{R}$ に, 引き伸ばし係数 t の相似変換を割り当てるなら, 1-パラメーター群は得られないだろう. なぜならば, 係数 s と t の相似変換の合成は, 係数 $s+t$ の相似変形ではなく, 係数 st の相似変形であるからである. 幸いにも, 和を積に変えるトリックを知っている. すなわち, 指数関数を用いる. 数 t に, 係数 e^t の相似変形を割り当てると, まぎれもなく, 1-パラメーター群を得る. 原点に相似変形の中心をおくと, 次のような関数によって, 群を記述することができる：

$$\begin{cases} x_t &= e^t x \\ y_t &= e^t y. \end{cases}$$

関係式 7.27 は明らかに成り立つ.

1-パラメーター群は, その軌道の集合によって視覚的にみられることができる. 図 7.7 は, すでに述べたことのある 2 つの群–移動と相似変換–の軌道を表している.

気をつけなければならないことは, 軌道の集合は, 1-パラメーター群を一意的には定義しないことである. この簡単な例は, 2 倍の速さの移動

$$\begin{cases} x_t &= x+2t \\ y_t &= y \end{cases}$$

の群によって与えられる. この群の軌道は, 以前議論した (図 7.7a で示される) 移動の群の軌道と同じである.

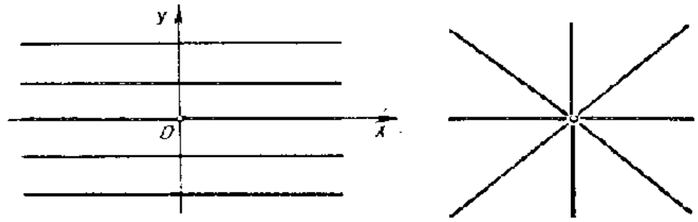


図 7.7: 移動と相似変換の 1-パラメータ群の軌道

練習 175. 1 点を中心とする回転の 1-パラメーター群を定義せよ. また, その座標を表示し, 軌道を描け.

練習 176. 次の関係式は, 1-パラメーター群を定義することを確かめよ：

$$\begin{cases} x_t &= e^{at}(x\cos bt - y\sin bt) \\ y_t &= e^{at}(x\sin bt + y\cos bt) \end{cases}$$

また, この式の幾何学的な意味を述べ, 軌道を描け.

練習 177. x_t, y_t を次の関数 w の 2 次方程式 の根とせよ：

$$(w-x)(w-y)+t=0.$$

ただし, x_t, y_t は, x, y, t の 3 変数の関数とする. このとき, 関数 x_t, y_t は変換の 1-パラメーター群を定義することを証明せよ. また, その軌道を描け.

7.6 微分方程式の対称

微分方程式は, 平面上の方向場としてみられるが, 対称をもつことがある. 図 7.1b をみてみると, この方向場は, Oy に沿った任意の平行移動で変化しないことがわかる. また, Ox に沿って全体を 2π 倍する平行移動でも変化しない. 前者の種類の変換は, 1-パラメーター群 $x_t = x$, $y_t = y + t$ を形成する. 後者の種類の変換は, 離散巡回群を形成する (1 参照).

微分方程式の対称からなる 1-パラメーター群がわかれば, 求積法によってその方程式の一般解を求めることができる.

完全な定義をするため, 微分方程式

$$y' = f(x,y) \tag{7.28}$$

と平面変換

$$\begin{cases} x &= \varphi(u,v) \\ y &= \psi(u,v) \end{cases} \tag{7.29}$$

が与えられているとする.

7.23 より, $y' = dy/dx$ を u, v, $v' = dv/du$ を用いて表すことができる.

定義 45 この代入のあと, 変数 u, v, v' に対する同じ方程式

$$v' = f(u, v)$$

を得るなら, この変換 *7.29* を, 与えられた微分方程式 *7.28* の**対称**という.

幾何学的には, これは, 7.22–7.23 によって与えられたコンタクト空間の変換が, 与えられた方向場に属するすべてのコンタクト空間における曲面を保存することを意味する.

