Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Дужин Сергей Васильевич

# КОМБИНАТОРНЫЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ ИНВАРИАНТОВ ВАСИЛЬЕВА

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург 2011

Работа выполнена в лаборатории теории представлений и вычислительной математики Учреждения Российской академии наук Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

| | |
|---|---|
| Официальные оппоненты: | доктор физико-математических наук,<br>профессор Виро Олег Янович,<br>в.н.с. Санкт-Петербургского отделения<br>Математического института<br>им. В. А. Стеклова РАН |
| | доктор физико-математических наук<br>Дынников Иван Алексеевич,<br>в.н.с Математического института<br>им. В. А. Стеклова РАН, Москва |
| | доктор физико-математических наук,<br>Омельченко Александр Владимирович,<br>зав. кафедрой математических и информационных технологий Санкт-Петербургского академического университета |
| Ведущая организация: | Независимый Московский университет |

Защита состоится «___»__________20__г. в ___ часов на заседании совета Д 212.232.29 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27, Санкт-Петербургское отделение Математического института имени В. А. Стеклова РАН, ауд. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан «___»___________2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.232.29
доктор физ.-мат. наук, профессор В. М. Нежинский

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.**

Диссертационная работа относится к исследованиям по теории инвариантов конечного типа (инвариантов Васильева или Васильева–Гусарова) маломерных топологических объектов, главным образом узлов и зацеплений. Эта сравнительно молодая область топологии зародилась в начале 80-х годов XX веке в работах В. Васильева (Москва) и М. Гусарова (Санкт-Петербург). На протяжении 20 лет она переживала бурный период развития, когда к работе по этой тематике подключился целый ряд первоклассных ученых: М. Концевич, Д. Бар-Натан, Т. Ле, Дж. Бирман, П. Картье, Л. Кауффман и др.

Теория оказалась, с одной стороны, достаточно прозрачной, ибо теоремой Васильева–Концевича быстро сводится к чистой комбинаторике диаграммных алгебр, с другой стороны, весьма содержательной, ибо включила в себя, как частные случаи, все известные полиномиальные и квантовые инварианты узлов. При этом многие фундаментальные вопросы, возникшие с самого начала, например, вопрос о полноте системы инвариантов Васильева для узлов, остаются открытыми по сей день.

Обнаружилась связь этой теории с различными областями математики: с теорией Черна–Саймонса, с ассоциатором Дринфельда (а через него с теорией чисел в виде науки о значениях кратных дзета-функций), с топологией трехмерных многообразий, где был сконструирован инвариант LMO по образцу интеграла Концевича, и вообще, инварианты конечного типа начали находить в самых разных местах (примером чему явлается так называемая игрушечная теория инвариантов конечного типа, описанная в диссертации).

Таким образом, исследования по инвариантам конечного типа могут иметь интересные приложения не только в самой теории узлов, но и в различных областях математики.

**Цель работы.** Целью работы является исследование различных свойств инвариантов Васильева узлов и зацеплений, основанное на их интерпретации при помощи комбинаторных алгебр, порожденных графами различного рода с дополнительными структурами.

**Методы исследований.** Мой общий метод — это известный метод Эйлера, основанный на изучении большого числа частных случаев, затем формулировке гипотезы, проверке ее на более сложных случаях и в конце концов доказательстве. В более частном виде, мне пришлось использовать методы алгебраической топологии, такие как эйлерова характеристику, разного рода перестройки многообразий, компьютерную алгебру, комбинаторику диаграмм и т.п. В главе 2 пришлось применить основные теоремы математического анализа на многообразиях, такие как теорему Фубини и формулу Стокса.

**Теоретическая и практическая ценность.** Диссертация имеет теоретический характер. Разработанные в ней методы и полученные результаты могут быть применены для изучения узлов, зацеплений, кос и трехмерных многообразий. Материалы диссертации могут составить содержание специальных курсов, для студентов и аспирантов, обучающихся по специальности математика.

**Научная новизна.** В диссертации представлены следующие новые результаты. (Перечисляются только результаты, опубликованные в изданиях из списка ВАК).

1. Доказательство первой нетривиальной верхней оценки на размерность пространства инвариантов Васильева посредством изучения хребтовых диаграмм (раздел 4.1).

2. Введение понятия графа пересечений хордовой диаграммы (раздел (раздел 3.1) и получение с его помощью первой нетривиальной нижней оценки на размерность пространства инвариантов Васильева.

