М.Н.Гусаров

Об n-эквивалентности узлов и инвариантах конечной степени

Введение

Предлагаемая статья содержит новый подход к изучению классических узлов. Развиваемая техника пригодна для смежных областей, в частности, для зацеплений, заузленных графов, нитяных зацеплений[I)] и других случаев, когда одномерный объект вложен в трехмерный. Излагаемый материал не опирается на что-либо, кроме классической техники работы с узлами.

В § I содержатся основные технические определения. Все они, с минимальными модификациями, могут быть перенесены в любую из смежных областей.

В § 2 содержится описание сложной технической конструкции, которая используется в дальнейшем только в доказательствах. Для понимания формулировок этот материал не нужен. Конструкция легко переносится на случай нитяных зацеплений.

Центральным результатам этой статьи посвящен § 3. Здесь введено понятие n-эквивалентности узлов, и показано, что классы эквивалентности с операцией связного суммирования образуют конечнопорожденные абелевы группы, объединенные в обратную последовательность. Теорема 3.2, с обратной к ней леммой 5.7, дают подход к определению этих групп, не опирающийся на конструкции § 2, и, поэтому, допускающий обобщение на более широкий класс ситуаций.

В § 4 строится относительно простая комбинаторная модель, которая позволяет, во всяком случае для малых размерностей, вычислять группы классов n-эквивалентных узлов.

Наконец, § 5 посвящен двойственному описанию тех же явлений – через инварианты конечной степени. Само по себе понятие инварианта конечной степени может быть определено независимо не только от понятия n-эквивалентности узлов, но и от вариативных схем ([I], § 3). С другой стороны, теоремы 5.I и 5.2 показывают, что они могут быть получены в качестве естественной алгебраической надстройки над структурами n-эквивалентности узлов.

Сравнивая определения степени инварианта и n-эквивалентности легко убедиться, что первое проще и является распространением на специфическую модель обычного инвариантного определения

I) т.е. вложений $\{1,2,\dots,n\}\times[0,1]$ в $\mathbb{R}^2\times[0,1]$, стандартно отображающих каждую компоненту края в соответствующую компоненту края.

степени. Еще одним достоинством его является общность. Оно применимо, без каких-либо изменений, во всех смежных областях. Оно, собственно, и возникло раньше. Инварианты конечной степени (см. [I]) тесно связаны с известными инвариантами. Если же ограничиться инвариантами аддитивными по отношению к операции связного суммирования, получится структура, эквивалентная группам классов n-эквивалентных узлов (множество характеров соответствующих групп).

Существует, однако, одно обстоятельство, которое заставляет рассматривать как первичное понятие n-эквивалентности. Это понятие легко обобщается на случай нитяных зацеплений, и соответствующие группы оказываются уже некоммутативными. Если переход от такой группы к инвариантам со значениями в абелевых группах представляется вполне понятным, то обратный переход связан с серьезными трудностями. Возможно, как раз понятие n-эквивалентности прояснит связь между коммутативными и некоммутативными явлениями в этой области.

§ I. Вариативные схемы и n-тривиальность узлов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.I. Под абстрактным направлением вариации будет пониматься пространство $V_{ab}\subset\mathbb{R}^3$:

$$V_{ab}=\mathcal{D}^3\cap\big((\mathbb{R}\times\{0\}\cup\{0\}\times\mathbb{R})\times\mathbb{R}\big)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.2. Под простым направлением вариации узла (зацепления и т.п.) будет пониматься гладкое вложение в S^3 абстрактного направления вариации, пересечением образа которого с узлом является образ множества $\ell_1\cup\ell_2$, где

$$\ell_1=S^2\cap\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid z\leqslant 0\,\&\,y=0\},\quad \ell_2=S^2\cap\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x=0\,\&\,z\geqslant 0\}.$$

Вложения, отличающиеся изометрией V_{ab}, не различаются.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.3. Два простых направления вариации называются независимыми, если образы соответствующих вложений не пересекаются.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.4. Направлением вариации называется набор из нескольких попарно независимых простых направлений вариации одного и того же узла. Количество простых направлений в направлении N будет называться его мощностью и обозначаться $|N|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.5. Вариативной схемой размерности n называется класс изотопии узла, вместе с направлением его вариации, причем предполагается, что простые направления разбиты на n отмеченных групп, и в процессе изотопии нужно следить, к какой из групп принадлежит данное простое направление. Мощностью схемы называется мощность соответствующего направления. Будут использоваться обозначения: $|S| = |N|$ и $dim(S) = r$. Если $dim(S) = 1$, то схема будет называться простой, а если каждая из отмеченных групп состоит из одного простого направления - примарной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.6. Вариативной схемой, подчиненной данной схеме $\mathfrak{S}$, называется такая, которая соответствует направлению, получающемуся из направления представляющего схему S путем удаления некоторых отмеченных групп простых направлений. Имеется в виду, что остальные отмеченные группы остаются отмеченными.

Заметим, что вариативной схеме размерности r подчинено r простых схем, впрочем, не обязательно различных. Соответствующие этим схемам направления вариации часто будут, для краткости, называться направлениями исходной схемы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.7. Перестроить узел (зацепление и т.п.) в простом направлении - это значит удалить из него образы двух полуокружностей абстрактного направления вариации и добавить образы симметричных им полуокружностей.

Очевидно, что результат перестройки остается снабжен направлением вариации. Вторичная перестройка в том же направлении приводит к исходному узлу. Если исходный узел был оснащен направлениями вариации независимыми с данным, то те же направления остаются и у перестроенного. Результат последовательной перестройки в нескольких попарно независимых направлениях не зависит от порядка действий, и можно считать, что перестройки производятся одновременно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.8. Перестроить узел в некотором направлении вариации - значит одновременно перестроить его во всех простых направлениях, составляющих это направление.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.9. Две вариативные схемы называются сопряженными, если они имеют представителей, у которых направления совпадают (с учетом отмеченных групп), а узлы (зацепления и т.п.) отличаются перестройкой в направлении, соответствующем некоторой подчиненной схеме.

Очевидно, что воспользовавшись любым представителем данной схемы, мы получим один и тот же набор сопряженных схем. Сопряженность, как нетрудно заметить, является отношением эквивалентности. Все схемы в классе эквивалентности имеют одинаковую мощность и размерность. Набор сопряженных схем размерности r состоит из 2^r схем, не обязательно различных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.10. Изотопические типы узлов (зацеплений и

т.п.), отвечающие схемам, сопряженным с данной, называются результатами перестройки изотопического типа узла, отвечающего данной вариативной схеме, в направлениях этой схемы. Перестройке узла отвечает мультииндекс $\sigma = \{\sigma_i\}_{i=1}^{dim(S)}$, где $\sigma_i = 1$, если i-тая отмеченная группа простых направлений входит в подчиненную схему, с помощью которой производится перестройка, а иначе $\sigma_i = 0$. Перестройка называется четной или нечетной в соответствии с четностью $\sum \sigma_i$.