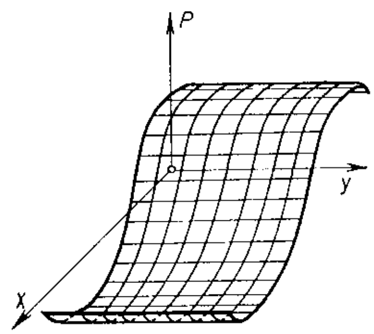


図 7.8: 3 次元空間のなかの曲面としての微分方程式

図 7.8 は, 微分方程式 $y' = \cos x$ に対するこのような曲面を示している. 2 つの変換

$$\begin{aligned} x_t &= x \\ y_t &= y + t \\ p_t &= p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_t &= x + 2 \\ y_t &= y \\ p_t &= p \end{aligned}$$

は, この曲面をこの曲面にうつすことがわかる.

微分方程式と 1-パラメーター群の相関関係について, 2 つの主な問題がある：

1. 微分方程式が与えられているとする. このとき, その対称で構成される群をすべて (または, いくつか) 求めよ.
2. 平面で構成される 1-パラメーター群が与えられているとする. このとき, この群によって保存される, すなわちその群がその微分方程式の対称からなるような微分方程式のすべて (または, いくつか) を求めよ.

(微分方程式を解く) 練習のためには, 前者の問題は後者の問題より重要である. しかし, 前者に答えるのは非常に難しい. したがって, まず後者の問題から考えよう.

2 つの簡単な例から始める. 答えは明らかである：

- x-移動の群によって保存される一般的な方程式は次である (7.5 参照)：

$$y' = f(y). \tag{7.30}$$

- y-移動の群によって保存される一般的な方程式は, 次である (7.4 参照)：

$$y' = f(x).$$

もっとおもしろい群の例をみてみよう.

問題 64 $(0,0)$ を中心とする ((x,y) 平面の) の回転群によって変化しない微分方程式の一般形を求めよ.

解答. 角 α の回転で, 任意のコンタクト元は付属した点とともに動き, 同じ角 α で回転する (図 7.9).

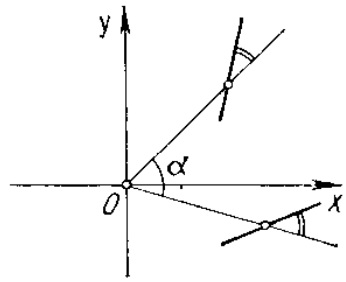


図 7.9: コンタクト元上の回転の作用

よって, それと点 (x,y) の半径ベクトルがなす角は, 変化しない. このように, 方向場 (=微分方程式) が回転の群のもとで変わらないための必要十分条件は, 場の方向と半径ベクトルとのなす角が, 原点からの距離に依存しないことである. 角の代わりに, 角の正接をとり, 距離の代わりに, 距離の二乗をとることができる. 2 つの角の差の正接に対する公式を用いると, 次の公式を得る. これは, 原点を中心とする回転群の方程式の一般形である：

$$\frac{xy' - y}{yy' + x} = f(x^2 + y^2).$$

y' に関してこれを解くと, 次の答えを得る：

$$y' = \frac{xf(x^2+y^2) + y}{x - yf(x^2+y^2)}. \tag{7.31}$$

練習 178.　相似変換の 1-パラメーター群を与える微分方程式をすべて求めよ.

練習 179.　練習 176 で述べられた螺旋相似変換の 1-パラメーター群を与える微分方程式をすべて求めよ.

7.7　対称による方程式の解法

この節では次の事実を証明する：

『ある微分方程式の対称で構成される 1-パラメーター群がわかっているとき, その微分方程式は変数変換によって変数分離形の微分方程式に変えることができる—よって, その一般解は求積法で求められる.』

変数が分離する新しい座標系をみつけるために, 1-パラメーター群の**不変量**を用いる. そこでまずその不変量のいくつかの性質を述べたあと, いくつかの例を考えよう. 群の作用の不変量は, 軌道上で定数関数であることを思いだそう (5.6 節参照). 言い換えると, ある関数が不変量であるとは, その関数がその群の変換によってうつり合う任意の 2 点で同じ値をとることである. 簡単な例をあげよう. y の任意の関数は Ox に沿っての移動で構成される 1-パラメータ群の不変量である. 関数 y はそれ自身この群の作用に対する普遍 (完全) 不変量である. なぜならば, その軌道上の値はすべて異なるからである.

同様に, 関数 x は軸 Oy 方向の移動で構成される群の普遍不変量である.