3. Получение суперполиномиальной нижней оценки на размерность примитивного пространства в алгебре хордовых диаграмм при помощи весовой системы, построенной по алгебре Ли $\mathfrak{gl}_N$ (раздел 4.3).

4. Полное доказательство теоремы Концевича об универсальном инварианте Васильева с заполнением всех пробелов оригинального доказательства (глава 2).

5. Введение и изучение клейновых весовых систем (раздел 3.5). Описание, в связи с этим, разложимых кососимметрических функций (раздел 3.6).

6. Введение и изучение алгебры 3-графов (раздел 5.1).

7. Построение теории «игрушечных» инвариантов Васильева, в известном смысле двойственной обычной теории (раздел 5.2).

8. Доказательство существования инварианта Васильева, различающего ориентацию двухкомпонентных струнных зацеплений (раздел 5.3).

9. Вычисление символа полинома Конвея на трехструнных крашеных косах, полученного с использованием короткого замыкания кос и разложения Магнуса (раздел 5.4).

10. Компьютерно-вычислительные результаты: (а) нахождение системы образующих алгебры 3-графов до степени 20 (пункт 5.1), (б) нахождение значений Ли-алгебраических весовых систем на образующих алгебр диаграмм Якоби (пункт 3.3), (в) явное разложение логарифма ассоциатора

Дринфельда по базису свободной алгебры Ли, состоящему из слов Линдона (упоминается в разделе 5.4), (г) доказательство Предложения 1 из раздела 5.3.

11. Изобретение двух способов вычисления полинома Конвея для парных узлов (раздел 5.6).

**Апробация работы.** Результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах: международной конференции по теории узлов в университете Васэда (Токио, 1997); на общеинститутском семинаре ПОМИ под руководством проф. А.М.Вершика в 2002 и 2011 годах; на заседании Московского Математического общества в 1998 году; на семинаре И.Р.Шафаревича в МИАН в 2010 году; на семинаре под руководством М.Концевича и Н.Некрасова (IHES, Франция, 2007 год), на семинаре под руководством В.И.Арнольда в Москве в 1995 году и на его же семинаре в Париже в 2006 году; на семинаре по квантовым группам под руководством Касселя (Страсбург, 2010 год); на общематематическом семинаре Оксфордского университета в 1998 году и др.

**Публикации.** По теме диссертации написано 26 работ, в том числе 10 работ изданы в журналах и других изданиях, входящих в список ВАК, и 16 работ в прочих изданиях. (В перечень ВАК мы включаем издания [1,3,4,5,6,7], которые входят в систему цитирования Web of Science: Science Citation Index Expanded).

Укажем, какие именно результаты принадлежат автору в совместных работах.

В работе [1] мне принадлежит введение понятия хребтовых диаграмм и доказательство ключевой леммы; соавтор завершил доказательство основной теоремы.

В работе [2] я придумал конструкцию алгебры 3-графов, доказал корректность умножения в нем, изучил связь между пространством 3-графов и и примитивным подпространством в алгебре Хопфа хордовых диаграмм и провел исследование структуры алгебры 3-графов в малых степенях.

В работе [3] мне принадлежит исходная идея рассмотрения семейства «багетных» диаграмм и доказательство квадратичной асимптотической оценки снизу на размерности примитивных инвариантов Васильева, ранее опубликованное мною отдельно в трудах международной конференции [14], а в данной статье обобщенное совместными усилиями на случай многочленов произвольной степени.

В работе [4] мне принадлежит написание основной части разделов 1, 2 и 4, в которых заполнен ряд пробелов в исходном доказательстве Концевича.

В работе [7] мною целиком написано доказательство в размерностях 1 и 2 (параграфы 2 и 3), а также доказана лемма 9 из параграфа 4.

В работе [8] мне принадлежит формулировка теоремы и ее первое доказательство, а соавтору — второе (упрощенное) доказательство.

В цикле совместных работ [11–13] мне принадлежат следующие результаты: (1) идея рассмотрения графа пересечений хордовых диаграмм в контексте теории инвариантов Васильева, (2) постороение первого примера инварианта, который пропускается через графы пересечений (он происходит из хроматического многочлена этого графа), (3) формулировка и доказательство обобщенного четырехчленного соотношения для весовых систем, (4) получение нижней оценки на размерности пространств инвариантов Васильева, основанное на использовании весовой системы, возникающей из хроматического многочлена графа пересечений.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация изложена на 237 страницах и состоит из 5 глав, включая вводную, разбитых на 27 параграфов, и списка использованной литературы, включающего 123 наименования.

## СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

### Глава 1. Введение

Эта глава не содержит собственных результатов автора и включена в текст для возможности автономного чтения диссертации и единообразия терминов и обозначений. В ней приводятся основные определения и теоремы, на которых базируется изложение остальных глав. Приведем содержание этой главы по параграфам.

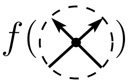
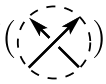
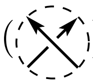
Параграфы 1.1 «Исторические сведения» и 1.2 «Узлы и их инварианты» имеют общеописательный характер, и мы не станем их комментировать в настоящем тексте.

Параграфы 1.3 «Инварианты конечного типа» и 1.4 «Алгебра хордовых диаграмм» имеют центральный характер для введения, именно здесь даются основные определения и формулируются главные теоремы всей теории.

Для того, чтобы дать определение инвариантов Васильева, мы вводим понятие особого узла и продолжаем инварианты, первоначально заданные на обычных узлах, на множество всех особых узлов. *Особым узлом* называется гладкое отображение $K : S^1 \to \mathbb{R}^3$, являющееся вложением всюду, кроме конечного числа простых двойных точек (т. е. точек трансверсального самопересечения).

Множество всех особых узлов с $n$ двойными точками, рассматриваемых с точностью до изотопии, мы обозначим через $\mathcal{K}_n$. В частности, $\mathcal{K}_0$ — это множество (классов эквивалентности) обычных узлов. Буквой $\mathcal{K}$ без индекса мы будем обозначать объединение всех $\mathcal{K}_n$.

Пусть $f : \mathcal{K}_0 \to \mathbb{C}$ — некоторый инвариант узлов. *Продолжение инварианта $f$ на особые узлы* — это функция $f : \mathcal{K} \to \mathbb{C}$, совпадающая на $\mathcal{K}_0$ с $f$ и удовлетворяющая *скейн-соотношению Васильева*

$f($$) = f($$) - f($$).$

**Определение.** Функция $f : \mathcal{K}_0 \to \mathbb{C}$ называется *инвариантом Васильева* порядка (или степени) $\leqslant n$, если ее продолжение на множество особых узлов обращается в нуль на всех узлах, имеющих более чем $n$ точек самопересечения.

Оказывается, что в векторном пространстве $\mathcal{A} = \oplus_{n=0}^{\infty} V_n/V_{n-1}$ есть умножение и коумножение (умножение даже двух естественных видов), и это пространство допускает описание в терминах (а) хордовых диаграмм, (б) диаграмм Фейнмана, (в) диаграмм Якоби.

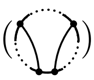
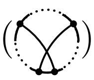
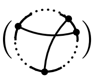
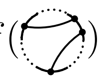
Мы сформулируем еще фундаментальную теорему теории инвариантов конечного типа, которая сводит топологические вопросы в значительной степени к комбинаторике диаграмм. Под *весовой системой* понимается линейный функционал на пространстве $\mathcal{A}$ (или на ее однородной компоненте).

**Теорема 1.2**

(1) (В. Васильев) Всякая весовая система удовлетворяет

(а) одночленным соотношениям: $f(D) = 0$ для любой диаграммы $D$, содержащей изолированную хорду, то есть хорду, не пересекающую никаких других хорд.

(б) четырехчленным соотношениям

$f($$) - f($$) + f($$) - f($$) = 0$ (1)

(фигурирующие здесь хордовые диаграммы отличаются друг от друга положением одной хорды; предполагается, что к пунктирным участкам окружности может быть приложен любой набор хорд, один и тот же во всех четырех случаях).

(2) (М. Концевич) Любая функция на множестве хордовых диаграмм степени $n$,, удовлетворяющая а) и б), происходит из некоторого инварианта Васильева порядка $\leqslant n$.

Параграф 1.5 «Основные результаты диссертации». (Список приведен выше, под заголовком «научная новизна».)