Если узел задан своей диаграммой, то с каждой двойной точкой этой диаграммы связано единственное, с точностью до изотопии, простое направление вариации (соответствующее ему вложение переводит отрезки в $V_{\alpha\beta}$, параллельные оси z, в отрезки перпендикулярные плоскости диаграммы). Разным двойным точкам соответствуют независимые направления вариации. Перестройка в простом направлении означает замену, в соответствующей точке диаграммы, прохода переходом. Очевидно, что для каждой вариативной схемы можно выбрать представителя так, что все простые направления будут иметь такой вид.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.11. Узел называется n-тривиальным[2], если для него можно найти вариативную схему размерности $n+1$, такую, что при любой (нетождественной) перестройке узла в направлении этой схемы получается тривиальный узел. Такая схема называется разрушающей.

ЛЕММА I.1. Если узел n-тривиален, то он k-тривиален при $k<n$. Тривиальный узел k-тривиален для любого k.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо взять схему размерности $k+1$, подчиненную разрушающей схеме размерности $n+1$. Для тривиального узла можно взять тривиальную схему S, у которой $dim(S) = k+1$ и $|S| = 0$.

ЛЕММА I.2. Если два узла n-тривиальны, то их связная сумма n-тривиальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно для каждого из суммируемых узлов выбрать разрушающую схему размерности $n+1$ так, чтобы они были разделены плоскостью. Потом эти схемы объединяются в схему для суммы, причем каждая отмеченная группа простых направлений одной схемы объединяется с какой-нибудь отмеченной группой другой схемы в отмеченную группу.

ЗАМЕЧАНИЕ. Всякий узел 0-тривиален, так как его можно

---

2) Это эквивалентно $(n+1)$-тривиальности в [2].

развязать, заменив на любой диаграмме проходы на переходы. Как выяснится в дальнейшем, всякий узел 1-тривиален[3].

§ 2. Конструкция "выключатель"

В дальнейшем, в доказательствах, будет использоваться специальная конструкция.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.I. Под r-выключателям данного узла K подразумевается объект, состоящий из шара с ручками V и вариативной схемы S размерности $r+1$ узла K, все направления которой лежат внутри V. Требуется, чтобы они удовлетворяли следующим условиям:

(I) $K \cap V$ – незаузленная дуга, не заходящая в ручки;

(2) при перестройке узла K во всех направлениях схемы S одновременно получается тривиальный узел;

(3) при любой другой перестройке узла K в направлениях схемы S получается узел, изотопный узлу K, причем изотопия может быть выбрана неподвижной вне V и не выводящей оставшуюся дугу за пределы V.

ЛЕММА 2.I. Для каждого r-тривиального узла можно построить r-выключатель.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Делается это с помощью индукции по r.

БАЗА. Выберем простую вариативную схему, разрушающую узел K и шар, пересекающий K по незаузленной дуге. Затем сдвинем вдоль узла простые направления вариации так, чтобы все они приклеивались к узлу внутри шара и пересекали его стандартным образом. Тогда внешние части этих простых направлений (точнее, их регулярные окрестности) можно взять в качестве ручек тела V. Условия (I) и (2) выполнены по построению, а условие (3) тривиально.

ПЕРЕХОД. Пусть имеется $(r-1)$-выключатель (V, S) r-тривиального узла K. Сначала нужно продеформировать ручки тела так, чтобы каждая из них, отправляясь от шара, подходила к узлу, однократно зацеплялась с ним и возвращалась к шару вдоль того же пути, потом то же самое может с ней повторяться требуемое число раз. Затем нужно увеличить шар, так чтобы каждая из ручек разбилась на ручки, простейшим образом зацепленные с узлом. Таким образом мы получим $(r-1)$-выключатель (V_1, S), каждая ручка которого может быть заключена в шар, граничащий с основным шаром

---

3) Это непосредственно доказано в [3].

по кругу, пересекающий узел по незаузленной дуге, причем ручка должна быть зацеплена с этой дугой стандартным образом. Теперь нужно сдвинуть эти дуги (вместе с шарами) по узлу до соприкосновения с основным шаром тела V_1. Получится новый шар с ручками V_2.

К схеме S нужно сперва добавить новое направление. Для этого сначала продеформируем узел внутри V_1 таким образом, чтобы направления схемы S вышли за пределы ручек, а пересечение узла с каждой из ручек состояло из нескольких нитей, идущих вдоль ручки. Перестройка вдоль нового направления вариации должна локально отцеплять каждую из нитей каждой из ручек от дуги узла, за которую эта ручка зацеплена. Можно считать, что эта перестройка просто отцепляет ручки тела V_1 от соответствующих дуг (конечно, для этого придется несколько деформировать и сами ручки). Проведем теперь обратную изотопию, следя, чтобы новое направление не вышло за пределы V_2. Добавив это направление к схеме S, мы получим $(r+1)$-мерную схему S_1 узла K, все направления которой лежат внутри V_2.

Посмотрим, каковы будут результаты перестройки узла K в направлениях схемы S_1 с мультииндексом $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{r+1})$. Если $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots \sigma_r = 1$ и $\sigma_{r+1} = 0$, получится тривиальный узел. Если хотя бы один из индексов σ_i при $i \leqslant r$ равен 0, то результат будет изотопен узлу K, причем изотопия будет неподвижной вне V_2. Фактически, изотопия происходит внутри тела V_1, до или после отцепления его ручек от узла. Наконец, если $\sigma_1 = \ldots = \sigma_r = \sigma_{r+1} = 1$, то получится связная сумма узла K и некоторого узла K_1, лежащего внутри тела, получившегося из V_1, когда все ручки были отцеплены. Это тело можно продеформировать внутри V_2 так, что оно окажется внутри основного шара B тела V_r.

Если мы теперь рассмотрим схему, сопряженную со схемой S_1 при перестройке с индексами $\sigma_1 = \ldots = \sigma_r = \sigma_{r+1} = 1$, то после соответствующей деформации мы получим следующую конструкцию. Узел $K \# K_1$. Шар $\hat{B}$, содержащий внутри себя узел K_1 и вне – узел K. Тело $\hat{V}_2$, получившееся приклеиванием к $\hat{B}$ ручек, не пересекающихся с узлом K. Шар с ручками $\hat{V}_1$, содержащийся внутри $\hat{B}$, содержащий внутри себя узел K_1, кроме двух стандартных дуг вблизи границы $\hat{B}$. Вариативная схема $\hat{S}_1$, состоящая из $K \# K_1$ и $(r+1)$ направлений вариации $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(r+1)}$, таких, что первые r лежат внутри $\hat{V}_1$, а $S^{(r+1)}$ – внутри $\hat{V}_2$. При перестройке в направлениях $\hat{S}_1$ результаты оказываются следующими:

$\sigma_1 = \ldots = \sigma_r = 0$, $\sigma_{r+1} = 1$ – тривиальный узел;

$\sigma_1 + \ldots + \sigma_r > 0$, $\sigma_{r+1} = 0$ – дуга, лежащая внутри $\hat{V}_1$, изотопная там незаузленной дуге, не заходящей

$\sigma_1+\ldots+\sigma_r>0$, $\sigma_{r+1}=1$ – в ручки; дуга, лежащая внутри $\hat{V}_2$, изотопная там незаузленной дуге, не заходящей в ручки.