原点以外の平面に作用する中心 0 の相似変換で構成される群の完全不変量は何か？ それは, 偏角 φ であると考えたいかもしれない. 実際, 偏角 φ は原点から発する任意の光線 (半直線) のすべての点において, 同じ値をとり, 異なる光線はその関数の異なる値に対応している. しかし, φ は点のふつうの 1-価関数ではない. たとえば, 点 $(-1, 0)$ には, 同じ結果をもつ値 $180°$, $-180°$(そして, 無限個の他の値) を割り当てることができる. もちろん φ を 1-価関数にすることはできる. たとえば, $0° \leq \varphi < 360°$ と約束すればよい—しかし, このとき, φ は不連続関数になる. 事実, 相似変換からなる群に対しては, どのような実数値連続関数も完全不変量とならない. しかし, 多くの部分的な不変量をもつ. たとえば, 関数 y/x は領域 $x \neq 0$ で定義されているが, それはその定義領域上で連続な不変量である.

練習 180. 原点の回りの回転で構成される群の不変量を求めよ. また, この群に対して, 連続実数値関数の完全不変量は存在するか.

1-パラメーター群の不変量を求める 2 つの方法がある：

1. **正式な求め方** 1-パラメーター群が 7.26 の関数の組として座標で与えられているとすると, その不変量は $\varphi(x, y, t)$ と $\psi(x, y, t)$ で組み合わされた, 変数 t を含まない関数である. すなわち t に依存しない関数 $h(\varphi, \psi)$ である.
2. **幾何学的な求め方** 平面上のちょうど 1 点で, 1-パラメーター群の任意の軌道と交わる曲線 K を描く (図 7.10 参照). この曲線上の異なる点で異なる値をとる関数をえらび, その関数を次のルールで平面すべてに拡張する：その関数の任意の点 A の値は A の軌道が曲線 K と交わる点 B での値に等しくなるように定められている.

問題 65 次の *1-*パラメーター群の不変量を求めよ：

$$\begin{cases} x_t &= x + t \\ y_t &= e^t y. \end{cases}$$

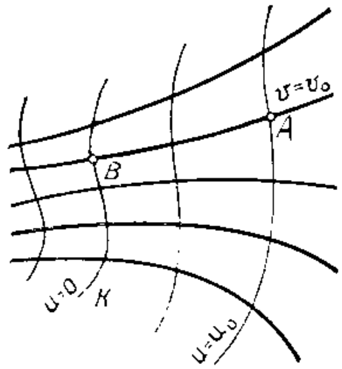


図 7.10: 1-パラメータ群の不変量

解答. **正式な方法**. しばらく上の式を眺めると, 組み合わされた式 $e^t y \cdot e^{x+t} = ye^{-x}$ は t に依存しないことがわかる. したがって, 式 ye^{-x} はその群のある不変量である.

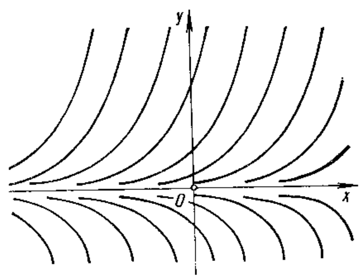


図 7.11: 問題 65 の群の軌道

幾何学的方法. 群の軌道は図 7.11 に示されている. 座標軸 Oy は任意の軌道と 1 点で交わっている. そこで Oy を曲線 K としてえらぶことができる. 関数 $v(0,y) = y$ は Oy の異なる点で異なる値をとるから, 群の軌道に沿って関数 $v(0,y) = y$ を平面全体に拡張することを考える.

$A(x,y)$ を平面上の任意の点とし, $B(0,v)$ を y-軸と対応する軌道との交点とする. このとき, 群の方程式から, $x = t$, $y = e^t v$ となる数 t が存在することがわかる. したがって, $v = ye^{-x}$. よって, 不変量は ye^{-x} である.

練習 181. 螺旋相似変換 (練習 176) で構成される群の自明でない不変量を上記の 2 つの方法で求めよ.

最後に, 既知の対称の変換群をもつ微分方程式を解法する問題にとり組もう. 最初の方針は, 新しい座標にうつし, その座標での関数の 1 つがその群の不変量であるようにすることである. このような変換のあと, 微分方程式の変数は分離することが実によく

あるのである (かといって, いつも分離するとは限らない). このとき, その変数分離形の方程式は求積法で求まる. よく使われる例を考えよう.

