М.Н.Гусаров

НОВАЯ ФОРМА МНОГОЧЛЕНА КОНВЕЯ–ДЖОНСА ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ

Введение.

В работе изучается новая форма записи многочлена Конвея–Джонса – инварианта ориентированных зацеплений [I, 2]. Новая форма отличается несколько лучшими внешними алгебраическими свойствами и более ясной связью алгебраических характеристик с геометрическими явлениями. С другой стороны, изменения несколько усложняют Конвеевские соотношения, что, впрочем, неизбежно.

В § I по многочлену Конвея–Джонса $P(x,y,x^{-1},y^{-1})$, соответствующему некоторому зацеплению, и аналогичным многочленам его подзацеплений строится новый многочлен $f(t,t^{-1},z)$. Для него выводятся соотношения Конвеевского типа и рассматриваются простейшие свойства. Указывается также способ сведения многочлена P к многочленам f его подзацеплений.

В § 2 устанавливается некоторая иерархия числовых инвариантов, получающихся из многочлена f и приводится эскиз доказательства корректности определения f Конвеевскими соотношениями, не опирающегося на связь многочленом P. Это может рассматриваться как новый способ доказательства корректности определения многочлена Конвея–Джонса, перспективный с точки зрения построения новых инвариантов.

В § 3 вводится понятие инварианта конечной степени. Показывается, что многочлен f сводится к бесконечной системе инвариантов конечной степени.

Используются следующие обозначения: T_n – тривиальное зацепление из n компонент; $P_L(x,y,x^{-1},y^{-1})$ – многочлены Конвея–Джонса, определяемый соотношениями

$$xP_{L_+}(x,y,x^{-1},y^{-1})+yP_{L_-}(x,y,x^{-1},y^{-1})=P_{L_0}(x,y,x^{-1},y^{-1}) \text{ и } P_{T_1}(x,y,x^{-1},y^{-1})=1, \quad (I)$$

где L_+, L_-, L_0 – результаты перестройки зацепления:

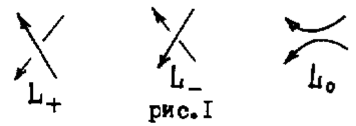

рис.I

§ I. Многочлен $f_L(t,t^{-1},z)$

Определим сперва вспомогательный многочлен $g_L(t,t^{-1},z)$. Он задается формулой

$$g_L(t,t^{-1},z)=P_L\left(\frac{(1+z)^{-\frac{1}{2}}}{(t-1)},\ \frac{-t(1+z)^{-\frac{1}{2}}}{(t-1)},(1+z)^{\frac{1}{2}}(t-1),-t^{-1}(1+z)^{\frac{1}{2}}(t-1)\right) \quad (2)$$

или Конвеевскими соотношениями

$$g_{L_+}(t,t^{-1},z)-tg_{L_-}(t,t^{-1},z)=(1+z)^{\frac{1}{2}}(t-1)g_{L_0}(t,t^{-1},z);\quad g_{T_1}(t,t^{-1},z)=1. \quad (3)$$

Пусть теперь L – зацепление из n компонент. Тогда

$$f_L=\sum(k-1)!\,(1+z)^{\frac{n-k}{2}}\prod_{i=1}^{k}g_{V_i}, \quad (4)$$

где суммирование производится по всевозможным представлениям зацепления L в виде объединения k его непересекающихся подзацеплений V_i, а k изменяется от 1 до n. Из Конвеевских соотношений для многочленов g_{V_i} легко вывести подобные соотношения для многочленов f_L, однако, поскольку формула (4) явно содержит n, приходится отдельно рассматривать случай, когда в рассматриваемой точке пересекаются проекции разных компонент, от случая когда это точка самопересечения. В первом случае мы получаем соотношение

$$f_{L_+}-tf_{L_-}=\sum(1-t)(k-1)!\,(1+z)^{\frac{n-k}{2}}\prod_{i=1}^{k}g_{V_i}+$$
$$+\sum(k-1)!\,(1+z)^{\frac{n-k}{2}}(g_{V_{1+}}-tg_{V_{1-}})\prod_{i=2}^{k}g_{V_i}, \quad (5)$$

где первая сумма берётся по таким представлениям зацепления в виде объединения подзацеплений, что пересекаются проекции компонент из разных подзацеплений, а вторая – по таким, что обе эти компоненты принадлежат подзацеплению V_1. Очевидно, что вторая сумма равна $(1+z)(t-1)f_{L_0}$. Учитывая, что

$$(k-1)!=\sum_{m=0}^{k-2}\binom{k-2}{m}m!\,(k-2-m)! \quad (6)$$

получаем

$$f_{L_+}-tf_{L_-}=(t-1)\left[(1+z)f_{L_0}-\sum f_{W_1}f_{W_2}\right], \quad (7)$$

где суммирование производится по всем представлениям зацепления L в виде объединения непересекающихся подзацеплений W_1 и W_2, каждое из которых содержит одну из компонент, проекции которых пересекаются в рассматриваемой точке.