Теперь рассмотрим схему T размерности $r+1$, разрушающую узел K , продеформировав ее так, чтобы ее направления не пересекали $\hat{V}_1$. Перестроим узел K в направлении $T^{(r+1)}$ и сопряженную с T схему объединим со схемой $\hat{S}_1$, соединяя направления с одинаковыми номерами. Получится схема S_2 , разрушающая узел K_1 . При этом, если перестройка производится по некоторым из первых r направлений, то изотопия будет неподвижна вне $\hat{V}_1 \cup (S_3 \setminus \hat{B})$. Затем нужно втянуть схему S_2 внутрь $\hat{B}$ таким образом, чтобы вышеназванные изотопии были неподвижны вне $\hat{V}_1 \cup B_1$, где B_1 – некоторый шар внутри $\hat{B}$. Получится схема $\hat{S}_2$.

Вновь рассмотрим связную сумму $K \# K_1$, тела $\hat{V}_1$ и $\hat{V}_2$, но уже с вариативной схемой S_3 , которая получается добавлением к схеме $\hat{S}_2$ направления $S^{(r+1)}$, продеформированного так, чтобы оно было независимо с $\hat{S}_2$ и не пересекало B_1 . Рассмотрим результаты перестройки в направлениях схемы S_3 , причем предположим, что $\sigma_{r+2} \neq \sigma_{r+1}$. Если $\sigma_{r+2}=0$, $\sigma_{r+1}=0$, то получится результат как для схемы S_2 , то есть дуга внутри B превращается в незаузленную. Если $\sigma_{r+2}=1, \sigma_{r+1}=0$ и $\sigma_1+\ldots+\sigma_r>0$, то изотопия внутри B_1 должна быть устроена как для схемы $\hat{S}_2$, а в остальном – как для схемы $\hat{S}_1$. Получится неподвижная вне $\hat{V}_2$ изотопия, переводящая лежащую внутри $\hat{V}_2$ дугу в незаузленную дугу, лежащую в B . Наконец, если $\sigma_1=\ldots=\sigma_r=\sigma_{r+1}=0$ и $\sigma_{r+2}=1$, то, как и для $\hat{S}_1$, получится тривиальный узел. Пусть теперь $\hat{S}_3$ – вариативная схема размерности $r+1$, которая получается из S_3 в результате перестройки в направлении $\sigma_1=\ldots=\sigma_{r+1}=1$, $\sigma_{r+2}=0$ и последующего объединения двух последних направлений в одно. Схема $\hat{S}_3$ и тело $\hat{V}_2$ образуют r -выключатель узла K .

ЛЕММА 2.2. Для каждого $(r-1)$ -тривиального узла K найдется узел K_1 такой, что узел $K \# K_1$ r -тривиален.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начальный этап доказательства повторяет начало доказательства индуктивного перехода в лемме 2.I. При построении узла K_1 и схемы $\hat{S}_1$ использовалась только $(r-1)$ -тривиальность узла K . Затем нужно рассмотреть схему T размерности r , разрушающую узел K . Продеформируем ее так, чтобы ее направления не пересекали $\hat{V}_2$ и затем объединим ее направления с первыми r направлениями схемы $\hat{S}_1$, в соответствии с номерами. Получится разрушающая схема размерности $(r+1)$ для узла $K \# K$.

ЛЕММА 2.3. Если один из 2^{r+1} узлов, получающихся при перестройке данного в направлениях $(r+1)$ -мерной схемы S представлен в виде связной суммы $K \# K$, где узел K – r -тривиальный, то существует схема, при перестройках в направлениях которой получается $2^{r+1}-1$ таких же узлов, а вместо узла $K \# K_1$ – просто узел K_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно рассмотреть сопряженную с S схему $\hat{S}$ с таким мультииндексом σ , чтобы получился узел $K \# K_1$. Затем надо построить r - выключатель T узла K , не зацепленный с узлом K_1 и не пересекающий направления схемы $\hat{S}$. Потом делается перестройка во всех направлениях схемы T . Получится узел K , на котором основываются две схемы – $\hat{S}$ и T . Объединив эти схемы, соединяя направления одинакового номера, а затем совершив перестройку с мультииндексом σ , мы получим нужную схему.

ЛЕММА 2.4. Если узел имеет r -выключатель, то он r -тривиален.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо взять тривиальную (то есть не содержащую направлений) $(r+1)$ -мерную схему этого узла. Затем нужно последовательно сделать тривиальными все $2^{r+1}-1$ узлов, получающихся при перестройках с ненулевыми мультииндексами (как в доказательстве предыдущей леммы). Получится разрушающая схема.

§ 3. Группы классов n -эквивалентных узлов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.I. Узлы называются n -противоположными, если их связная сумма n -тривиальна.

ЛЕММА 3.I. Для любого узла K и любого числа n найдется узел, n -противоположный узлу K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построение производится с помощью индукции по n . При $n=0$ в качестве противоположного можно выбрать тривиальный узел. Если имеется $(n-1)$ -противоположный узел, то, согласно лемме 2.2, найдется такой узел L , что $(K \# K_{n-1}) \# L$ – n -тривиален. Можно теперь положить $K_n = K_{n-1} \# L$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Узлы называются n -эквивалентными, если имеют общий n -противоположный узел.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО КОРРЕКТНОСТИ. Симметричность очевидна. Рефлексивность следует из леммы 3.I. Для доказательства транзитивности возьмем три узла K_1 , K_2 и K_3 . Пусть L_1 – n -противоположен K_1 и K_2 , а L_2 – n -противоположен K_2 и K_3 . Тогда узел $L_1 \# K_2 \# L_2$ n-противоположен K_1 и K_3 .

ЛЕММА 3.2. Узел n -эквивалентный тривиальному n -тривиален.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что n -противоположный тривиальному узел сам n -тривиален. Теперь $K \# K_n$ и K_n n -тривиальны.

Можно взять $(n+1)$-мерную разрушающую узел $K \# K_n$ схему, и, по лемме 2.3, получить из нее схему, разрушающую узел K.

ЛЕММА 3.3. Если узлы K_1 и K_2 n-эквивалентны узлам L_1 и L_2, то n-эквивалентны и их связные суммы $K_1 \# K_2$ и $L_1 \# L_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно воспользоваться леммой I.2.

В результате изложенного получаем теорему.

ТЕОРЕМА 3.I. Классы n-эквивалентных узлов для любого натурального n с операцией связного суммирования образуют абелеву группу GK_n.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как будет видно далее, эти группы конечно порождены. В настоящий момент не известно, имеют ли они кручения. При $n \leq 6$ кручений у GK_n нет.

ЛЕММА 3.4. Пусть имеется $(n+1)$-мерная вариативная схема S узла K. Пусть K_σ – результат перестройки узла K в направлении S с мультииндексом σ, а K'_σ – n-эквивалентен K_σ при каждом σ. Тогда найдется схема S', перестройка в направлении которой с мультииндексом σ даст узел, изотопный K'_σ при каждом σ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть узлы L_σ n-противоположны узлам K_σ (а значит и узлам K'_σ) при соответствующих σ. Пусть $(n+1)$-мерные схемы T_σ – разрушающие узлы $K'_\sigma \# L_\sigma$, а схемы W_σ сопряжены со схемами T_σ с соответствующими мультииндексами. Рассмотрим связную сумму схемы S и всех схем W_σ. Перестройки в направлениях полученной схемы дают каждый раз узлы $K'_\sigma \# L_\sigma \# K_\sigma$. В соответствии с леммой 2.3 можно уничтожить тривиальные слагаемые $L_\sigma \# K_\sigma$. Получим искомую схему.