問題 66 次の微分方程式の一般解を求めよ：

$$y' = f(y/x). \tag{7.32}$$

解答. このような方程式を**同次形**という. 練習 178 からわかるように, 同次形の方程式は, 中心 $(0, 0)$ の相似変換の 1-パラメーター群に関する不変量となる. 関数 y/x は, この群の不変量であるので新しい従属変数として y/x をとってみる. それは独立変数 x を変えないものである. このように, $v = y/x$ または $y = xv$ とおくと, $y' = v + xv'$ となり, これを方程式 7.32 に代入すると, 次を得る：

$$v' = \frac{f(v) - v}{x}.$$

これは変数分離形の方程式である.

練習 182. 問題 64 の議論を続けて, 具体的な方程式 $y' = 1 + 2y/x$ の答えを求めよ.

練習 183. 方程式 7.32 の変数は, 極座標で表されると変数分離形の方程式となるか.

練習 184. 問題 66 の議論を次の形の方程式に適用せよ：

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right).$$

強調しなければならないことは, 群の不変量を新しい従属変数にしても, もとの微分方程式は変数分離形になるとは限らないことである. **独立変数**のえらび方もまた重要である. たとえば, 回転の群を与える方程式 7.31 を極座標で表すと, 新しい方程式は, 変数分離形 $u\, dv/du = f(v)$ になる. しかし, 変換 $u = x$, $v = x^2 + y^{-2}$(これは, 群の不変量である) によっては, 変数分離形にはならない (確かめてみよう).

対称からなる 1-パラメーター群がわかっている微分方程式を解法する万能の法則を得るため, 座標系 (u, v) で, その群ができるだけ単純な, たとえば, 軸 u に沿った平行移動からなるようなものをみつけよう. この群を与える方程式の一般形は, 承知のように, $dv/du = \varphi(v)$ である. ここで, この変数は分離しているから, その方程式は求積法で解かれる. さて, その初めの 1-パラメーター群をどのように座標変換によって変形してこの単純な形にできるのかを理解しよう.

座標 (u, v) において, その群の変換は $u_t = u + t$, $v_t = v$ という形であってほしい. これらの変換は, その座標直線 $u = 0$ を平行な直線 $u = t$ にうつす. その群の不変量である実数値関数 $v(x, y)$ をえらぼう. その軌道は, 方程式 $v = \mathrm{const}$ で与えられる. 1 点だけで任意の軌道と交わる曲線 K をえらび, K を新しい座標系の v-軸と仮定する. すなわち, それは方程式 $u = 0$ で表わされるものである. このとき, 平面を埋め尽くすために群変換 g_t による K の像は方程式 $u = t$ で表わされるべきであると仮定しなければならない.

この関数 u の代わりに, もし別の独立変数関数 w (直線 $w=t$ はその群のある変換によって $w=0$ の像であるべきであるが, 必ずしも g_t とは限らない) として, 同じレベル直線をもつもの $w=\mathrm{const}$ をとるならば, その新しい座標系で変数が分離する方程式を得るだろう. 事実このとき, w は u の関数 $w=h(u)$ である. それは, 方程式 $dvdu=\varphi(v)$ に代入すると, 方程式 $dv/dw=\varphi(v)\psi(w)$ を得る.

結果として, 次の**変数分離定理**を述べることができる.

定理 19 微分方程式 E の対称で構成される *1*-パラメーター群 $G=\{g_t\}$ がわかっているとする. このとき, 方程式 E は, 次をみたす任意の座標系 (u,v) で変数分離形の方程式となる：座標直線 $v=\mathrm{const}$ は G の軌道であり, 座標直線 $u=\mathrm{const}$ は変換 g_t でうつり合う.

問題 67 次の微分方程式を解け：

$$y'=\frac{2}{5}(y^2+x^{-2}).$$

解答. x に定数 k, y にその逆数 k^{-1} がかけられるならば, y' は k^{-2} がかけられる (7.23) 式によっても確認することができる). 与えられた方程式のすべての項は同じ因子で増えるから, その方程式は事実, 変化しない. このことは, 群

$$\begin{cases} x_t &= e^{-t}x \\ y_t &= e^{t}y \end{cases}$$

が与式の対称群であることを意味する.

