Алгебра 3-графов*

С. В. Дужин, А. И. Каишев, С. В. Чмутов

Аннотация

Мы вводим и изучаем структуру алгебры в линейном пространстве, порожденном регулярными трехвалентными графами с заданным порядком ребер в каждой вершине, по модулю некоторых соотношений. Обсуждается роль этого объекта в различных областях маломерной топологии и его связь с родственными комбинаторно-алгебраическими структурами.

0 Введение

Регулярные трехвалентные графы, то есть графы, у которых из каждой вершины выходит ровно три ребра, — объект, часто встречающийся в математике. Помимо собственно теории графов, где такие графы называются "кубическими", они естественным образом возникают в топологии трехмерных многообразий, в теории Васильева инвариантов узлов и в связи с теоремой о четырех красках. При этом во всех перечисленных приложениях трехвалентные графы оказываются снабженными дополнительной структурой, состоящей в том, что в каждой вершине выбран одни из двух возможных циклических порядков на множестве трех ребер, ей инцидентных.

В теории инвариантов Васильева трехвалентные графы составляют подмножество системы порождающих элементов примитивного пространства $\mathcal{P}$ градуированной алгебры Хопфа $\mathcal{F}$, присоединенной к фильтрованной алгебре инвариантов конечного порядка. Между элементами, порождающими алгебру $\mathcal{F}$ (связными диаграммами Фейнмана или "иероглифическими диаграммами" в терминологии Д. Бар-Натана [BN1]) имеется два вида соотношений ("антисимметрия" и "IHX", или, в другой системе координат, 1- и 4-членные соотношения). Эти соотношения ограничиваются на подпространство, натянутое на множество всех трехвалентных графов, и приводят к конструкции "пространства 3-графов". На пространстве 3-графов имеется коммутативное умножение, определяемое связной суммой и аналогичное умножению хордовых диаграмм, но почему-то до сих пор никем не отмеченное и не изученное, хотя подобные структуры вводились многими авторами (например, [Va, BN1, Kon, Vai, CV, Vo]). Определению алгебры 3-графов мы посвящаем §1 настоящей статьи.

В параграфе 2 мы приводим таблицы, показывающие устройство алгебры графов в малых размерностях, а в параграфе 3 описываем компьютерные вычисления, проделанные для построения этих таблиц.

В четвертом параграфе обсуждается конструкция (восходящая, насколько нам известно, к Пенроузу [Pen] и Концевичу [Kon]) инвариантов, определенных на алгебре графов

*Работа поддержана грантами РФФИ (95-01-00846a), INTAS (4373), NWO (47.03.005).

и строящихся по алгебре Ли с заданной ad-инвариантной билинейной невырожденной формой. Здесь же приведены таблицы значений этих инвариантов на образующих.

Параграф 5, написанный под влиянием блестящей статьи Бар-Натана [BN2], посвящен теореме о четырех красках. В качестве гипотезы эта теорема была сформулирована Ф. Гатри (Francis Guthrie) в 1852 году. Доказана теорема в 1976 году К. Аппелем и В. Хакеном. Доказательство опирается на компьютерные вычисления, описание которых составляет книгу размером 741 страниц [AH] (см. также [SK]). В последнее время наблюдается заметное повышение интереса к теореме о четырех красках [Kai, Se]. Появились различные алгебраические переформулировки ([Pen, Ka1, Ka2, KaS, BN2]). Имеются даже небезуспешные попытки упростить доказательство Аппеля и Хакена [RSST]. Однако они основаны на том же, довольно прямолинейном, подходе к раскрашиванию карт и сводят доказательство к рассмотрению большого числа конкретных конфигураций, которое осуществляется при помощи компьютерного счета. Наша цель — показать, что алгебра 3-графов является правильным объектом в исследованиях, связанных с теоремой о четырех красках, и позволяет придать им какую-то концептуальную ясность.

В шестом параграфе мы обсуждаем роль алгебры 3-графов в теории инвариантов узлов. Здесь самое любопытное явление состоит в том, что умножение графов позволяет определить структуру некоммутативной алгебры в пространстве примитивных элементов градуированной алгебры $\mathcal{F}$ инвариантов Васильева. Таким образом, пространство примитивных элементов $\mathcal{P}$, которое свободно порождает алгебру $\mathcal{F}$, само по себе наделено другой, внутренней, операцией умножения.

Наконец, в параграфе 7 речь пойдет об инвариантах трехмерных многообразий (гомологических сфер), где алгебра 3-графов, правда, не как алгебра, а как линейное пространство, недавно возникла в работах Т. Оocéуки [Oh1] и Т. Ле [Le].

Читатель может заметить, что никаких чрезвычайных приложений алгебры 3-графов, доходящих до доказательства новых теорем, мы не нашли. Однако сама структура и многообразие ее связей с самыми разными математическими теориями настолько интересны, что мы решили написать и издать настоящий текст. В ряду комбинаторно-алгебраических структур маломерной топологии, включающем алгебру хордовых диаграмм [Va], алгебру диаграмм Фейнмана [Kon, Vai], пространства китайских [BN1] и японских [CV] иероглифов, Λ-модули Вожеля [Vo], алгебра 3-графов — простейший и наиболее естественный с общематематической точки зрения объект, и по этой причине заслуживает пристального изучения.

1 Структура алгебры

1.1 Пространство 3-графов

Прежде всего дадим точное описание основного объекта, с которым мы будем работать.

Определение. *3-графом* называется связный регулярный трехвалентный граф[1], в котором задано *вращение*. *Вращение* — это выбор в каждой вершине графа одного из двух возможных циклических порядков трех ребер, инцидентных этой вершине, т. е. одной из двух перестановок, представляющих цикл длины 3.

[1]Заметим, что число вершин такого графа всегда четно, а число ребер кратно трем.

В этом определении *графам* разрешается иметь кратные ребра и петли. Для графов с петлями понятие вращения требует уточнения. А именно, циклический порядок нужно задавать не на множестве *ребер*, инцидентных данной вершине, а на множестве смежных с ней *полуребер*.

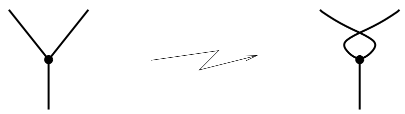
Свободное от топологии определение множества полуребер можно дать следующим образом. Пусть E, V — множества ребер и вершин данного графа, соответственно. Тогда множество полуребер — это "двойное расслоение" $E \overset{\alpha}{\leftarrow} H \overset{\beta}{\rightarrow} V$, то есть множество H с двумя проекциями $\alpha : H \to E$ и $\beta : H \to V$ такими, что (а) прообраз любого ребра $\alpha^{-1}(e)$ состоит из двух точек, (б) мощность каждого множества $\beta^{-1}(v)$ равна степени вершины v, (в) для любой точки $h \in H$ вершина $\beta(h)$ является одним из концов ребра $\alpha(h)$. Тогда вращение — это циклическая перестановка в прообразе каждой вершине $\beta^{-1}(v)$.

Можно вообще забыть о ребрах и вершинах и дать такое, менее наглядное, но более четкое определение 3-графа: это множество H мощности, кратной 6, в котором заданы две перестановки: одна с циклической структурой $(3)(3)\dots(3)$, другая с циклической структурой $(2)(2)\dots(2)$. Связь с предыдущим определением такова: H — это множество полуребер, первая перестановка соответствует вращению в вершинах, а вторая — переходу от одного конца ребра к другому.

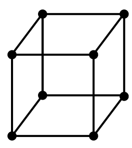
Определение. Два 3-графа называются *изоморфными*, если можно установить взаимно-однозначное соответствие между их множествами полуребер, которое сохраняет вращение и индуцирует обычный изоморфизм графов — или, что то же самое, сохраняет обе структурные перестановки.

Замечания. **1.** Удобно причислить окружность к множеству 3-графов. Мы будем считать ее трехвалентным графом с нулевым числом вершин.

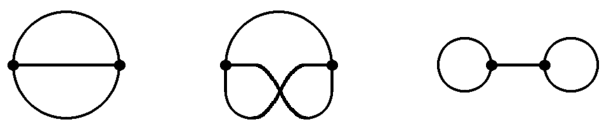
2. Хотя 3-графы являются абстрактными графами, мы будем рисовать их на плоскости. Поскольку не всякий граф планарен, ребра на рисунках могут пересекаться. Мы не принимаем во внимание такие пересечения и не рассматриваем их как вершины графа. Кроме того, мы будем предполагать, что в каждой вершине полуребра упорядочены против часовой стрелки. Изменение вращения в отдельной вершине изображается следующим образом:



Примеры. **1.** Вот типичный пример 3-графа (у него 8 вершин и 12 ребер):

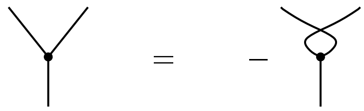


2. С точностью до изоморфизма существует три различных 3-графа порядка 2:

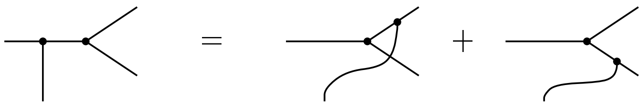


Определение. Пространство Γ_n — это факторпространство линейного пространства над $\mathbb{R}$, порожденного 3-графами с $2n$ вершинами, по модулю следующих соотношений.