ЛЕММА 3.5. Для любой $(n+1)$-мерной схемы S найдется такая схема S', что результаты перестройки с любым мультииндексом σ в направлениях S и S' n-противоположны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно к связной сумме 2^{n+1} узлов, противоположных полученным при перестройках в направлениях схемы S, добавить связную сумму $2^{n+1}-1$ схем, сопряженных с S при нетривиальных перестройках.

ТЕОРЕМА 3.2. Связная сумма всех узлов, полученных перестройками в направлениях данной $(n+1)$-мерной схемы с четными мультииндексами и противоположных к узлам, полученным перестройками с нечетными мультииндексами, n-тривиальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для данной схемы S построим схему S' в соответствии с леммой 3.5. Пусть T_σ – схема, сопряженная с S с мультииндексом σ при четных σ и сопряженная с S' при нечетных σ. Определим схемы W_σ, заменяя в схемах T_σ на пустые те группы направлений, для которых индекс имеет значение 1.

Связная сумма схем W_σ при всех нетривиальных перестройках дает n-тривиальные узлы. Лемма 3.4 позволяет получить из нее разрушающую схему.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Тотальным классом n-мерной вариативной схемы называется класс n-эквивалентности связной суммы всех узлов, получающихся при четных перестройках в направлениях этой схемы, и n-противоположных получающимся при нечетных перестройках.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Пусть имеется простое направление вариации. Зафиксируем какое-нибудь конкретное вложение V_{ab} в S^3, определяющее его. Это вложение позволяет перенести ориентации на $\mathcal{D}^3$ и две полуокружности на его поверхности. Простое направление вариации называется правым или левым в соответствии с тем, левый или правый винт определяют эти ориентации (правому направлению отвечает левый винт).

ЗАМЕЧАНИЕ. Если это определение относится к простому направлению узла, то от выбора конкретной ориентации узла (который в принципе предполагается) результат не зависит. В более сложных случаях (для зацеплений, например) ориентированность уже существенна.

ЛЕММА 3.6. Тотальный класс вариативной схемы зависит только от ее внутреннего топологического типа, то есть от порядка расположения на окружности дуг, по которым приклеиваются простые направления вариации (с учетом отмеченных групп и ориентаций), но не от вложения в S^3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что любые два вложения отличаются, с точностью до изотопии, перестройкой в некотором направлении, независимом с имеющимися. Добавив его к одной из схем, мы получим $(n+1)$-мерную схему. Теорема 3.2, примененная к этой схеме, показывает, что разность тотальных классов исходных схем тривиальна.

ЛЕММА 3.7. Пусть одна из отмеченных групп простых направлений n-мерной вариативной схемы S разбита на две части, а схемы S_1 и S_2 получаются исключением из схемы S соответствующей части этой группы. Тогда тотальный класс схемы S равен сумме тотальных классов схем S_1 и S_2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть схема S'_2 получается из схемы S_2 перестройкой во всех простых направлениях, которые были исключены при ее определении. Теперь половина узлов, получающихся перестройками в направлениях схемы S'_2, совпадет с результатами перестройки другой четности в направлениях схемы S_1. При сложении тотальных классов схем S_1 и S'_2 классы этих узлов взаимно уничтожатся, а остальные узлы образуют в точности тотальный класс схемы S. В силу леммы 3.6 тотальный класс схемы S_2' можно заменить тотальным классом схемы S_2.

ЛЕММА 3.8. Тотальный класс вариативной схемы равен сумме тотальных классов всех примарных схем, получающихся из нее выбором по одному простому направлению в каждой из отмеченных групп.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно многократно применить лемму 3.7. По существу, лемма 3.7 означает, что тотальный класс в некотором смысле полилинеен. Лемма 3.8 позволяет, в том же смысле, раскрывать скобки.

ТЕОРЕМА 3.3. Группы GK_n и естественные проекции образуют обратную последовательность групп и гомоморфизмов:

$$0 = GK_1 \xleftarrow{pr_2} GK_2 \xleftarrow{pr_3} \dots \xleftarrow{pr_n} GK_n \xleftarrow{pr_{n+1}} \dots ,$$

в которой все проекции являются эпиморфизмами, ядра которых порождены тотальными классами примарных вариативных схем соответствующей размерности и, значит, конечно порождены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование проекций следует из леммы I.I. Эпиморфность очевидна. Ядро состоит из классов $(n-1)$-тривиальных узлов. Каждый из них является тотальным классом n-мерной схемы, разрушающей соответствующий узел и, в силу леммы 3.8, порожден тотальными классами примарных схем. Лемма 3.6 показывает, что количество порождающих классов не превосходит количества внутренних топологических типов (ориентированных) n-мерных примарных схем, которое, очевидно, конечно. В частности, существует два отличающихся ориентацией внутренних топологических типа одномерных схем. Как показывает простейшая реализация, оба эти типа имеют тривиальный тотальный класс.

ЛЕММА 3.9. Примарным вариативным схемам, отличающимся, в смысле ориентированного внутреннего топологического типа, только ориентацией одного из простых направлений, отвечают противоположные тотальные классы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если перестроить примарную схему в одном из ее простых направлений, то внутренний топологический тип сопряженной схемы будет отличаться от типа исходной только ориентацией этого направления, а узлы, получающиеся при перестройках в направлениях этих схем, одинаковы, но получаются при перестройках разной четности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. Примарная схема называется положительной, если у нее четное число левых простых направлений, а в противном

случае называется отрицательной.

§ 4. Плоские вариативные схемы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.I. Плоской n-мерной вариативной схемой называется окружность с n отмеченными парами точек, определенная с точностью до ориентированного автогомеоморфизма. При графическом изображении удобно соединять отмеченные пары точек хордами. Для более компактной записи можно представить плоскую схему как "слово", в которое n букв входят по два раза каждая. Порядок следует считать циклическим, то есть последняя буква может быть перенесена в начало.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Базовой плоской схемой примарной вариативной схемы называется окружность, соответствующая узлу примарной схемы, на которой отмечены точки приклеивания простых направлений вариации (точнее, полюсов V_{ab}).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Тотальным классом плоской схемы называется тотальный класс любой положительной примарной схемы, для которой данная плоская схема является базовой.

Из лемм 3.6 и 3.9 следует, что таким образом определен один класс.

ЛЕММА 4.I. Тотальный класс связной суммы двух плоских вариативных схем положительной размерности тривиален.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем положительные примарные схемы S_1 и S_2, для которых рассматриваемые являются базовыми. Каждый узел, получающийся перестройкой в направлении схемы $S_1 \# S_2$, представляется в виде связной суммы, причем каждое слагаемое одинаковое число раз получается при четных и нечетных перестройках.