この群は**双曲的な回転** の群とよばれる. その軌道は, 双曲線 $xy=\mathrm{const}$(図 7.12 参照) の枝 (連結成分) である. 積 xy はこの群の不変量である. それを新しい独立変数：$v=xy$ とする.

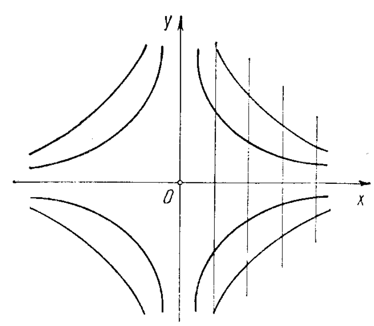


図 7.12: 双曲的な回転の軌道

ここで, 垂直の直線 $x=\mathrm{const}$ は双曲的な回転でうつり合うことに注意しよう：直線 $x=a$ の像は直線 $x=e^{-t}a$ である. したがって, x を新しい座標 u とおくことができる. このように, 求められる変数変換は

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= \frac{v}{u} \end{aligned}$$

である．この変数変換のあと，与式は次のようになる：

$$v' = \frac{2v^2+5v+2}{5u}.$$

この変数は分離しているから，求積法で解くと，一般解は

$$\frac{v+\frac{1}{2}}{v+2} = Cu^{3/5}$$

となる．u, v を x, y を用いて表すと，次の答えを得る：

$$y = \frac{3}{2(x-Cx^{8/5})} - \frac{2}{x}.$$

備考. 同じやり方で，任意の値 a に対する方程式 $y' = a(y^2 + x^{-2})$ を解くことができる．問題のように特別なケースだけを考えたのは，答えがかなり扱いにくいからである．

練習 185. 方程式 $y' = (x+y^2)/(xy)$ の一般解を求めよ．

最後の例は，変形 $x = \varphi(u)$, $y = \psi(x, y)$ によって変数が分離されない方程式である．

問題 68 微分方程式

$$y' = \frac{(y^2-x^2)^2 - 5(y-x) + 4}{(y^2-x^2)^2 + 5(y-x) + 4}$$

を，次の *1*-パラメーター群を用いて解け：

$$\begin{cases} x_t &= \frac{e^t+e^{-t}}{2}x + \frac{e^t-e^{-t}}{2}y \\ y_t &= \frac{e^t-e^{-t}}{2}x + \frac{e^t+e^{-t}}{2}y. \end{cases}$$

解答. これらの変換は，双曲的な回転である (7.7 参照) が，最初の座標系に関して 45° 回転した座標系で考えられる．関数 $v = y^2 - x^2$ はその群の不変量である．垂線，または水平線の集合族はその群の変換で保存されないことに注意しよう．したがって，$u = x$, $v = y$ とするのはよくない．しかし，直線 $y - x = \mathrm{const}$ はこの性質をもっている．$u = y - x$ とおくと，方程式は次のようになる：

$$\frac{dv}{du} = \frac{5v - v^2 - 4}{u}.$$

これは変数分離形である!! この方程式を解いて，もとの変数に戻すと次の解が得られる：

$$\frac{y^2-x^2-1}{y^2-x^2-4} = C(y-x)^3.$$

練習 186. 微分方程式 $y' = e^{-x}y^2 - y + e^x$ を対称群 $x_t = x + t, y_t = e^t y$ を用いて解け.

このようにして, ある微分方程式の対称で構成される 1-パラメーター群がわかっているとき, どのようにして, その微分方程式を解けばいいのかを学んだ. 「これは, しかしながら, 任意の微分方程式 $Xdy - Ydx = 0$ が, 求積法で解けることを意味するのではない. 難しいのは, その微分方程式を変えない 1-パラメーター群を**みつける**ことである.」これは, Sophus Lie の言葉である. 彼は, 連続群の理論を創り, 微分方程式に応用したノルウェーの数学者である. 先に述べられたものは, その一番簡単な場合である.

この本の最後に, 次のことを述べよう：「現在まで, およそ 30 年間, 微分方程式の対称をみつけるアルゴリズム的方法が苦心して作られ, 代数を計算するソフトを多数供給し続けている.」