## Глава 2. Интеграл Концевича

Во второй главе дается подробное доказательство фундаментальной теоремы Васильева–Концевича. Дело в том, что сам Концевич в своей оригинальной публикации 1993 года ограничился лишь наброском доказательства. Первое полное исследование свойств интеграла Концевича и доказательство его универсальности среди инвариантов Васильева было дано в статье С.Чмутова и автора [3], вначале вышедшей в 1997 году как препринт института Макса Планка. В настоящем изложении мы следуем в основном тексту книги [26], в котором исправлены некоторые огрехи статьи [3].

В параграфе 2.1 «Простейший интеграл типа Концевича» формулируется и доказывается принадлежащая автору Теорема 2.1, дающая интегральную формулу для коэффициента зацепления двух кривых в пространстве. Настоящий интеграл Концевича представляет собой далеко идущее обобщение этой теоремы.

В следующем разделе 2.2 «Конструкция и основные свойства» дается определение интеграла Концевича, которое вместе с необходимыми комментариями занимает несколько страниц. Мы приведем здесь только итоговую формулу:

**Определение.** *Интеграл Концевича* узла $K$ — это следующий элемент пополнения $\hat{\mathcal{A}}$ алгебры хордовых диаграмм:

$$Z(K) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi i)^m} \int\limits_{\substack{t_{\min}<t_1<\dots<t_m<t_{\max} \\ t_j \text{ некритические}}} \sum_{P=\{(z_j,z'_j)\}} (-1)^{\downarrow} D_P \bigwedge_{j=1}^{m} \frac{dz_j - dz'_j}{z_j - z'_j} .$$

Оказывается, что для корректного обращения с интегралом Концевича полезно расширить его определение на произвольные связки в $\mathbb{R}^3$, то есть на одномерные многообразия, помещенные в некоторый координатный параллелепипед так, что граница может выходить только на горизонтальные основания, причем трансверсально. В параграфе 2.3 «Интеграл Концевича для связок» излагается соответствующая теория.

В следующем разделе 2.4 «Сходимость интеграла» доказано предложение 2.3 о сходимости интеграла Концевича для произвольных строго морсовских связок.

Далее, параграф 2.5 посвящен инвариантности интеграла Концевича. А именно, здесь доказана теорема 2.2:

*Интеграл Концевича не меняется при деформации узла в классе (необязательно строго) морсовских узлов.*

В разделе 2.6 мы доказываем, что интеграл Концевича узла домножается на некоторый фиксированный множитель при изменении на два количества критических точек. Этот множитель представляет собой так называемый интеграл Концевича от неузла, то есть от тривиального узла, вложенного в пространство с двумя максимумами и двумя минимумами. Это свойство позволит нам в следующем параграфе построить «окончательный» интеграл Концевича, являющийся настоявшим инвариантом узлов.

Наконец, в заключительном параграфе 2.7 второй главы на основании изложенного выше строится универсальный инвариант Васильева, который получается делением в алгебре рядов $\mathcal{A}$ интеграла Концевича данного узла $Z(K)$ на выражение $Z(H)^{c/2}$, где $H$ — тривиальный узел, вложенный в пространство с двумя максимумами и двумя минимумами, а $c$ — число критических точек исходного вложения узла $K$. Итоговая теорема 2.4 звучит так:

*Универсальный инвариант Васильева $I$ обладает в точности такой же силой, как совокупность всех (комплекснозначных) инвариантов Васильева: для любых двух узлов $K_1$ и $K_2$ выполняется эквивалентность*

$$I(K_1) = I(K_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad v(K_1) = v(K_2).$$

## Глава 3. Конструкции весовых систем

В этой главе излагаются различные конструкции весовых систем для инвариантов Васильева узлов и зацеплений. Некоторые из них принадлежат целиком автору (параграфы 3.1, 3.5 и 3.6). Остальные восходят к работам М.Концевича, но в данном тексте сильно переработаны для случая универсальной обертывающей и симметрической алгебры для алгебры Ли полной матричной группы, а также ее тензорных степеней.

В параграфе 3.1 «Построение весовых систем по графу пересечений хордовой диаграммы» излагается принадлежащая автору конструкция 1992 года построения весовой системы при помощи хроматического многочлена графа пересечений.

В следующих трех параграфах (3.2, 3.3, 3.4) излагаются способы построения весовых систем соответственно для алгебры хордовых диаграмм, алгебры диаграмм Фейнмана и алгебры диаграмм Якоби. Основополагающие идеи здесь принадлежат, как я уже говорил, М.Концевичу; автору принадлежит явная специализация общих конструкций для алгебра Ли $\mathfrak{gl}_N$.