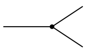
Соотношение антисимметрии (AS):

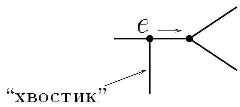


Соотношение Кирхгофа (IHX):



Замечания. 1. Здесь и ниже незаконченные фрагменты графов следует понимать так: это графы, одинаковые (и произвольные) везде, кроме данного явно указанного фрагмента.

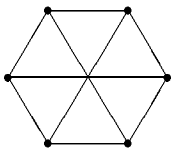
2. Название “соотношение Кирхгофа” навеяно следующей аналогией. Будем представлять себе фрагмент  данного 3-графа как участок электрической цепи, а переменную вершину — как электрон e (с “хвостиком” — третьим входящим в e ребром, начало которого закреплено). Пусть электрон e движется к узлу электрической цепи:



Тогда соотношение (IHX) выражает известное правило Кирхгофа: *сумма токов, входящих в узел, равна сумме токов, выходящих из него.* Эта электротехническая аналогия будет полезна при доказательстве корректности умножения 3-графов (см. ниже).

3. По определению, Γ_0 одномерно и порождено окружностью.

Упражнение. Проверьте, что следующий граф равен нулю как элемент пространства Γ_3:



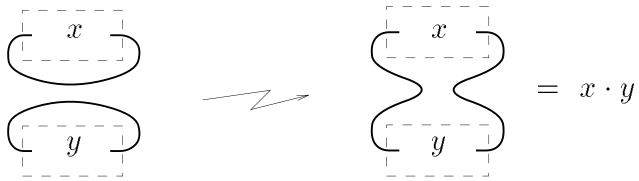
1.2 Умножение

В градуированном пространстве

$$\Gamma = \Gamma_0 \oplus \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \Gamma_3 \oplus \dots \, .$$

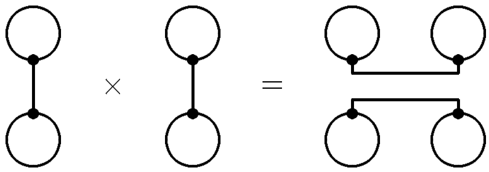
имеется естественная структура коммутативной алгебры.

Определение. *Произведением* двух 3-графов x и y называется 3-граф, полученный следующим образом. Выберем произвольным образом по ребру в x и y. Разорвем эти ребра и приклеим концы, возникшие на одном ребре, к концам, возникшим на другом:



Произведение 3-графов можно понимать как результат вставки одного 3-графа, например x, вместо ребра в 3-граф y.

Замечание. 3-графы по определению связны. Однако, при перемножении двух связных графов может получиться несвязный граф, например:



Тем не менее, легко видеть, что это явление имеет место только в том случае, когда каждый из графов-сомножителей распадается при удалении некоторого ребра, а в этом случае оба они равны 0 как элементы алгебры (см. лемму 2 в §2.1).

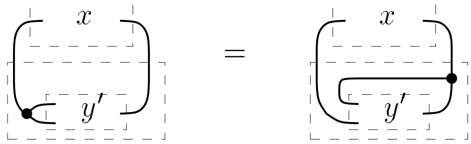
Предложение. *Произведение 3-графов, рассматриваемое как элемент пространства* Γ, *определено корректно.*

Заметим сразу, что если умножение определено корректно, то оно очевидным образом коммутативно.

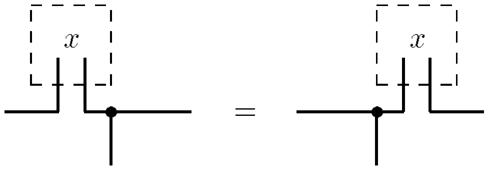
Для доказательства корректности нужно установить два факта. Первый — что по модулю соотношений (AS) и (IHX) произведение не зависит от *выбора* ребер x и y, которые разрываются и склеиваются между собой. Второй — что оно не зависит от *способа склейки* (ясно, что два конца одного ребра можно приклеить к двум концам другого ребра двумя разными способами).

Эти два факта составляют содержание следующих двух лемм. В формулировке первой леммы "подграфом" мы называем часть 3-графа, прикрепленную к оставшейся части двумя ребрами (как сомножитель в произведении).

Лемма 1. (а) *"Хвост" можно пронести через подграф:*

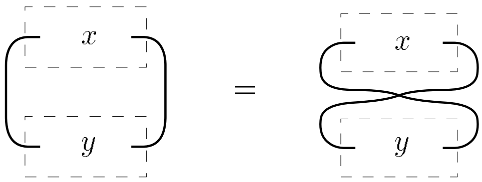


(б) *Подграф можно пронести сквозь соседнюю вершину:*



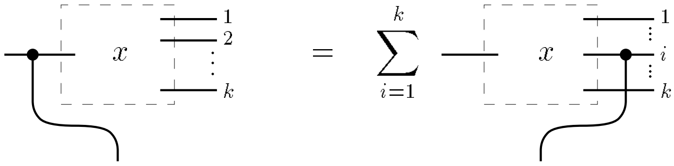
Присмотревшись к рисункам, читатель поймет, что две формулировки леммы 1 ничем друг от друга не отличаются и означают, что результаты вставки 3-графа x в соседние ребра 3-графа y равны между собой. В силу связности y, отсюда вытекает, что произведение не зависит от выбора разрываемого ребра в y.

Лемма 2. *Два разных способа соединения двух графов с разорванными ребрами приводят к одному и тому же результату в пространстве* Γ:



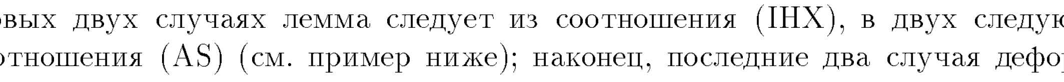
Переходим к доказательству лемм. Лемма 1 является частным случаем, при $k = 1$, следующего более общего утверждения.

Лемма 3. *В пространстве* Γ *выполняется общий закон Кирхгофа:*



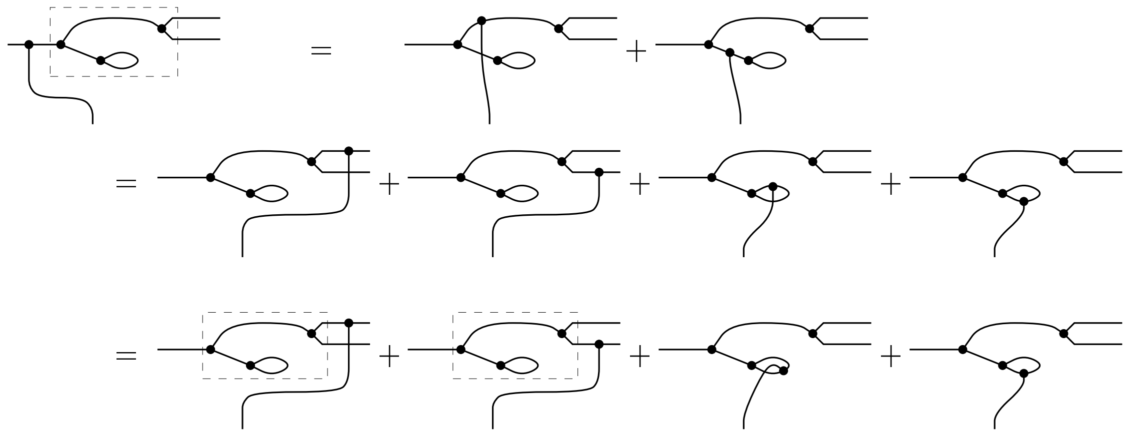
Доказательство Леммы 3. Фиксируем горизонтальную прямую на плоскости, в которую вложен граф, и рассмотим проектирование на нее общего положения. Мы предполагаем, что все вершины нашего 3-графа проектируются в попарно различные точки горизонтальной прямой, а ограничение проектирования на произвольное ребро имеет только морсовские критические точки. Кроме того, можно считать, что все критические значения попарно различны и отличны от образов вершин.