Во втором случае мы получаем соотношение

$$f_{L_+} - t f_{L_-} = \sum (t-1)(k-1)!\,(1+z)^{\frac{n-k+1}{2}} g_{(V_1)_0} \prod_{i=2}^{k} g_{V_i} = \tag{8}$$
$$= (t-1)\Big(f_{L_0} - \sum (k-1)!\,(1+z)^{\frac{n-k+1}{2}} \prod_{i=1}^{k} g_{V_i}\Big),$$

где первое суммирование производится по представлениям L_+ в виде объединения непересекающихся подзацеплений, первое из которых содержит компоненту, проекция которой проходит через рассматриваемую точку, а второе суммирование – по таким представлениям в виде объединения непересекающихся подзацеплений, что вновь появившиеся при перестройке компоненты оказываются в разных подзацеплениях. Вновь пользуясь тождеством (6), получаем

$$f_{L_+} - t f_{L_-} = (t-1)\big(f_{L_0} - \sum f_{W_1} f_{W_2}\big), \tag{9}$$

где суммирование производится по таким представлениям L_0 в виде объединения непересекающихся подзацеплений W_1 и W_2, что вновь появившиеся при перестройке компоненты оказываются в разных подзацеплениях.

Многочлен f_L однозначно определяется соотношениями (7), (9) и условием $f_{T_1} = 1$. Из этого обычным способом выводится, что $f_{T_n} = 0$, после чего легко доказать, что $f_L = 0$, если L представимо в виде несвязной суммы двух непустых зацеплений. Простейшее вычисление показывает, что если $L_1 \# L_2$ – связная сумма L_1 и L_2, то, вне зависимости от способа суммирования, $f_{L_1 \# L_2} = f_{L_1} \cdot f_{L_2}$.

Формулы (4) и (2) могут быть обращены:

$$g_L = (1+z)^{\frac{-n+1}{2}} \sum (-1)^{k-1} \prod_{i=1}^{k} f(V_i), \tag{10}$$

где n – число компонент зацепления L, а суммирование производится по всем представлениям зацепления L в виде объединения k непересекающихся подзацеплений, а k изменяется от 1 до n. Далее,

$$P_L(x, y, x^{-1}, y^{-1}) = g_L\big(-y/x, -x/y, (x+y)^{-2} - 1\big). \tag{11}$$

Таким образом, многочлен P_L может быть выражен через многочлены f_L его подзацеплений.

§ 2. Определение многочлена $f_L(t, t^{-1}, z)$ Конвеевскими соотношениями

Подставим $t = e^x$ в многочлены $f_L(t, t^{-1}, z)$ и разложим получившееся выражение в ряд Маклорена по x:

$$f_L(e^x, e^{-x}, z) = \sum_{m,k=0}^{\infty} F_k^m(L)\, x^m z^k. \tag{12}$$

Мы получим систему числовых инвариантов $F_k^m(L)$ зацепления L. Из Конвеевских соотношений следует, что

$$F_k^m(L_+) = \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} F_k^{m-i}(L_-) + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i!}\Big(F_k^{m-i}(L_0) + F_{k-1}^{m-i}(L_0) - \sum_{\substack{W_1 \cup W_2 = L_+ \\ k_1+k_2=k \\ i_1+i_2=m-i}} F_{k_1}^{i_1}(W_1) F_{k_2}^{i_2}(W_2)\Big) \tag{13}$$

где W_1 и W_2 – непересекающиеся подзацепления зацепления L, причем W_1 содержит нижнюю, а W_2 – верхнюю из компонент проекции которых пересекаются в точке, для которой выписано Конвеевское соотношение, если они различны. Для точки самопересечения проекции компоненты получаются

$$F_k^m(L_+) = \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} F_k^{m-i}(L_-) + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i!}\Big(F_k^{m-i}(L_0) - \sum_{\substack{W_1 \cup W_2 = L_0 \\ k_1+k_2=k \\ i_1+i_2=m-i}} F_{k_1}^{i_1}(W_1) F_{k_2}^{i_2}(W_2)\Big) \tag{14}$$