В параграфе 3.5 «Клейновы весовые системы» излагается оригинальная конструкция автора весовых систем, основанная на других принципах, чем системы, происходящие из метризованных алгебр Ли. (Заметим, что исходная идея, послужившая толчком для этих исследований, найдена автором в одной неопубликованной рукописи Ю.В.Матиясевича.) Любопытно, что за 10 лет, прошедших с введения клейновых весовых систем, никому так и не удалось доказать их сводимость к Ли-алгебраическим системам. В частности, остается неясным, могут ли такие системы различать ориентацию узлов (это одна из главных открытых проблем в теории инвариантов Васильева).

Наконец, последний раздел данной главы 3.6 «Разложимые кососимметрические функции» возник в попытке обобщить один вспомогательный результат из предыдущего раздела. А именно,здесь дается критерий, во внутренних терминах, в каком случае данная кососимметрическая функция нескольких переменных может быть представлена в виде определителя нескольких функций одной переменной (Теорема 3.6).

## Глава 4. Оценки размерностей пространств инвариантов

Как известно, точные размерности пространств инвариантов Васильева для узлов известны только до степени 12, я для асимптотики этой размерности, когда степень стремится к бесконечности, известны лишь нижние и верхние оценки. К установлению и постепенному усилению этих оценок приложили руку многие математики. В настоящей главе отражен личный вклад автора в эту деятельность.

Параграф 4.1 «Оценка сверху для размерности пространств хордовых диаграмм». Здесь излагается совместный результат автора и С.В.Чмутова 1994 года [1], что размерности последовательных факторов пространств инвариантов Васильева оцениваются так: $\dim \mathcal{V}_n/\mathcal{V}_{n-1} \leq (n-1)!$. На тот момент это была наилучшая известная оценка, впоследствии несколько раз улучшенная.

Параграф 4.2 «Нижняя оценка на основе весовых систем, определяемых графом пересечений». Здесь доказана теорема о существовании в каждой размерности хотя бы одной ненулевой однородной весовой системы. Отсюда уже, по общим свойствам свободных полиномиальных алгебр, вытекает асимптотическая нижняя оценка типа Харди–Рамануджана $e^{c\sqrt{n}}$ на размерности однородных компонент алгебры хордовых диаграмм $\dim \mathcal{A}_n$.

В параграфе 4.3 «Нижняя оценка на основе весовых систем, строящихся по алгебрам Ли» мы используем весовую систему для алгебры диаграмм Якоби со значениями в симметрической алгебре пространства $\mathfrak{gl}_N$ для того, чтобы доказать, что размерности подпространств примитивных элементов алгебры Хопфа диаграмм Якоби $P_n(\mathcal{B})$ растет асимптотически быстрее любого полинома. Это делается явным предъявлением достаточно большого семейства диаграмм и доказательством их линейной независимости при помощи некоторой специализации $\mathfrak{gl}_N$-весовой системы. Вскоре после написания нашей статьи О. Дасбах улучшил наш результат нашим же методом: он просто рассмотрел другое, более удачное семейство диаграмм Якоби. В итоге получен мировой рекорд на нижнюю асимптотическую оценку, который держится и по сей день.

## Глава 5. Разное

В этой главе рассматривается и решается ряд разрозненных проблем, так или иначе связанных с комбинаторикой инвариантов Васильева.

В первом параграфе 5.1 данной главы строится некая коммутативная и ассоциативная алгебра, порожденная однородными трехвалентными графами по модулю определенного рода соотношений, и устанавливается ее связь с различными объектами, в частности, с примитивным подпространством пространства инвариантов Васильева и с теоремой о 4 красках.

В разделе 5.2 мы строим «игрушечную теорию инвариантов Васильева», то есть теорию инвариантов конечного типа не для узлов (вложений прямой в $\mathbb{R}^n$), а для коузлов (гиперповерхностей в $\mathbb{R}^n$, которые мы представляем себе как множества уровня $\{f = 0\}$ гладких функций, не имеющих в 0 критической точки. Эта теория доводится до конца в случаях $n = 1, 2, 3$ и дает полное описание алгебры инвариантов конечного типа: в каждом из трех этих случаев она оказывается алгеброй полиномов от одной образующей. В частности, она не различает только эйлерова характеристику в размерности 3, за что мы и назвали эту теорию «игрушечной». Впрочем, доказательства всех необходимых утверждений оказались вполне нетривиальны.