Бифуркационными точками назовем образы вершин и критические значения ограничения проектирования на ребра. Лемма 3 доказывается индукцией по числу бифуркационных точек. Если имеется ровно одна бифуркационная точка, то она должна быть образом вершины графа. Равенство Леммы 3 в этом случае совпадает с IHX-соотношением, и доказывать нечего. Предположим, что Лемма 3 доказана для числа бифуркационных точек s. При переходе через $(s+1)$-ю бифуркационную точку встречается одна из следующих шести ситуаций:



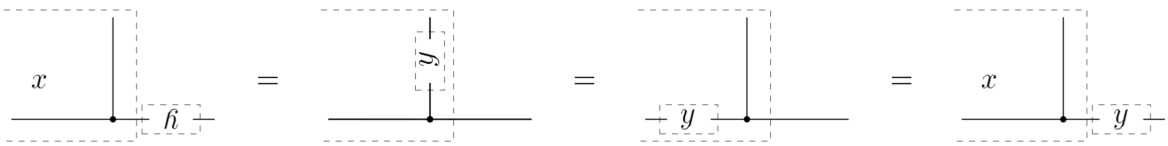
В первых двух случаях лемма следует из соотношения (IHX), в двух следующих — из соотношения (AS) (см. пример ниже); наконец, последние два случая деформацией вложения графа в плоскость сводятся к предыдущим. Лемма 3 доказана.

Пример.

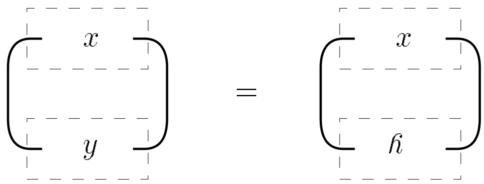


Два последних слагаемых взаимно уничтожаются ввиду соотношения антисимметрии.

Доказательство Леммы 2. Если 3-граф x является окружностью, то доказывать нечего. Поэтому можно считать, что x содержит хотя бы одну трехвалентную вершину. Выберем из них ближайшую к правому выходу из y. Тогда по Лемме 1 можно осуществить следующие маневры:



Следовательно,



Теперь, поворачивая y на $180°$ в плоскости рисунка, получаем правую часть требуемого равенства. Лемма 2 доказана. Это завершает доказательство корректности умножения 3-графов.

Следствие. *Произведение произвольных элементов* Γ *определено корректно.*

Это вытекает из того, что произведение 3-графов определено корректно, а при умножении на произвольный граф линейных комбинаций, отвечающих соотношениям (AS) и (IHX), получаются линейные комбинации того же вида.

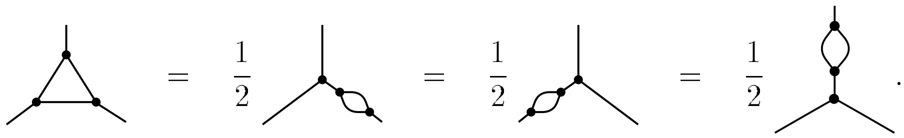
2 Зоопарк

2.1 Некоторые тождества

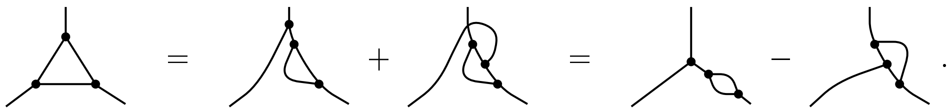
Приведем несколько простых тождеств, которые помогают понять устройство алгебры Γ. Они непосредственно вытекают из определяющих соотношений.

Первое из этих тождеств (Лемма 1) устанавливает связь между двумя операциями, определенными на множестве 3-графов: *вставка треугольника вместо вершины* и *вставка пузыря на ребро.* Вставить пузырь на ребро графа — это все равно, что умножить его на элемент $b = \ominus \in \Gamma_1$. Из корректности умножения в алгебре Г вытекает, что результат вставки пузыря не зависит от выбора ребра, а тогда из Леммы 1 следует, что при замене вершины на треугольник результат не зависит от выбора вершины.

Лемма 1. *Треугольник равен половине пузыря:*

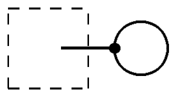


Доказательство Леммы 1.

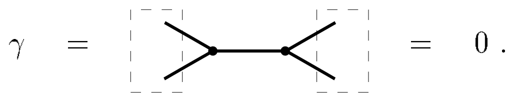


Следующая лемма описывает два класса 3-графов, равных нулю в алгебре Г.

Лемма 2. (а) *Граф с петлей равен нулю:*

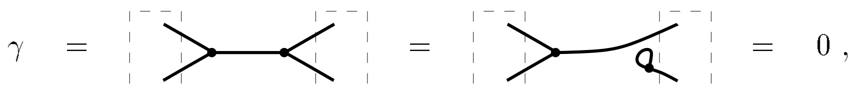


(б) *Если реберная связность 3-графа γ равна 1, т.е. при выбрасывании некоторого ребра граф становится несвязным, то $\gamma = 0$:*



Доказательство Леммы 2. (а) Граф с петлей равен нулю вследствие антисимметрии. Действительно, изменение вращения в вершине петли дает 3-граф, с одной стороны, изоморфный данному, а с другой стороны, отличающийся от него знаком.

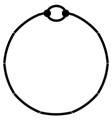
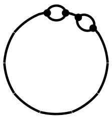
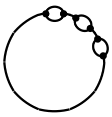
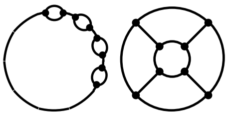
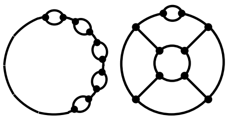
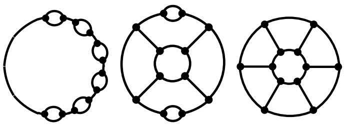
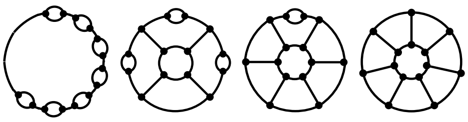
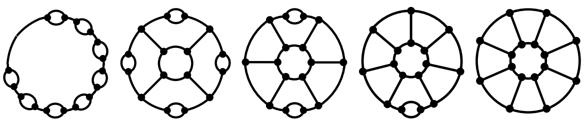
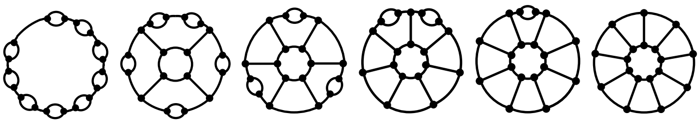
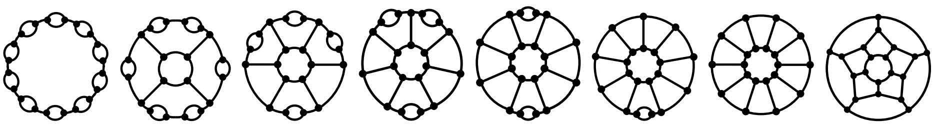
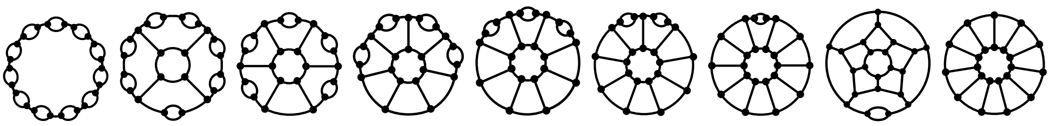
(б) По Лемме 1 γ равен равен графу с петлей:



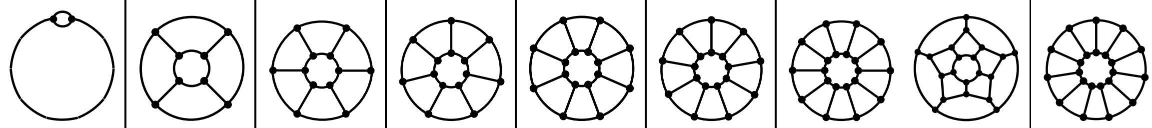
и утверждение следует из пункта (а).

2.2 Площадка молодняка

В следующей таблице приведен базис линейных пространств Γ_n для $n \leq 11$.

n	$\dim \Gamma_n$	аддитивные образующие
1	1	
2	1	
3	1	
4	2	
5	2	
6	3	
7	4	
8	5	
9	6	
10	8	
11	9	

Из таблицы видно, что мультипликативные образующие Γ до градуировки 11 выглядят следующим образом (в нижней строчке указаны соответствующие обозначения: b — “пузырь”, w_i — “колеса”, d — “додекаэдр”):

n	1	4	6	7	8	9	10		11
									
	b	w_4	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	d	w_{11}

Гипотеза. Алгебра Γ порождается плоскими графами.

2.3 Соотношения

Внимательный читатель, рассмотрев приведенную выше таблицу аддитивных образующих алгебры графов, мог заметить, что в ней отсутствуют элементы w_4^2 степени 8 и $w_4 w_6$ степени 10. Это не случайно. Оказывается, что в алгебре Γ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} w_4^2 &= \frac{5}{384}b^8 - \frac{5}{12}b^4 w_4 + \frac{5}{2}b^2 w_6 - \frac{3}{2}b w_7, \\ w_4 w_6 &= \frac{305}{27648}b^{10} - \frac{293}{864}b^6 w_4 + \frac{145}{72}b^4 w_6 - \frac{31}{12}b^3 w_7 + 2b^2 w_8 - \frac{3}{4}b w_9. \end{aligned}$$

Имеет место общее утверждение, которое доказал О. Дасбах [Das]: *Произведение любых двух однородных элементов алгебры 3-графов положительной градуировки принадлежит идеалу, порожденному b.*

Поскольку между образующими есть нетривиальные соотношения, алгебра 3-графов, в отличие от алгебры диаграмм Фейнмана (см. §6), не свободна, и, значит, не обладает структурой алгебры Хопфа.