ЛЕММА 4.2. Пусть четыре плоских вариативных схемы P_1, P_2, P_3 и P_4 отличаются друг от друга положением одной точки: $P_1 = (\dots ab \dots b \dots)$, $P_2 = (\dots ba \dots b \dots)$, $P_3 = (\dots b \dots ab \dots)$, $P_4 = (\dots b \dots ba)$. Тогда их тотальные классы α_1, α_2, α_3 и α_4 удовлетворяют соотношению $\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Расположим в горизонтальной плоскости окружность и отметим на ней n пар точек, в соответствии со схемой P_1. Добавим еще три пары точек: a_2, a_3 и a_4 – отвечающие схемам P_2, P_3 и P_4 соответственно, причем так, чтобы четыре хорды, соединяющие пары соответствующих точек a_i, не пересекались. Определим $(n-1)$ простых направлений вариации, проходящих в проекции на горизонтальную плоскость вдоль хорд, соединяющих одноименные точки (кроме точек a_i) и находящихся ниже плоскости окружности. Нужно проследить, чтобы хорде b соответствовало самое верхнее из них. К полученной $(n-1)$ -мерной примарной схеме добавим еще одну отмеченную группу из четырех простых направлений. Эти направления должны идти вдоль хорд a_i с подкруткой на I/4 оборота вправо или влево. Получатся соответственно правые и левые простые направления вариации, причем направление подкрутки должно быть таким, чтобы сторона, обращенная к b, поднималась вверх при движении к b. Легко видеть, что перестройка в таком направлении не меняет изотопического типа узла, как исходного, так и перестроенного в некоторых других направлениях. Вследствие этого, тотальный класс этой схемы тривиален. Леммы 3.8 и 3.9 показывают, что этот класс (или противоположный ему) равен сумме классов α_1, α_3 и противоположных классам α_2 и α_4.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4. Рассмотрим свободную абелеву группа, формальными образующими которой являются n-мерные плоские вариативные схемы $(n \geqslant 2)$, не разложимые в связную сумму схем положительной размерности. Фактор-группа этой группы по подгруппе, порожденной элементами вида $P_1 - P_2 + P_3 - P_4$, где P_i такие, как в лемме 4.2, называется группой плоских вариативных схем размерности n и обозначается $GPVS(n)$. (Считается, что схемам, распадающимся в прямую сумму, соответствует 0.)

ТЕОРЕМА 4.I. Существуют канонические гомоморфизмы

$$tot_n : GPVS(n) \to GK_n, \text{ причем } Im(tot_n) = Ker(pr_n : GK_n \to GK_{n-1}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Значениями tot_n на формальных образующих являются тотальные классы соответствующих схем. Лемма 4.2 показывает корректность такого определения. Теорема 3.5 и лемма 3.9 гарантируют требуемое равенство.

ЗАМЕЧАНИЕ. Анализ малых $(n \leqslant 6)$ размерностей и некоторые наблюдения общего характера позволяют предположить, что гомоморфизмы tot_n являются мономорфизмами.

ИНФОРМАЦИЯ. Группы $GPVS(n)$ вычислены при $n \leqslant 6$:

$$GPVS(2) = \mathbb{Z}; \quad GPVS(3) = \mathbb{Z}; \quad GPVS(4) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}; \quad GPVS(5) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$$GPVS(6) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

В группе $GPVS(2)$ – единственная образующая – $(abab)$.

Координаты формальных образующих для n = 3, 4, 5, 6 сведены в таблицу:

1	abacbc	1				
2	abcabc	2				
3	abcadbcd	1	1			
4	abcadcbd	0	1			
5	abcdabcd	3	1			
6	abcadbecde	-2	2	1		
7	abcadbedce	-1	1	1		
8	abcadcedbe	0	0	1		
9	abcadebcde	-5	3	2		
10	abcadebced	-6	2	2		
11	abcadecbde	-7	3	2		
12	abcadecbed	-7	2	2		
13	abcdaebcde	-13	5	4		
14	abcdaebdce	-14	4	4		
15	abcdeabcde	-10	6	4		
16	abcadbecfdef	-4	1	2	0	1
17	abcadbecfedf	-1	0	1	0	1
18	abcadbedfcef	-4	1	2	1	0
19	abcadbedfecf	1	0	1	1	0
20	abcadbefcdef	-12	2	4	1	1
21	abcadbefcdfe	-10	0	3	1	1
22	abcadbefcedf	-4	1	2	0	1
23	abcadbefdcef	-10	0	4	1	1
24	abcadbefdcfe	-9	-1	3	1	1
25	abcadbefdecf	-4	1	2	1	0
26	abcadcebfedf	0	0	0	0	1
27	abcadcedfebf	0	0	0	1	0
28	abcadcefbdef	-4	0	2	1	1
29	abcadcefbdfe	-3	-1	1	1	1
30	abcadcefdbef	-2	-2	2	1	1
31	abcadcefdbfe	-2	-2	1	1	1
32	abcadebcfdef	-7	-3	2	1	3
33	abcadebcfedf	-8	-4	2	1	3
34	abcadebfcdef	-19	-5	6	2	4
35	abcadebfcdfe	-12	-1	4	1	2
36	abcadebfcedf	-17	-7	5	2	4
37	abcadebfdcef	-17	-4	5	2	3
38	abcadebfdcfe	-9	-2	3	1	2
39	abcadecbfedf	-8	-5	2	1	3
40	abcadecfbdef	-11	-7	4	2	4
41	abcadecfbedf	-10	-8	3	2	4
42	abcadecfebdf	-3	-4	2	1	2
43	abcadefbcdef	26	12	8	3	5
44	abcadefbcdfe	-21	-9	6	3	5
45	abcadefbcefd	-19	-3	6	2	2
46	abcadefbcfde	-19	-3	6	2	2
47	abcadefbcfed	-13	-5	4	2	2
48	abcadefcbdef	-29	-13	8	3	5
49	abcadefcbdfe	-22	-10	6	3	5
50	abcadefcbefd	-21	-3	6	2	2
51	abcadefcbfde	-21	-3	6	2	2
52	abcadefcbfed	-14	-5	4	2	2
53	abcdabefcdef	-24	0	8	2	2
54	abcdabefdcef	-28	0	8	2	2
55	abcdaebfcdef	-27	-19	8	5	9
56	abcdaebfcedf	-19	-9	6	3	5
57	abcdaebfdcef	-25	-21	7	5	9
58	abcdaebfdecf	-12	-6	4	2	4
59	abcdaefbcdef	-33	-15	10	5	9
60	abcdaefbcdfe	-20	-20	6	5	9

61	abcdaefbdcef	-28	-18	8	5	9
62	abcdaefbdcfe	-14	-22	4	5	9
63	abcdaefcdbef	-14	-12	4	3	7
64	abcdaefcdbfe	-7	-15	2	3	7
65	abcdaefdcbfe	0	-17	0	3	7
66	abcdeafbcdef	-49	-27	14	8	14
67	abcdeafbcedf	-36	-32	10	8	14
68	abcdeafbdcef	-36	-32	10	8	14
69	abcdeafcbedf	-22	-36	6	8	14
70	abcdefabcdef	-59	-21	18	8	14

При $n>3$ некоторые формальные образующие в таблицу не
включены. Их координаты вычисляются следующим образом. Если схе-
ма содержит фрагмент вида $(\dots k\ell k \dots)$, то можно исключить точки
k и к координатам получившейся схемы добавить одну или две нуле-
вых (последних). Если схема содержит фрагмент вида $(\dots k\ell m k\ell \dots)$,
то можно исключить точки k и ℓ, удвоить координаты получившей-
ся схемы и добавить две или три нулевых. Следует также иметь
в виду, что для этих размерностей схемы, отличающиеся ориента-
цией окружности, эквивалентны.