Следующий параграф «Ориентация зацеплений и инварианты конечного типа» возник из наших попыток решить проблему существования инвариантов Васильева узлов, различающих обращение ориентации. Эту проблему мы так и не решили, но зато дали первое строгое доказательство того, что аналогичная проблема имеет положительное решение в случае двухкомпонентных струнных зацеплений.

**Теорема 5.5**. *Существует инвариант Васильева $f$ порядка, не превосходящего 7, и двухкомпонентное струнное зацепление $L$, такие, что $f(L') \neq f(L)$.*

Эта теорема доказана двумя способами, один принадлежит первому автору, второй — второму.

В параграфе 5.4 «Разложение Магнуса и полином Конвея» речь идет о следующем исследовании. Разложение Магнуса представляет собой универсальный инвариант конечного типа крашеных кос со значениями в пространстве горизонтальных хордовых диаграмм. Композиция многочлена Конвея с отображением короткого замыкания кос в узлы порождает серию инвариантов конечного типа крашеных кос и, следовательно, пропускается через разложение Магнуса. Мы явно описываем получаемое отображение горизонтальных хордовых диаграмм в целочисленные многочлены от одной переменной и вычисляем его значение на ассоциаторе Дринфельда, оказывающееся замечательным бесконечным рядом, коэффициенты которого суть (гипотетически) альтернированные суммы кратных дзета-значений.

Короткое замыкание порождает отображение из группы крашеных кос во множество (топологических типов) ориентированных узлов. Всякий инвариант Васильева узлов можно превратить, таким образом, в инвариант конечного типа крашеных кос. Существует универсальный инвариант конечного типа крашеных кос, задаваемый разложением Магнуса. В этой статье мы дадим явное описание (через значения на базисных элементах) отображения пространства горизонтальных хордовых диаграмм на трех нитях, получаемого при пропускании многочлена Конвея, перенесенного на косы, через разложение Магнуса.

В разделе 5.5 «Доказательство гипотезы Пшитыцкого о парных диаграммах» доказана гипотеза, высказанная известным математиком Йозефом Пшитыцким в 1987 году и простоявшая открытой 24 года. Пшитыцкий предположил, что некоторые узлы невозможно представить так называемыми парными (matched) диаграммами, то есть плоскими диаграммами, все перекрестки которых разбиты на пары простейшего вида (квадрат образующей группы кос на двух нитях). Мы доказываем, что таким свойством обладает, например, крендельный узел $P(3,3,-3)$. Дело в том, что его второй идеал Александера порожден в кольце многочленов Лорана $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ элементами 3 и $t+1$ и не может быть порожден многочленами от конвеевской переменной $z^2 = t + t^{-1} - 2$, тогда как любая парная диаграмма позволяет построить специальную матрицу Александера, зависящую только от $z^2$.

Наконец, в последнем параграфе 5.6 «Алгоритм вычисления полинома Конвея по двудольному графу», тематически связанному с предыдущим, мы описываем и доказываем два любопытных алгоритма вычисления полинома Конвея для узлов, имеющих парную диаграмму. Оказывается, для таких узлов полином Конвея можно считывать непосредственно с (двудольного оснащенного) графа пересечений соответствующей хордовой диаграммы.

**Публикации автора по теме диссертации**
**в изданиях из перечня ВАК:**


1. S. Chmutov, S. Duzhin. *An upper bound for the number of Vassiliev knot invariants*, J. Knot Theory Ramifications **3** (1994), 141–151.

2. С.В.Дужин, А.И.Каишев, С.В.Чмутов. *Алгебра 3-графов.* Труды Математического Института им. В.А.Стеклова, т. 221 (1998), с. 168–196.

3. S. Chmutov, S. Duzhin, *A lower bound for the number of Vassiliev knot invariants.* Topology and its Applications **92** (1999) 201–223.

4. S. Chmutov, S. Duzhin. *The Kontsevich integral*, Acta Appl. Math. **66** (2001), 155–190.

5. S. Duzhin, *Lectures on Vassiliev knot invariants*, Lectures in Mathematical Sciences, vol. 19, The University of Tokyo Press, 2002. 123 pp. (монография).