Гипотеза 1. Отображение $\Gamma \to \Gamma$, состоящее в умножении на пузырь ($x \mapsto bx$), не имеет ядра.

Эта старая гипотеза несколько раз, начиная с 1992 года, возникала у разных математиков в контексте инвариантов Васильева и пережила несколько неудачных попыток доказательства. Следующая гипотеза является ее обобщением.

Гипотеза 2. В алгебре Γ нет делителей нуля.

3 Вычисления

Экспериментальные результаты, приведенные в предыдущем параграфе, получены при помощи компьютерного счета. Пакет программ, написанных на C/C++, набор вспомогательных shell-скриптов и файлы данных, полученные их выполнением, доступны на анонимном ftp-сервере math.botik.ru (см. [Ftp]).

Основной объект, с которым работают наши программы: регулярный трехвалентный граф без кратных ребер и петель, заданный своей матрицей смежности, составленной из 0 и 1. Матричное представление предполагает, что вершины графа как-то занумерованы. Пусть $a < b < c$ — номера вершин, соседних с данной. Тогда вращение в этой вершине определяется циклом (abc). Если известен список всех графов с данным числом вершин $x_1, x_2, \ldots, x_N$, то любой граф с вращением y, как элемент алгебры Γ, будет равен $\pm x_i$ (для определения номера и знака нужно вначале найти некоторый изоморфизм абстрактных графов y и x_i, а затем подсчитать четность числа вершин, в которых этот изоморфизм нарушает циклический порядок ребер).

Вычисление образующих и соотношений алгебры 3-графов до градуировки 10 (20 вершин) проводилось в два этапа:

1. Подготовка материала. На этом этапе составляется список всех регулярных трехвалентных графов данного порядка.

Поскольку всякий граф с кратными ребрами (т. е. содержащий пузырь), а также всякий граф с треугольником представляется в виде произведения графов меньшего порядка, для изучения алгебры Γ достаточно иметь списки всех связных графов без кратных ребер и треугольников.

Список 3-графов с заданным числом вершин создает программа `gr3g`, состояшая логически из двух основных модулей: генератор "сырого" потока графов, работающий на основе перебора с возвратом, и фильтр, отсеивающий из этого потока графы, изоморфные уже отобранным. Мы благодарны И. А. Нестерову, который летом 1995 года написал прототип этой программы, позволивший составить полные списки 3-графов до 16 вершин.

2. Составление и решение уравнений. При составлении уравнений для графов данного порядка мы предполагаем, что для всех меньших порядков уже известно множество образующих и полиномиальное выражение через них всех графов без треугольников и кратных ребер.

Программа `relgr` находит соотношения Кирхгофа для всех графов с заданным числом вершин. В правых частях соотношений могут появляться графы с треугольниками, которые по Лемме 1 §2.1 выражаются через графы с меньшим числом вершин, они к моменту запуска программы должны быть известны. Кроме того, можно выбрать и ввести обозначения для предполагаемых новых образующих данного порядка.

Составив систему линейных уравнений, та же программа приступает к их решению. При этом преследуется две цели: (1) найти выражение всех графов через образующие порядка, меньшего или равного текущему, (2) отыскать, если они есть, соотношения между образующими.

Если предполагаемые новые образующие в данном порядке не заданы, программа обнаружит, что система не имеет единственного решения, и сама примет какой-нибудь граф за новую образующую.

Два самых трудных момента вычислений были организованы так:

1. Составление списка графов с 20 вершинами было осуществлено нами в июле 1996 года на сети из 40 рабочих станций в университете Айдзу (Япония). Один из компьютеров (самый быстрый) генерировал сырой список, а остальные пропускали его через фильтр проверки на изоморфизм. Вычисления заняли около недели, что позволило нам применить прием, необычный в мультипроцессорной практике: ручное динамическое распараллеливание.

2. Составление и решение системы уравнений для графов с 20 вершинами было проведено в мае 1997 года на самом мощном компьютере, к которому мы смогли найти доступ (Pentium Pro 200 с 256 Мб оперативной памяти). Мы признательны Б. Сегалу (B. Segal) из ЦЕРНа, Женева, за оказанное содействие.

Полные списки 3-графов, имеющих ≤ 20 вершин, приведены в [Ftp] (см. также [Cub]). В каждом порядке имеются списки матриц инцидентности и полиномы, дающие выражение соответствующих графов через мультипликативные образующие.

Помимо набора программ для нахождения мультипликативных образующих алгебры Γ, на том же ftp-сервере имеется еще две программы `sl_inv` и `so_inv`, которые служат для нахождения инвариантов заданного графа, связанных с алгебрами Ли. В них реализован простейший алгоритм: перебор всех возможных расстановок знаков в вершинах (для sl) и ребрах (для so) с подсчетом числа компонент полученной кривой.

Описание мультипликативной структуры алгебры графов в градуировке 11 было получено нами косвенным образом, используя недавний результат Яна Кнайсслера [Kn] о том, что $\dim \Gamma_{11} = 9$. Используя sl- и so-инварианты, мы проверили, что мономы градуировки 11 от найденных нами образующих линейно независимы.

4 Алгебра графов и алгебры Ли

Для изучения устройства алгебры полезно располагать достаточным запасом гомоморфизмов из нее в основное поле.

Мы опишем восходящую к Р. Пенроузу и М. Концевичу конструкцию, как по алгебре Ли $\mathfrak{g}$ с заданной невырожденной ad-инвариантной билинейной формой B построить функцию $K_{\mathfrak{g}}^B$ на множестве 3-графов, удовлетворяющую соотношениям (AS) и (IHX) и тем самым порождающую линейную функцию на алгебре 3-графов со значениями в поле. Более того, оказывается, что для простой алгебры Ли (например, с формой Киллинга), поделив эту функцию на размерность алгебры Ли, мы получим гомоморфизм алгебр $\Gamma \to \mathbb{R}$.

4.1 Конструкция инварианта $K_{\mathfrak{g}}^B$

Вначале определим тензор $J \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. Рассмотрим скобку Ли данной алгебры $[\cdot, \cdot]$ как элемент пространства $\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$. Отождествление $\mathfrak{g}^*$ с $\mathfrak{g}$ при помощи заданной билинейной формы B переводит этот тензор в $J \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. Благодаря свойствам коммутатора $[\cdot, \cdot]$ и формы B тензор J кососимметричен по отношению к перестановкам трех сомножителей тензорного произведения. Этот факт нам сейчас пригодится.

Напомним, что 3-граф можно рассматривать как множество H мощности $6n$ ("полуребра графа"), снабженное двумя разбиенимяи: на трехэлементные подмножества, в каждом из которых задан циклический порядок, и на двухэлементные подмножества. Трехэлементные подмножества отвечают вершинам графа, а двухэлементные — ребрам;

соответствующие разбиения множества H можно по этой причине назвать *вершинным* и *реберным*.

Рассмотрим три линейных пространства:

- $\bigotimes\limits_{H} \mathfrak{g}$ — тензорное произведение $6n$ экземпляров алгебры Ли $\mathfrak{g}$, сомножители которого отвечают полуребрам графа,

- $\bigotimes\limits_{V} (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})$ — тензорное произведение $2n$ экземпляров пространства $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, сомножители которого отвечают вершинам графа,

- $\bigotimes\limits_{E} (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})$ — тензорное произведение $3n$ экземпляров пространства $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, сомножители которого отвечают ребрам графа.

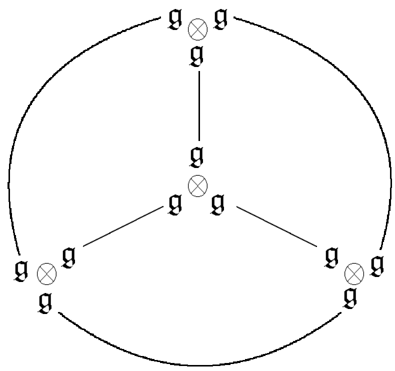
Вершинное разбиение множества H задает изоморфизм $\alpha : \bigotimes\limits_{V} (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}) \to \bigotimes\limits_{H} \mathfrak{g}$, а реберное разбиение — изоморфизм $\beta : \bigotimes\limits_{H} \mathfrak{g} \to \bigotimes\limits_{E} (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})$. Конкретный выбор изоморфизма α фиксируется упорядочиванием тройки полуребер вокруг каждой вершины — мы будем считать его произвольным, но согласованным с вращением в графе G. Точно так же, конкретный выбор изоморфизма β зависит от выбора порядка в каждой паре полуребер, отвечающих концам одного ребра; мы будем считать его произвольным.