Размерность $\mathcal{E}$, видимо, последняя, для которой информация,
представленная таким образом, доступна для непосредственного
изучения. Она, собственно, и получена была непосредственным руч-
ным расчетом. Имеющиеся алгоритмы позволяют провести расчет до
$n=10$ с помощью персонального компьютера. Более мощные компью-
теры позволяют, по-видимому, изучить еще две размерности. Однако
вызывает сомнение полезность такой информации.

Представлялось бы интересным найти схемы, которые не были
бы эквивалентны полученным из них обращением ориентации. Однако
имеющиеся наблюдения позволяют предположить, что такие схемы по-
являются в размерности 13 или 14. Достоверно, впрочем, известно
только, что их нет при $n \le 9$ (результат компьютерной проверки).

§ 5. Инварианты конечной степени

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Пусть α – инвариант изотопического типа узлов (зацеплений и т.п.), принимающий значения в некоторой абелевой группе. Он будет называться инвариантом степени n, если для любой вариативной схемы S размерности $r = n+1$, но не для любой схемы размерности $r = n$, выполняется соотношение:

$$\sum_{\sigma} (-1)^{\sum_{i=1}^{r} \sigma_i} \alpha(K_\sigma), \qquad (5.1)$$

где K_σ – результат перестройки с мультииндексом σ в направлениях схемы S.

ЛЕММА 5.1. Значения инварианта степени n на n-эквивалентных узлах совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим связную сумму $K_1 \# L \# K_2$, где L – узел, n-противоположный к n-эквивалентным узлам K_1 и K_2. Применив соотношение (5.1) к $(n+1)$-мерной схеме разрушающей слагаемое $K_1 \# L$, мы получим, что $\alpha(K_1 \# L \# K_2) = \alpha(K_2)$. Аналогично для схемы, разрушающей узел $L \# K_2$, получим, что $\alpha(K_1 \# L \# K_2) = \alpha(K_1)$.

ЛЕММА 5.2. В определении 5.1 достаточно рассматривать только примарные схемы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть простое направление вариации V принадлежит к отмеченной группе простых направлений схемы S, содержащей более одного простого направления. Пусть схема S' получается удалением из этой группы схемы S всех простых направлений, кроме V, а схема S'' – перестройкой схемы S в направлении V с последующим его удалением. Тогда

$$\sum_{\sigma} (-1)^{\sum_i \sigma_i} \cdot \alpha(K_\sigma) = \sum_{\sigma} (-1)^{\sum_i \sigma_i} \cdot \alpha(K'_\sigma) + \sum_{\sigma} (-1)^{\sum_i \sigma_i} \cdot \alpha(K''_\sigma)$$

и проверка соотношения (5.1) для S сводится к его проверке для S' и S''. Поскольку мощности S' и S'' меньше мощности S, процесс сходится к неразложимым далее примарным схемам.

СЛЕДСТВИЕ. Определение 5.1 эквивалентно данному в § 3 [1].

ЛЕММА 5.3. Гомоморфизм группы GK_n в абелеву группу, ядро которого не содержит целиком ядра $pr_n : GK_n \longrightarrow GK_{n-1}$, порождает инвариант конечной степени.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это прямое следствие теоремы 3.2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Инвариант, порожденный гомоморфизмом группы GK_n в абелеву группу, называется первичным.

ЛЕММА 5.4. Сумма двух инвариантов конечной степени со значениями в одной и той же группе является инвариантом конечной степени, причем, если степени слагаемых не равны, то степень суммы совпадает с большей из них, а в противном случае степень суммы не больше степени слагаемых.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это очевидное следствие линейности соотношений (5.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.3. Введем следующие обозначения для работы с мультииндексами:

$\bar{\sigma} = (1-\sigma_1, \dots, 1-\sigma_n)$; $\sigma\cdot\sigma' = (\sigma_1\sigma_1', \sigma_2\sigma_2', \dots, \sigma_n\sigma_n')$;

$|\sigma| = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i$; $P_\sigma = (-1)^{|\sigma|}$; $\sigma < \sigma'$, если $\sigma = \sigma'\cdot\tau$, где τ некоторый мультииндекс.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.4. Пусть имеется абелева группа G и система ее элементов $\{\alpha_\sigma\}$, определяющая отображение $\{0,1\}^n \to G$. Будем называть $\{\alpha_\sigma\}$ бинарной системой степени k, если для любых мультииндексов ρ и σ, таких, что $|\sigma| = k+1$:

$$\sum_{\tau<\sigma} P_\tau \cdot \alpha_{\rho\bar{\tau}} = 0. \tag{5.2}$$

ЛЕММА 5.5. Пусть $\{\alpha_\sigma\}$ – бинарная система степени k. Тогда для любого мультииндекса ρ, такого, что $|\rho| > k$:

$$\alpha_\rho = \sum_{\substack{\sigma<\rho \\ |\sigma|\le k}} (-1)^{k-|\sigma|} \binom{|\rho|-|\sigma|-1}{|\rho|-k-1} \alpha_\sigma. \tag{5.3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая, что бинарная система степени k является бинарной системой и любой большей степени, проведем индукцию по $|\rho|-k$. При $|\rho| = k+1$ соотношение (5.3) превращается, с точностью до замены обозначений и перегруппировки слагаемых, в соотношение (5.2). Индуктивный переход доказывается следующим вычислением:

$$\alpha_\rho = \sum_{\substack{\tau<\rho \\ |\tau|\le k+1}} (-1)^{k-|\tau|-1}\binom{|\rho|-|\tau|-1}{|\rho|-k-2}\alpha_\tau = \sum_{\substack{\sigma<\rho \\ |\sigma|\le k}} \alpha_\sigma\cdot(-1)^{k-|\sigma|+1}\binom{|\rho|-|\sigma|-1}{|\rho|-k-2} +$$

$$+ \sum_{\substack{\tau<\rho \\ |\tau|=k+1}} (-1)^{k-|\tau|-1}\cdot\alpha_\tau = \sum_{\substack{\sigma<\rho \\ |\sigma|\le k}} \alpha_\sigma\left[(-1)^{k-|\sigma|+1}\binom{|\rho|-|\sigma|-1}{|\rho|-k-2} + \sum_{\substack{\sigma<\tau<\rho \\ |\tau|=k+1}} (-1)^{k-|\sigma|}\right] =$$

$$= \sum_{\substack{\sigma<\rho \\ |\sigma|\le k}} \alpha_\sigma\cdot(-1)^{k-|\sigma|}\left[-\binom{|\rho|-|\sigma|-1}{|\rho|-k-2} + \binom{|\rho|-|\sigma|}{k+1-|\sigma|}\right] = \sum_{\substack{\sigma<\rho \\ |\sigma|\le k}} \alpha_\sigma\cdot(-1)^{k-|\sigma|}\binom{|\rho|-|\sigma|-1}{|\rho|-k-1}.$$