6. S. Duzhin. *Decomposable skew-symmetric functions.* Moscow Mathematical Journal, v. 3, no. 3 (2003), p. 881–888.

7. S. Duzhin, J. Mostovoy. *A toy theory of Vassiliev invariants.* Moscow Mathematical Journal 6(1), p. 85-93 (2006).

8. С. В. Дужин, М. В. Карев. *Определение ориентации струнных зацеплений при помощи инвариантов конечного типа.* Функц. анализ и его приложения, т. 41, вып. 3, стр. 48–59, 2007).

9. С. В. Дужин. *Многочлен Конвея и разложение Магнуса.* Алгебра и Анализ, том 23 (2011), вып. 3, с. 175–188, 5 стр.

10. С. В. Дужин. *Алгоритмы вычисления полинома Конвею по двудольному графу.* Информационно-вычислительные системы, N4 (2011), стр. 89–91.

**Другие публикации автора по теме диссертации**

11. S. Chmutov, S. Duzhin and S. Lando. *Vassiliev knot invariants I. Introduction*, Singularities and bifurcations, Adv. Soviet Math. **21** 117–126, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

12. S. Chmutov, S. Duzhin and S. Lando, *Vassiliev knot invariants II. Intersection graph conjecture for trees*, Singularities and bifurcations, Adv. Soviet Math. **21** 127–134, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

13. S. Chmutov, S. Duzhin and S. Lando, *Vassiliev knot invariants III. Forest algebra and weighted graphs*, Singularities and bifurcations, Adv. Soviet Math. **21** 135–145, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

14. S. Duzhin. *A quadratic lower bound for the number of primitive Vassiliev invariants.* Extended abstract, KNOT'96 Conference/Workshop report, Waseda University, Tokyo, July 1996, p. 52–54.

15. S. Duzhin. *The Matiyasevich polynomial, four colour theorem and weight systems*. In: Art of low-dimensional topology VI (ed. T. Kohno), Kyoto, 2000, pp. 9–14. Available on-line at `http://www.pdmi.ras.ru/~duzhin/papers`.

16. S. Duzhin. *On the Kleinian weight systems*. In: Low-Dimensional Topology of Tomorrow, Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku 1272, June 2002, p. 84–90. Available on-line at `http://www.pdmi.ras.ru/~duzhin/papers`.

17. С. В. Дужин.*Инварианты Васильева–Гусарова*. В сборнике: Математика XX века. Взгляд из Петербурга. Под редакцией А.М.Вершика. М.: МЦНМО, 2010, стр. 87–116.

18. С. В. Дужин, С. В. Чмутов. *Узлы и их инварианты*, «Математическое просвещение», вып. 3, 1999, с. 59–93.

19. S. V. Duzhin, A. I. Kaishev. *Calculation of central generators of the universal enveloping algebras and Vassiliev–Kontsevich weight systems.*// Proceedings of the international workshop «New Computer Technologies in Control Systems» (editors: M.G.Dmitriev, Yu.L.Sachkow). Pereslavl-Zalessky, August 13-16, 1995.

20. С. В. Дужин, А. И. Каишев. *Реализация в Т-системе программы вычисления sl- и so-полиномов для 3-графов*. В сборнике «Программные системы» (труды Института Программных Систем), Москва, Наука, Физматлит, 1999, с. 214–223.

21. S. Chmutov, S. Duzhin. *The Kontsevich integral.* Encyclopedia of Mathematical Physics, eds. J.-P.Francoise, G.L.Naber and S.T.Tsou. Oxford: Elsevier, 2006 (ISBN 978-0-1251-2666-3), volume 3, pp. 231–239.

**Материалы по диссертации, размещенные в Интернете**

22. С. Дужин. *Программы и файлы данных, относящиеся к вычислению весовых систем $\phi$ и $\psi$*. 2009.
`http://www.pdmi.ras.ru/~arnsem/dataprog/OrLinks/`.

23. S. Duzhin, *Program and data files related to the Drinfeld associator*, 2009, online at `http://www.pdmi.ras.ru/~arnsem/dataprog/associator/`.

24. S. Duzhin, M. Shkolnikov. *Bipartite knots*.
`http://arxiv.org/abs/1105.1264`.

25. С. В. Дужин. *Доказательство гипотезы Пшитыцкого о парных диаграммах*. Препринт ПОМИ 2011-9.

26. S. Chmutov, S. Duzhin and J. Mostovoy. *Introduction to Vassiliev Knot invariants*, Web publication, 512 pp. `arXiv:1103.5628/`.