Рассмотрим композицию этих двух изоморфизмов и отображения в поле, индуцированного заданной билинейной формой $B : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$:

$$\bigotimes_{V} (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}) \xrightarrow{\alpha} \bigotimes_{H} \mathfrak{g} \xrightarrow{\beta} \bigotimes_{E} (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}) \to \mathbb{R}$$

Значение $K_{\mathfrak{g}}^{B}(G)$ функции $K_{\mathfrak{g}}^{B}$ на данном графе G равно, по определению, значению этого сквозного отображения на элементе $J \otimes J \otimes \ldots \otimes J$. Несмотря на произвол, имеющийся в построении гомоморфизмов α и β, конечный результат определен корректно благодаря тому, что тензор J инвариантен относительно четных перестановок, а билинейная форма B симметрична.

Говоря образно, мы подвешиваем в каждой вершине графа тензорный куб алгебры Ли с выделенным элементом J, затем рассматриваем произведение по всем вершинам и, наконец, берем полную свертку полученного тензора валентности $6n$, применяя билинейную форму B к каждой паре сомножителей, отвечающих концам одного ребра:



$\longrightarrow \mathbb{R}$.

Заметим еще, что для любого 3-графа порядка $2n$ мы рассматривем один и тот же элемент тензорного произведения $6n$ экземпляров алгебры Ли, но отображение из нее в поле, определяемое разбиением на пары сомножителей тензорного произведения, зависит от выбора конкретного графа.

Проверка соотношений. Соотношение (AS) следует из того, что тензор J меняет знак при нечетных перестановках сомножителей. Соотношение (IHX) вытекает из тождества Якоби.

Зависимость от выбора формы. Билинейная форма B сохраняет все необходимые свойства при умножении на константу. Проследив шаг за шагом всю конструкцию, легко понять, что функция $K_{\mathfrak{g}}^{B}$ при этом меняется следующим образом: $K_{\mathfrak{g}}^{\lambda B}(G) = \lambda^{-n} K_{\mathfrak{g}}^{B}(G)$ для $G \in \Gamma_n$.

Мультипликативность. Имеет место следующее утверждение: *для простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ размерности r функция $\frac{1}{r} K_{\mathfrak{g}}^{B} : \Gamma \to \mathbb{R}$ мультипликативна (при любом выборе билинейной формы B).*

Этот факт вытекает из свойств элемента Казимира простой алгебры Ли.

Начнем с того, что построение функции $K_{\mathfrak{g}}^{B}$ проходит не только для 3-графов, но и для графов, имеющих, наряду с трехвалентными, еще и одновалентные вершины. В этом случае сворачиваются только те пары сомножителей большого тензорного произведения, которые отвечают ребрам, соединяющим трехвалентные вершины, и в результате остается не число, а элемент пространства $\bigotimes_{U} \mathfrak{g}$, где U — множество одновалентных вершин рассматриваемого графа. Этот элемент всегда ad-инвариантен. В частности, если алгебра простая, а одновалентных вершин у графа всего две, то мы обязательно получим тензор, пропорциональный квадратичному элементу Казимира $c \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. Напомним, что элемент Казимира для данной формы B — это элемент $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, отвечающий $B \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^*$ и $\mathrm{id} \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$ при изоморфизмах, индуцированных формой B. Обычно при этом берут форму Киллинга, но для нас это роли не играет. При любом выборе формы ее значение на элементе Казимира будет равно следу тождественного оператора, т.е. размерности алгебры Ли.

Перейдем к доказательству утверждения. Разорвем произвольное ребро графа G_1 и рассмотрим тензор, отвечающий полученному графу с двумя одновалентными вершинами. Этот тензор будет пропорционален квадратичному элементу Казимира $c \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ с коэффициентом пропорциональности $\frac{1}{r} K_{\mathfrak{g}}(G_1)$. Для второго графа G_2 подобным образом получим тензор $\frac{1}{r} K_{\mathfrak{g}}(G_2) \cdot c$. Если теперь склеить разрезанные графы G_1 и G_2 по одной одновалентной вершине, то частичная свертка элемента $c \otimes c \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ даст снова элемент Казимира $c \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, а коэффициенты пропорциональности перемножатся. Это и доказывает мультипликативность функции $\frac{1}{r} K_{\mathfrak{g}}$.

4.2 Алгоритм вычисления sl_N- и so_N-полиномов

Для классических алгебр Ли sl и so построенный только что инвариант допускает изящное комбинаторное описание, которое мы сейчас приведем. Доказательство для sl_N (или, что то же самое, для gl_N) можно найти, например, в [BN1] и [CD2]. Доказательство для so_N основано на аналогичных рассуждениях. См. также [Pen], [BN2].

Вычисление $K_{\mathfrak{g}}^B$ для $\mathfrak{g} = sl_N$ с формой $B(x,y) = \mathrm{tr}(xy)$. *Разметка вершин* графа — это расстановка в вершинах чисел ± 1. Если вершин $2n$, то всего различных разметок существует 2^{2n}. Для каждой разметки рассмотрим плоскую кривую, которая получается из графа, погруженного в плоскость (вращение согласовано с ориентацией), удвоением всех ребер. При этом в окрестности вершины кривая ведет себя одним из двух способов в зависимости от знака вершины:

Пусть $|\mu|$ — число отрицательных вершин в разметке μ, а $b(\mu)$ — число компонент связности полученной кривой. Тогда

$$K_{sl_N}(G) = \sum_{\mu \in MV} (-1)^{|\mu|} N^{b(\mu)}$$

где MV — множество всех вершинных разметок. Сумма состоит из 2^{2n} слагаемых.

Если параметр N считать переменным, то получится многочлен от N, который мы будем называть *sl-полиномом* и обозначать $sl(G)$.

Этот полином делится нацело на размерность алгебры $N^2 - 1$, и частное является мультипликативной функцией на алгебре 3-графов, которую мы назовем *приведенный sl-полином* и обозначим через $\widetilde{sl}(G)$.

Вычисление $K_{\mathfrak{g}}^B$ для $\mathfrak{g} = so_N$ с формой $B(x,y) = \mathrm{tr}(xy)$. Для вычисления so-полинома от данного 3-графа нужно проделать аналогичные действия, заменив вершины графа на ребра. Вот точное описание.

Разметка ребер графа — это расстановка чисел ± 1 на ребрах. Для каждой реберной разметки рассмотрим плоскую кривую, которая получается удвоением всех ребер, причем ребра, отмеченные минусом, берутся с перекруткой:

При этом в окрестности каждой вершины берется прямой способ соединения этих линий, как в положительных вершинах для sl_N. Обозначая через $|\mu|$ число отрицательных ребер в разметке μ, а через $b(\mu)$ — число компонент связности соответствующей кривой, мы можем написать следующую формулу:

$$K_{so_N}(G) = \sum_{\mu \in ME} (-1)^{|\mu|} N^{b(\mu)}$$

где ME — множество всех реберных разметок. Сумма состоит из 2^{3n} слагаемых.

Разделив so-полином на размерность алгебры $N(N-1)/2$, мы получим *приведенный so-полином* $\widetilde{so}(G)$, представляющий собой гомоморфизм алгебр $\Gamma \to \mathbb{Z}[N]$.

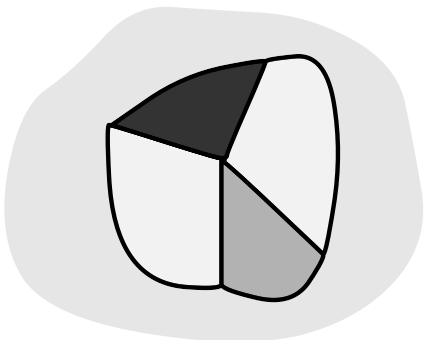
4.3 Таблица значений на образующих

В следующей таблице даны найденные на компьютере значения приведенных sl- и so-полиномов на наших образующих; для алгебры so выражение дается через переменную $M = N - 2$.