ЛЕММА 5.6. Пусть $\{\alpha_\sigma\}$ и $\{\beta_\sigma\}$ – бинарные системы элементов кольца степени k и ℓ соответственно. Тогда $\{\alpha_\sigma\beta_\sigma\}$ – бинарная система степени $k+\ell$, причем, если $|\sigma| = k+\ell$, то для любого τ:

$$\sum_{\sigma'<\sigma} P_\sigma \alpha_{\tau\bar{\sigma}'}\beta_{\tau\bar{\sigma}'} = \sum_{\substack{\rho<\sigma \\ |\rho|=k}} \Big(\sum_{\rho'<\rho} P_{\rho'}\alpha_{\tau\bar{\rho}'}\Big)\Big(\sum_{\rho''<\bar{\rho}\sigma} P_{\rho''}\beta_{\tau\bar{\rho}''}\Big). \tag{5.4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем, без ограничения общности, считать $|\tau|$ достаточно большим. Для этого можно добавить к мультииндексам несколько дополнительных координат, от которых α и β не зависят, считая их равными 1 для τ и 0 для σ. Кроме того, считаем, что $\sigma<\tau$, иначе обе части, очевидно, равны 0. Разложим левую и правую части, в соответствии с леммой 5.5, в линейную комбинацию элементов вида $\alpha_\lambda\cdot\beta_\mu$, где $|\lambda|\le k$, а $|\mu|\le\ell$. Будем доказывать равенство соответствующих коэффициентов:

$$\sum_{\substack{\sigma'<\sigma \\ \bar{\sigma}'>\lambda \\ \bar{\sigma}'>\mu}} P_{\sigma'}\cdot(-1)^{k-|\lambda|}\binom{|\tau\bar{\sigma}'|-|\lambda|-1}{|\tau\bar{\sigma}'|-k-1}\cdot(-1)^{\ell-|\mu|}\cdot\binom{|\tau\bar{\sigma}'|-|\mu|-1}{|\tau\bar{\sigma}'|-\ell-1} =$$

$$= \sum_{\substack{\rho<\sigma \\ |\rho|=k}} \left(\sum_{\substack{\rho'<\rho \\ \bar{\rho}'>\lambda}} P_{\rho'}\cdot(-1)^{k-|\lambda|}\binom{|\tau\bar{\rho}'|-|\lambda|-1}{|\tau\bar{\rho}'|-k-1}\right)\cdot\left(\sum_{\substack{\rho''<\sigma\bar{\rho} \\ \bar{\rho}''>\mu}} P_{\rho''}(-1)^{\ell-|\mu|}\binom{|\tau\bar{\rho}''|-|\mu|-1}{|\tau\bar{\rho}''|-\ell-1}\right).$$

Учитывая, что члены сумм зависят только от $m=|\sigma'|$, $m_1=|\rho'|$ и $m_2=|\rho''|$, а не от самих этих мультииндексов, запишем:

$$\sum_{m=0}^{|\sigma\bar{\lambda}\bar{\mu}|} (-1)^m\binom{|\sigma\bar{\lambda}\bar{\mu}|}{m}\binom{|\tau|-m-|\lambda|-1}{k-|\lambda|}\binom{|\tau|-m-|\mu|-1}{\ell-|\mu|} =$$

$$= \sum_{\substack{\rho<\sigma \\ |\rho|=k}} \left(\sum_{m_1=0}^{|\rho\bar{\lambda}|}(-1)^{m_1}\binom{|\rho\bar{\lambda}|}{m_1}\binom{|\tau|-m_1-|\lambda|-1}{k-|\lambda|}\right)\left(\sum_{m_2=0}^{|\sigma\bar{\rho}\bar{\mu}|}(-1)^{m_2}\binom{|\sigma\bar{\rho}\bar{\mu}|}{m_2}\binom{|\tau|-m_2-|\mu|-1}{k-\mu}\right).$$

Левая часть представляет собой конечную разность порядка $|\sigma \bar{\lambda} \bar{\mu}|$, то есть, по крайней мере, $(k+\ell-|\lambda|-|\mu|)$, от выражения $\binom{|\tau|-m-|\lambda|-1}{k-|\lambda|}\binom{|\tau|-m-|\mu|-1}{\ell-|\mu|}$, которое является многочленом от m , степени $(k-|\lambda|+\ell-|\mu|)$. Поэтому она отличается от 0, только если $|\sigma\bar{\lambda}\bar{\mu}| = (k-|\lambda|+\ell-|\mu|)$, то есть, когда $\lambda\mu = \bar{\sigma}\lambda = \bar{\sigma}\mu = 0$.

В этом случае она равна $\Delta_{k-|\lambda|+\ell-|\mu|}\left(\frac{m^{k-|\lambda|+\ell-|\mu|}}{(k-|\lambda|)!\,(\ell-|\mu|)!}\right) =$

$= \binom{k-|\lambda|+\ell-|\mu|}{k-|\lambda|}$. Аналогично, в правой части получим $\sum\limits_{\substack{\rho:\lambda<\rho<\sigma,\\ \sigma\bar{\rho}>\mu,|\rho|=k}} 1$. Равенство теперь становится тривиальным комбинаторным фактом.

Если применить соотношение (5.4), увеличив k на 1 , то в правой части первые сомножители все обратятся в 0 , и мы убедимся, что система $\{\alpha_\sigma \beta_\sigma\}$ имеет степень $k+\ell$.

ЛЕММА 5.7. Пусть K_σ система узлов для $\sigma \in \{0,1\}^{n+1}$, а α_σ – класс n-эквивалентности узла K_σ . Если для любого σ проекция класса $\sum\limits_{\rho<\sigma} P_\rho \cdot \alpha_\rho$ равна 0 в $GK_{|\rho|-1}$, то найдется схема S размерности $n+1$, такая, что перестройка в направлениях S с каждым мультииндексом σ дает узел, изотопный K_σ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем последовательно строить схемы, дающие требуемые узлы K_σ при $|\sigma| \leq m$, в порядке возрастания m . На очередном шаге нужно добиться, чтобы имеющиеся узлы K'_σ при $\sigma = m+1$ заменились на узлы K_σ . В силу теоремы 3.2 узел K'_σ m-эквивалентен узлу K_σ . Добавим к имеющейся схеме $(m+1)$-мерные разрушающие схемы узлов $K_\sigma \# L_\sigma$, где L_σ узлы, m-противоположные узлам K_σ , дополненные пустыми группами простых направлений с номерами, для которых $\sigma_i = 0$. Затем, применив лемму 3.4, мы уничтожим слагаемые $K'_\sigma \# L_\sigma$, что и завершает шаг.

ЛЕММА 5.8. Произведение инвариантов конечной степени, принимающих значения в кольце, является инвариантом конечной степени, причем его степень не больше суммы степеней сомножителей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть имеются инварианты α и β степени ℓ и m соответственно, а S – вариативная схема размерности $k+\ell+1$. Тогда $\{\alpha(K_\sigma)\}$ и $\{\beta(K_\sigma)\}$, где K_σ – результат перестройки с мультииндексом σ в направлениях схемы S , – бинарные системы степеней k и ℓ соответственно. Лемма 5.6 показывает, что $\{\alpha(K_\sigma)\cdot\beta(K_\sigma)\}$ – бинарная система степени $k+\ell$. Единственное соотношение вида (5.2) для нее совпадает с соотношением вида (5.I) для схемы S и инварианта $\alpha\beta$.