Из этих формул видно, что разность $F_k^m(L_+) - F_k^m(L_-)$ определяется инвариантами с верхним индексом, меньшим чем m. При определении инвариантов индукцией по верхнему индексу оказывается достаточным проверить два обстоятельства. Во-первых, при последовательном применении соотношений в двух разных точках результат не должен зависеть от порядка действий. Во-вторых, инвариант не должен меняться при преобразованиях, изображенных на рис.2, 3.

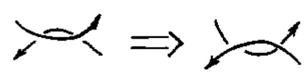

рис.2

рис.3

И то, и другое проще (и можно) проверять непосредственно для многочлена f_L.

§ 3. Инварианты конечной степени

Инварианты F_k^m , построенные в предыдущем параграфе, имеют степень m в смысле следующего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Инвариант изотопического типа зацепления называется инвариантом степени, не превосходящей m , если для любой неособой проекции любого зацепления и для любых $(m+1)$ её точек самопересечения альтернированная сумма инвариантов всех зацеплений, отличающихся от рассматриваемого заменой проходов на переходы в некоторых из рассматриваемых точек, равна 0. (Предполагается, что если замена произошла в нечетном числе точек, то инвариант получившегося зацепления входит со знаком "–").

Инвариант, отвечающий этому определению при каком-либо m , называется инвариантом конечной степени, а наименьшее такое m – его степенью.

Не трудно убедиться, что F_k^m при $m \geq k$ имеет степень m , а при $m < k$ является тождественным нулём. Если ограничиться узлами, то F_k^m нетривиален при $m \geq 2k$.

Инвариантнами степени m являются инварианты с фильтрацией m из построенной Васильевым [3, 4] спектральной последовательности. В частности, все указанные им инварианты (т.е. все инварианты степечи не выше 4) выражаются через многочлен Конвея – Джонса, а именно: $\mathrm{II} = F_1^2$, $\mathrm{III} = - F_1^3$

$$\mathrm{IV}_1 = F_1^4 - \frac{1}{2}F_2^4 - \frac{1}{3}F_1^2 - \frac{1}{4}(F_1^2)^2; \quad \mathrm{IV}_2 = \frac{1}{4}(F_1^2)^2 - \frac{1}{4}F_1^2 - \frac{1}{2}F_2^4; \quad \mathrm{IV}_3 = F_2^4 . \qquad (15)$$

Источником инвариантов конечной степени может служить также многочлен Кауфмана. С помощью приёмов, аналогичных изложенным, его можно разложить в бесконечную систему таких инвариантов. Однако, не все инварианты конечной степени получаются из известных многочленов. В частности, автором построен инвариант двухкомпонентных зацеплений степени 10, который различает мутанты (в том числе, для зацеплений с незаузленными компонентами). Этот инвариант является квадратом инварианта пятой степени упорядоченных зацеплений, различающего компоненты.

Литература

1. F r e y d P., Y e t t e r D., H o s t e J., L i c k o r i s h W.B.R., M i l l e t K., O c n e a n u A. A new polynomial invariant of knots and links, Bull.Amer.Math. Soc., 1985, 12, N 2, p.239-249.

2. J o z e f H. P r z y t y c k i . Survey on recent invariants on classical knot theory Preprint 6/1986 Instytut Matematyki Uniwersytet Warszawski.
3. В а с и л ь е в В.А. Когомология пространства узлов. Препринт Ин-та прикл.матем. им.Келдыша АН СССР, 1990, № 91.
4. В а с и л ь е в В.А. Гомологические инварианты узлов: алгоритмы и вычисления. Препринт Ин-та прикл. матем. им.Келдыша АН СССР, 1990, № 90.

M.N.Gusarov. A new form of the Conway-Jones polynomial of oriented links.

A new invariant polynomial f of an oriented link is constructed. It is shown to be reducible to the Conway-Jones polynomials of the link and of its sublinks, on the other hand the Conway-Jones polynomial is reducible to the new one. If L is a split link, then $f_L = 0$. A new notion is introduced: a link invariant of a finite degree. The polynomial f consists of an infinite system of invariants of finite degrees.