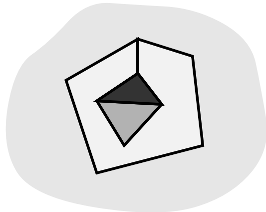
степень	элемент	$\widetilde{sl}$-полином	$\widetilde{so}$-полином
1	b	$2N$	$2M$
4	w_4	$2N^4 + 24N^2$	$2M^4 - 6M^3 + 60M^2 - 48M$
6	w_6	$2N^6 + 64N^4 + 96N^2$	$2M^6 - 10M^5 + 160M^4 - 368M^3$ $+816M^2 - 576M$
7	w_7	$2N^7 + 128N^5 + 128N^3$	$2M^7 - 12M^6 + 308M^5 - 816M^4$ $+1328M^3 - 768M$
8	w_8	$2N^8 + 256N^6 + 256N^4 + 384N^2$	$2M^8 - 14M^7 + 588M^6 - 1688M^5$ $+3216M^4 - 4256M^3$ $+9152M^2 - 6912M$
9	w_9	$2N^9 + 512N^7 + 512N^5 + 512N^3$	$2M^9 - 16M^8 + 1128M^7$ $-3376M^6 + 7104M^5 - 11200M^4$ $+12672M^3 + 12288M^2 - 18432M$
10	w_{10}	$2N^{10} + 1024N^8 + 1024N^6$ $+1024N^4 + 1536N^2$	$2M^{10} - 18M^9 + 2184M^8 - 6656M^7$ $+14880M^6 - 26432M^5 + 36096M^4$ $-35840M^3 + 111360M^2 - 95232M$
10	d	$2N^{10} + 22N^8 + 228N^6 - 232N^4$	$2M^{10} - 18M^9 + 88M^8 - 188M^7$ $+1254M^6 + 1038M^5 - 4948M^4$ $-21832M^3 + 60144M^2 - 35520M$
11	w_{11}	$2N^{11} + 2048N^9 + 2048N^7$ $+2048N^5 + 2048N^3$	$2M^{11} - 20M^{10} + 4268M^9$ $-13072M^8 + 30240M^7 - 58240M^6$ $+91008M^5 - 110080M^4 + 97536M^3$ $+290816M^2 - 331776M$

5 Алгебра графов и теорема о четырех красках

Теорема о четырех красках утверждает, что всякую карту на плоскости можно покрасить четырьмя красками так, что любые две страны, имеющие общий участок границы, будут окрашены в разные цвета. Например:



При этом, конечно, предполагается, что страна не может граничить сама с собой, как на рисунке:



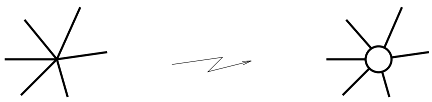
где самая светлая страна является своим собственным соседом.

Цель настоящего параграфа показать, что алгебра 3-графов имеет непосредственное отношение к теореме о четырех красках, раскрывая ее алгебраический смысл.

5.1 Предварительные результаты

Лемма 1 (А. Кэли [Ca], А. Кемпе [Ke], 1879). *Теорему о четырех красках достаточно доказать для карт, у которых в одной точке сходится не более трех стран.*

Доказательство. Предположим, что мы умеем правильно раскрашивать любую карту. удовлетворяющую условиям леммы. Пусть дана карта, у которой в какой-то точке сходится более трех стран. Окружив каждую такую точку новой маленькой страной, мы получим карту, которая удовлетворяет условиям леммы. Раскраска этой новой карты, как видно из рисунка



индуцирует требуемую раскраску исходной карты. Лемма доказана.

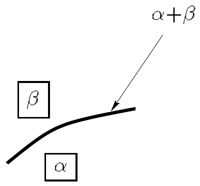
Пусть G — граф границ карты, т. е. граф, вершинами которого служат точки, общие для трех и более стран, а ребрами — границы стран. Согласно предыдущей лемме, можно считать G регулярным трехвалентным графом. Таким образом, лемма Кэли–Кемпе служит причиной появления 3-графов в теореме о четырех красках.

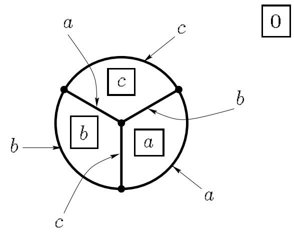
Определение. *Реберной 3-раскраской* трехвалентного графа называется раскраска его ребер в три цвета такая, что в любой вершине сходятся ребра трех различных цветов.

Лемма 2 (П. Тейт [Ta], 1880) *Раскраски плоской карты в четыре цвета с фиксированным цветом одной из стран находятся во взаимно- однозначном соответствии с реберными 3-раскрасками графа границ.*

Доказательство. Будем считать четыре цвета, в которые раскрашена карта, элементами 0, a, b, c группы Клейна $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Построим реберную 3-раскраску графа G

цветами a, b и c. А именно, ребро, разделяющее страны, покрашенные в цвета α и β. покрасим цветом $\alpha + \beta$.





Обратная процедура: построение раскраски карты по данной раскраске графа — заключается в том, что мы сначала красим выбранную страну в фиксированный цвет, а затем, путешествуя от этой страны по всей карте с набором кистей и пересекая границу цвета x, всякий раз прибавляем этот x к текущему цвету.

Корректность и взаимная обратность этих двух отображений вытекают из свойств операции сложения в группе $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Лемма доказана.

Важным моментом в истории теоремы о четырех красках было введение П. Хивудом в 1898 году понятия знака вершины для реберной 3-раскраски плоского графа [He].

Определение. Вершине плоского графа приписывается знак “+”, если при ее обходе против часовой стрелки цвета встречаются в порядке a, b, c. Если цвета встречаются в противоположном порядке a, c, b, то вершине приписывается знак “−”.

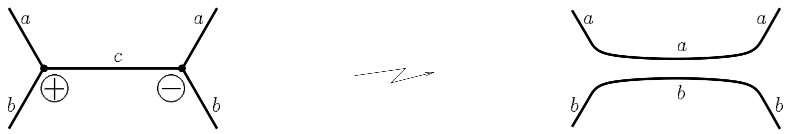
Следующая теорема была известна в 1950-х годах Р. Пенроузу, который привел ее в [Pen] с замечанием, что известное ему доказательство этого простого факта слишком сложно, чтобы рассказывать о нем другим. Мы изложим доказательство теоремы Пенроуза, следуя Л. Кауффману [Ka1] (см. также [Ka2, KaS]).[2]

Теорема. *Произведение знаков вершин реберной 3-раскраски плоского графа не зависит ни от раскраски, ни от графа с данным числом вершин $2n$ и равно $(-1)^n$.*

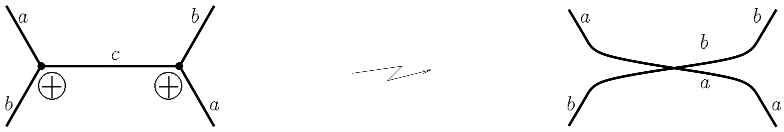
Доказательство. Пусть V — множество вершин графа G, $\#(V) = 2n$, а ε_v — знак вершины v. Тогда $\prod\limits_{v\in V} \varepsilon_v = \prod\limits_{(v_1,v_2)\in c} \varepsilon_{v_1}\varepsilon_{v_2}$, где последнее произведение берется по всем ребрам (v_1, v_2), покрашенных цветом c (c-ребер). Легко видеть, что число c-ребер равно $\#(c) = \#(V)/2 = n$. Они разбиваются на два класса $c^{=}$ и $c^{\times}$ в зависимости от того, разные ли знаки концов ребра или одинаковые:

[2]Мы предлагали эту теорему в качестве задачи на зональном туре Российской математической олимпиады школьников в 1995 году [Kv]. Школьники нашли по крайней мере два решения, отличных от решения Кауффмана.

$c^{=}$:



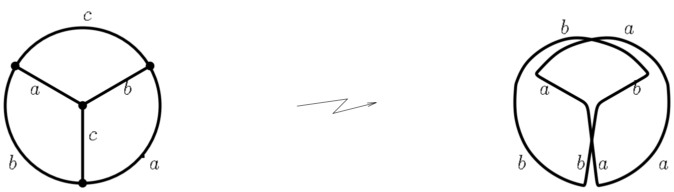
$c^{\times}$:



Следовательно, произведение знаков вершин равно

$$(-1)^{\#(c^{=})} = (-1)^{2n}(-1)^{\#(c^{\times})} = (-1)^{n}(-1)^{\#(c^{\times})}.$$

Остается показать, что число $\#(c^{\times})$ четно. Это делается следующим трюком Кауффмана. Разрешим все c-ребра, как показано на рисунке выше. Тогда мы получим набор окружностей, часть которых покрашена цветом a, а часть — цветом b. Окружности одного цвета не пересекаются. Видно, что число ребер типа $c^{\times}$ равно числу пересечений окружностей цвета a с окружностями цвета b. А это число четно по теореме Жордана (каждая окружность разбивает плоскость на две связные компоненты). Вот пример:



Теорема доказана.

5.2 Число раскрасок 3-графа

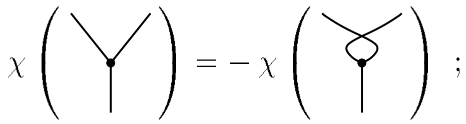
Рассмотрим функцию, определенную на множестве плоских графов,

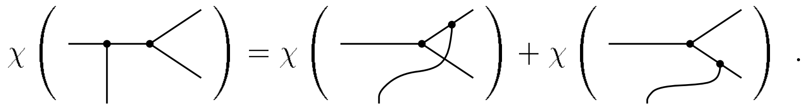
$$\chi(G) = \sum_{\substack{\text{реберные} \\ \text{3-раскраски } G}} \prod_{v \in V} \varepsilon_v \,.$$

По предыдущей теореме, все слагаемые в этой сумме одинаковы и равны $(-1)^n$. Значит, $\chi(G)$ равно, с точностью до знака, числу реберных 3-раскрасок G. Теорема о четырех красках теперь может быть переформулирована как утверждение, что $\chi(G) \neq 0$ для плоского графа G.