ТЕОРЕМА 5.I. Инварианты узлов (зацеплений и т.п.) конечной степени со значениями в кольце сами образуют градуированное кольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это объединение леммы 5.4 и леммы 5.8.

ЛЕММА 5.9. Если узел K_0 $(m-1)$-тривиален, а α – инвариант степени n , то $\beta: K \longmapsto \alpha(K \# K_0) - \alpha(K)$ является инвариантом степени $n-m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть имеется основанная на узле K схема S размерности $n-m+1$. Рассмотрим связную сумму схемы S с разрушающей схемой узла K_0 . Соотношение вида (5.I) для этой $(n+1)$-мерной схемы и инварианта α превращается, после приведения подобных, в соотношение для схемы S и инварианта β .

ТЕОРЕМА 5.2. Градуированное кольцо инвариантов конечной степени со значениями в $\mathbb{Q}$ является кольцом многочленов от соответствующим образом выбранного набора первичных инвариантов. То же верно и для инвариантов со значениями в $\mathbb{Z}$, но нужно ограничиться многочленами, принимающими целые значения в целых точках (не обязательно с целыми коэффициентами).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G_n = GK_n / \mathrm{Tors}(GK_n)$. Тогда возникает последовательность свободных конечнопорожденных абелевых групп и эпиморфизмов:

$$0 = G_1 \xleftarrow{p\tau_2} G_2 \xleftarrow{p\tau_3} G_3 \xleftarrow{p\tau_4} \ldots$$

Выберем в группах G_n наборы свободных образующих, согласованные в том смысле, что в число образующих следующей группы входят поднятия образующих предыдущей и образующие ядра. Представим каждую из этих образующих узлом. Мы получим систему узлов K_i и соответствующих размерностей τ_i , причем τ_i – наименьшее из чисел, при которых никакой узел кратный K_i не τ_i-тривиален. Пусть α – инвариант степени n и пусть $A(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \alpha\left(\#_{i=1}^{k} m_i K_i\right)$, причем в сумме участвуют узлы с $\tau_i \leq n$. Тогда A является многочленом, степень которого не больше n , что видно из его конечных разностей порядка $n+1$. Обращение в 0 этих разностей представляет собой соотношение (5.I) для схемы, каждое направление которой разрушает соответствующее слагаемое.

Пусть теперь β_i – первичный инвариант степени τ_i , обра-

щающийся в 1 на узле k_i и в 0 на остальных k_j. Покажем, что
$\beta = A(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$ имеет степень n (с учетом степеней r_i для
входящих в него образующих β_i). Рассмотрим моном $\prod_j \beta_{i_j}^{l_j}$ наи-
большей степени из входящих в β . Пусть теперь q_j – такие числа,
что узлы $q_j\, k_{i_j}$ $-(r_{i_j}-1)$ -тривиальны. Выберем для каждого из
этих узлов разрушающую схему s_j размерности r_{i_j} . Тогда размер-
ность схемы $s = \# l_j s_j$ совпадает со степенью β . Рассмотрим со-
отношение вида (5.I) для схемы s , перестроенной во всех ее на-
правлениях (s') и инварианта α . Все узлы, получающиеся перестрой-
ками в направлениях схемы s' , являются связными суммами узлов
k_i и, поэтому, значения α и β на них совпадают. Для каждого
из мономов не старшей размерности, исходя из леммы 5.8, полу-
чится 0 . Для мономов старшей размерности воспользуемся соответ-
ствующее число раз леммой 5.6. Тогда получится (в отдельных сла-
гаемых), что каждому сомножителю β_i монома соответствует схема,
подчиненная s' , схемы эти не имеют общих направлений, а само
слагаемое получается перемножением левых частей соотношений вида
(5.I), написанных для инвариантов β_i и соответствующих им схем.
Но такие левые части могут отличаться от 0 , только если инвари-
анту β_{i_j} соответствует s_j . Поэтому ненулевой вклад в сумму
дает только моном $\prod_j \beta_{i_j}^{l_j}$, причем его вклад равен $\prod_j l_j!\, q_j^{l_j}$,
то есть отличен от 0 . В результате мы видим, что степень β как
многочлена не превосходит степени α как инварианта.

Покажем теперь, что, как инвариант, β совпадает с α .
Это заведомо так для связных сумм узлов k_i . Степень β как ин-
варианта, в силу леммы 5.8, не превосходит его степени как много-
члена, то есть не больше n . Пусть теперь k – узел, для которого
$\alpha(k) \neq \beta(k)$. Рассмотрим его образ в группе G_n и разложим его
по выбранным образующим. Тем самым мы найдем узел $k' = \# m_i k_i$,
класс n -эквивалентности которого отличается от класса узла k
элементом кручения. Выбрав подходящее число q , мы увидим, что
узел qk n -эквивалентен узлу qk' . Поскольку, в силу леммы
5.I, инварианты α и β узлов mqk и mqk' совпадают, а узел
mqk' – связная сумма узлов k_i , получаем, что $\alpha(mqk) = \beta(mqk')$
для всех натуральных m . Осталось заметить, что $\alpha(mk)$ и $\beta(mk')$ –
многочлены от m и, различаясь при $m=1$, не могут совпадать
в бесконечном числе точек.

Теперь видно, что степень β как многочлена не меньше сте-
пени α (то есть того же β) как инварианта. Таким образом, сте-
пени в том и другом смысле совпадают.

Утверждение для $\mathbb{Z}$ получается из того, что всякий цело-
численный инвариант является рациональным, а инварианты β_i цело-
численны.

ЗАМЕЧАНИЕ. Кольцо (или группа) инвариантов конечной степени
со значениями в группе, имеющей кручение, устроено сложнее. Од-
нако леммы 5.I и 5.7 показывают, что инварианты степени n опре-
деляются в терминах конечной последовательности групп и гомомор-
физмов

$$0 - GK_1 \xleftarrow{pr_2} GK_2 \xleftarrow{pr_3} \dots \xleftarrow{pr_n} GK_n .$$

Впрочем, вызывает сомнение наличие кручений в группах GK_n , а
следовательно, и необходимость рассматривать такие инварианты.

Литература

1. Г у с а р о в М.Н. Новая форма многочлена Конвея-Джонса ориентированных зацеплений. Записки научных семинаров ЛОМИ, 1991, т.193, 4-9.
2. Y. O h y a m a. A new numerical invariant of knots induced from their diagrams. Topology Appl., 1990, 37, 249-255.
3. M. Y a m a m o t o. Knots is spatial embedding of the complete graph on four vertices. Topology Appl., 1991, 38.

Gusarov M.N. On n-equivalence of knots and invariants of finite degree.

A notion of n-equivalence of knots is introduced and it is shown that the equivalence classes with the connected sum operation make finitely generated abelian groups composing an inverse sequence. The n-equivalence class of knot is the universal invariant of degree n (Vassiliev invariant).