Для определения знака вершин по Хивуду (ε_v) графу вовсе не обязательно быть плоским. Достаточно фиксировать *вращение* в каждой вершине графа, т. е. рассмотреть *3-граф* в терминологии параграфа 1. В этой ситуации знак вершины определяется в зависимости от того, согласован ли циклический порядок цветов ребер с вращением в данной вершине или нет. Следовательно, можно расширить область определения функции $\chi(G)$, задав ее той же формулой на всем множестве 3-графов.

Утверждение 1. *Функция χ удовлетворяет соотношениям*

(AS): 

(IHX): 

Следовательно, функция χ корректно определена на алгебре Γ. При этом ее значение на окружности (единичном элементе алгебры) естественно считать равным 3.

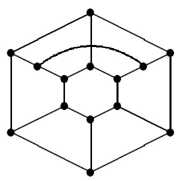
Доказательство. Соотношение (AS) очевидно. Действительно, при смене вращения в одной из вершин 3-графа G ровно один из знаков вершин в каждой реберной 3-раскраске поменяется на противоположный. Следовательно, все слагаемые в формуле, определяющей $\chi(G)$, поменяют знак.

Докажем соотношение (IHX). Без ограничения общности можно считать, что среднее ребро в левой части соотношения покрашено цветом c. Тогда для оставшихся четырех ребер имеет место либо возможность $c^{=}$, либо $c^{\times}$ из пункта 5.1. В первом случае соответствующая раскраска индуцирует раскраску первого слагаемого правой части соотношения, во втором — второго. Таким образом, каждое слагаемое $\chi(G)$ для левой части представлено либо в первом, либо во втором слагаемом правой части. Дополнительные члены, возникающие в правой части, взаимно уничтожаются, так как их можно разбить на пары вида

Утверждение 1 доказано.

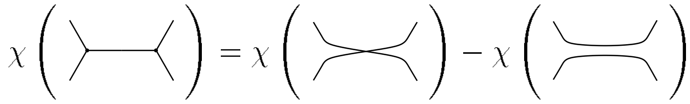
Следствие. Число раскрасок $\chi(G)$ графа G, равного нулю как элемент алгебры Γ, равно нулю.[3]

Замечания. **1.** Приведем пример графа G, отличного от нуля в алгебре Γ, но такого, что $\chi(G) = 0$:



[3]Отсюда вытекает такой априори неочевидный факт: *плоский граф не может быть равен нулю в алгебре* Γ. Интересно найти доказательство этого факта, не опирающееся на теорему о четырех красках.

2. Функция χ на алгебре Γ удовлетворяет более сильному, чем (IHX), но неоднородному в смысле градуировки Γ соотношению:

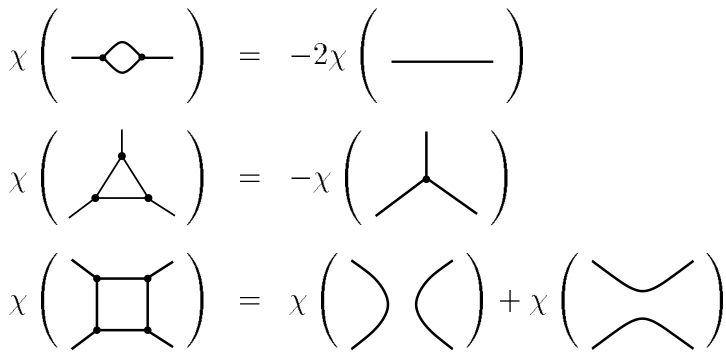
(L) :  ,

которое доказывается подобно (IHX).

Это соотношение было известно Лагранжу (быть может, и Эйлеру), как тождество $a\times(b\times c) = b(a,c)-c(a,b)$ для обычного векторного произведения[4]. Оно было переоткрыто Р. Пенроузом [Pen] в контексте теории графов и алгебр Ли. Затем переоткрыто в [CV] в контексте теории инвариантов Васильева, и в [Gar] в контексте теории инвариантов 3-многообразий.

Соотношение (L), вообще говоря, выводит из класса связных графов. В этом случае надо считать χ равным произведению соответствующих значений на связных компонентах.

Приведенные соотношения дают следующий подход к доказательству теоремы о четырех красках. Нужно представить плоский граф G в виде линейной комбинации плоских графов с меньшим числом вершин мо модулю последнего соотношения. Если все коэффициенты линейной комбинации имеют один и тот же знак и все графы линейной комбинации имеют одно и то же число вершин по модулю 4, то исходный граф не может служить минимальным контрпримером к проблеме 4 красок ($\chi(G)$ не равно нулю ввиду соотношения и минимальности контрпримера). Это действительно удается сделать, если граф G содержит двуугольник, треугольник или четырехугольник. А именно, пользуясь соотношением (L), легко доказать следующие равенства [Pen]:



Для полного доказательства теоремы о четырех красках достаточно вывести аналогичное соотношение для графов с пятиугольником. Однако, полученная нами формула (см. также [Pen])

не приводит к доказательству теоремы о четырех красках, ибо графы в правой части имеют разное по модулю 4 число вершин (т. е. соответствующие значения χ различаются знаком).

[4]Чтобы понять связь между этими формулировками, нужно посмотреть на обе части тождества Лагранжа с переменными a, b, c как на элементы четвертой тензорной степени алгебры Ли so_3.

5.3 3-раскраски и алгебра Ли so_3

Рассмотрим трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$ с операцией векторного произведения как алгебру Ли $so_3(\mathbb{R})$.[5]

Фиксируем ad-инвариантную невырожденную форму $B(x,y) = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}(xy)$. Тогда функция числа раскрасок χ совпадает с функцией $K^B_{so_3}$, построенной в параграфе 4. Действительно, выберем в so_3 ортонормированный (относительно нашей формы) базис, состоящий из матриц

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad c = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Из соотношений коммутации $[a,b] = c$, $[b,c] = a$, $[c,a] = b$ следует, что тензор J, приписываемый вершине графа, равен

$$J = a\otimes b\otimes c + b\otimes c\otimes a + c\otimes a\otimes b - b\otimes a\otimes c - c\otimes b\otimes a - a\otimes c\otimes b \, .$$

Сворачивание $3n$-й степени этого тензора в соответствии с правилом §4.1 в точности равносильно подсчету числа реберных 3-раскрасок графа (вдоль ребра цвет должен быть одинаков, а каждая вершина дает множитель 1 или -1 в зависимости от циклического порядка трех "цветов" a, b, c). Таким образом, функция числа раскрасок является частным случаем общей конструкции функций на алгебре Γ, построенных по алгебре Ли. Отсюда и из общего свойства мультипликативности, доказанного в §4.1, вытекает следующее утверждение.

Предложение. *Функция $\chi(\cdot)/3$ на алгебре Γ мультипликативна, т.е. является гомоморфизмом алгебр $\Gamma \to \mathbb{R}$.*

Используя введенные термины, мы можем переформулировать теорему о четырех красках таким образом: *значение so_3-инварианта на любом плоском 3-графе отлично от 0.*

6 Алгебра графов и инварианты Васильева

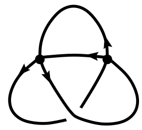
Мы укажем связь алгебры 3-графов с инвариантами узлов конечного порядка, основываясь непосредственно на рассмотрении фильтрации Васильева в пространстве, порожденном изотопическими классами узлов. Более традиционное введение в теорию инвариантов Васильева можно найти, например, в [BN1, CD1, CDL]. Там же имеются доказательства, которые здесь опущены.

6.1 Особые узлы и фильтрация Васильева

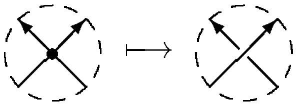
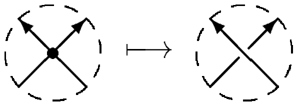
Определение. *Особым узлом* мы будем называть гладкое погружение $K : S^1 \to \mathbb{R}^3$, являющееся вложением всюду, кроме конечного числа простых двойных точек (т. е. точек трансверсального самопересечения). Множество всех особых узлов с n двойными точками мы обозначим через $\mathcal{K}_n$.

Вот пример особого узла с двумя двойными точками:

[5] Вместо so_3 можно рассматривать изоморфную ей над $\mathbb{C}$ алгебру sl_2.



Каждую двойную точку особого узла можно *разрешить* двояким образом:

- положительно  или
- отрицательно  .

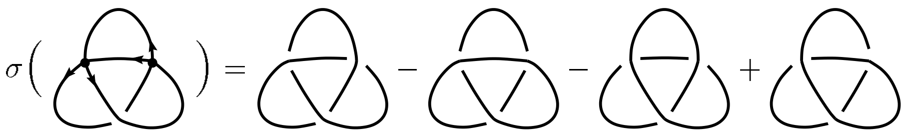
Заметим, что обе операции корректно определены на изотопических классах узлов и при этом не зависят от выбранной на узле ориентации.

Полное разрешение особого узла $K \in \mathcal{K}_n$ — это линейная комбинация 2^n неособых узлов

$$\sigma(K) = \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n=\pm 1} (-1)^{|\varepsilon|} K_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n},$$

где $|\varepsilon|$ обозначает число минус единиц в наборе $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, а узел $K_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}$ получается из K разрешением всех двойных точек, причем i-я точка разрешается в положительном или отрицательном смысле в зависимости от знака ε_i.

Пример.



Рассмотрим линейное пространство $\mathcal{X}$, свободно порожденное изотопическими классами (неособых) узлов в $\mathbb{R}^3$, и в нем убывающую фильтрацию

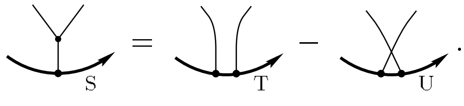
$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \supseteq \mathcal{X}_1 \supseteq \mathcal{X}_2 \supseteq \mathcal{X}_3 \supseteq \ldots ,$$

где $\mathcal{X}_n$ — подпространство, порожденное полными разрешениями особых узлов с n двойными точками, т. е. линейная оболочка образа $\sigma(\mathcal{K}_n)$.

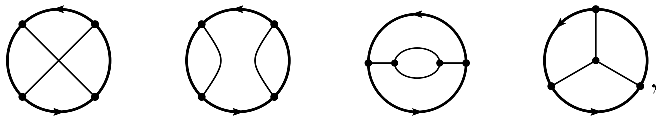
Факторпространства $\mathcal{X}_n/\mathcal{X}_{n+1}$ допускают чисто комбинаторное описание в терминах так называемых *диаграмм Фейнмана*.

Определение. *Диаграмма Фейнмана* степени n — это регулярный трехвалентный граф с $2n$ вершинами, в котором выделен некоторый ориентированный цикл, называемый *петлей Уилсона*, и во всех вершинах, не лежащих на петле Уилсона, задано вращение (циклический порядок ребер).

Определение. *Пространство диаграмм Фейнмана* $\mathcal{F}_n$ — это линейное пространство, порожденное всеми диаграммами Фейнмана степени n по модулю соотношений STU, имеющих вид



Пример. С точностью до знака, существует всего 4 различные ненулевые диаграммы Фейнмана степени 2:



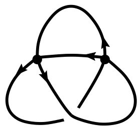
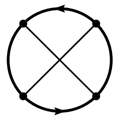
а соотношения STU приводят к тому, что $\dim \mathcal{F}_2 = 2$.

Замечание. Из соотношений STU вытекают соотношения (AS) и (IHX) для внутренних (т.е. не лежащих на петле Уилсона) вершин диаграммы Фейнмана [BN1].

Связь между особыми узлами и диаграммами Фейнмана осуществляется посредством следующей конструкции.

Определение. *Диаграмма Фейнмана $\varphi(K)$ особого узла $K : S^1 \to \mathbb{R}^3$* — это окружность S^1 с набором n хорд, соединяющих пары точек, которые имеют один и тот же образ при отображении K.

Пример. Для особого узла, приведенного выше в качестве примера, имеем:

$\varphi\Big($  $\Big) =$  .

В прямой сумме линейных пространств

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n$$

имеется корректно определенное умножение: две петли Уилсона разрываются и склеиваются в одну. Обозначим через $\widetilde{\mathcal{F}}$ факторалгебру по идеалу, порожденному диаграммой Фейнмана .

Теорема. *Сопоставление $\sigma(K) \mapsto [\varphi(K)] \in \widetilde{\mathcal{F}}_n$ продолжается до корректно определенного линейного отображения $\mathcal{X}_n \to \widetilde{\mathcal{F}}_n$, ядро которого совпадает с $\mathcal{X}_{n+1}$. Таким образом, имеет место изоморфизм линейных пространств $\mathcal{X}_n / \mathcal{X}_{n+1} \cong \mathcal{F}_n$.*

Этот факт является одной из переформулировок знаменитой теоремы Концевича, доказательство которой можно найти в [BN1, CD3].

6.2 Связные диаграммы Фейнмана и 3-графы

Алгебра Фейнмана $\mathcal{F}$ обладает еще коумножением (и умножение, и коумножение согласованы с соответствующими операциями в пространстве $\mathcal{K}$, см. [BN1, CD1, CDL]) и на самом деле представляет собой коммутативную и кокоммутативную градуированную алгебру Хопфа.

Хорошо известно, что коммутативная и кокоммутативная алгебра Хопфа совпадает с симметрической алгеброй над своим пространством примитивных элементов, т. е. представляет собой алгебру многочленов от примитивных образующих. Для градуированной алгебры подпространство примитивных элементов также градуировано: $\mathcal{P} = \oplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{P}_n$, где $\mathcal{P}_n = \mathcal{P} \cap \mathcal{F}_n$. В случае алгебры Фейнмана $\mathcal{P}_1$ одномерно и порождено элементом $\ominus$ю Факторалгебра $\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}/(\ominus)$ также является алгеброй Хопфа, а ее пространство примитивных элементов естественно отождествляется с прямой суммой $\oplus_{n=2}^{\infty}\mathcal{P}_n$.

По построению, пространство примитивных элементов $\mathcal{P}$, рассматриваемое само по себе, не обладает никакой структурой алгебры. Примитивные элементы лишь порождают алгебру $\mathcal{F}$ подобно тому как переменные $x_1, \ldots, x_n$ порождают алгебру многочленов $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$. Однако, выявление связи пространства $\mathcal{P}$ с алгеброй графов Γ позволяет ввести в $\mathcal{P}$ естественное (некоммутативное) умножение. Сейчас мы объясним, как это делается.

Известно [BN1], что пространство примитивных элементов алгебры Фейнмана совпадает с подпространством, порождается *связными диаграммами Фейнмана.*

Диаграмма Фейнмана называется *связной*, если при выбрасывании петли Уилсона остается связный граф. Вот примеры связной и несвязной диаграмм Фейнмана:

Связь между линейными пространствами Γ и $\mathcal{P}$ заключается в следующем:

1. Имеет место вложение $i : \Gamma_n \to \mathcal{P}_{n+1}$, которое строится так: у графа разрывается произвольное ребро, и к его концам приклеивается петля Уилсона. Ориентация на петле Уилсона берется произвольная.

2. Имеет место проекция $\pi : \mathcal{P}_n \to \Gamma_n$, которая заключается в забывании того, что петля Уилсона выделена, и во введении вращения в вершинах на петле Уилсона по принципу “вперед–вбок–назад”.

Композиция двух указанных гомоморфизмов, т. е. сквозное отображение $\Gamma \to \Gamma$ в последовательности

$$\Gamma \xrightarrow{i} \mathcal{P} \xrightarrow{\pi} \Gamma$$

есть умножение на пузырь $g \mapsto bg$.

Мультипликативная структура алгебры графов приводит к тому, что имеется действие $\Gamma \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, которое порождает умножение $\mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}$.

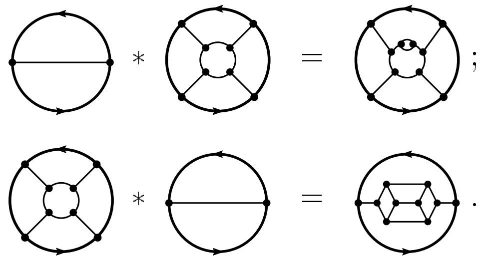
Определим сначала действие $*' : \Gamma \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}$. Для данных элементов $g \in \Gamma$ и $p \in \mathcal{P}$ построим их произведение $g *' p$ следующим образом. Разорвем в g какое-нибудь (произвольное) ребро. А в p разорвем ребро, не лежащее на петле Уилсона. И склеим у двух полученных объектов образовавшиеся концы (точно так, как определялось умножение в самой алгебре Γ). Результат $g *' p$ имеет одну петлю Уилсона и связен, стало быть, принадлежит P.

Теперь определим умножение $*$ связных диаграмм Фейнмана $p, q \in \mathcal{P}$ по формуле

$$p * q = \pi(p) *' q,$$

где $\pi : \mathcal{P} \to \Gamma$ — определенный выше гомоморфизм забывания петли Уилсона.

Пример. *Умножение $*$, вообще говоря, некоммутативно:*



Эти два элемента пространства $\mathcal{P}$ различаются, например, sl_2-инвариантом, построенным в [CV].

Корректность данных определений можно проверить подобно тому, как это было сделано в §1 для алгебры Γ.

Гипотеза. В алгебре примитивных элементов $\mathcal{P}$ нет делителей нуля.

7 Алгебра 3-графов и трехмерные гомологические сферы

Цель настоящего параграфа — показать, что алгебра 3-графов тесно связана с недавно введенными Т. Ооцуки [Oh1] инвариантами конечного порядка целочисленных гомологических трехмерных сфер. А именно, в бесконечномерном линейном пространстве $\mathcal{M}$, свободно порожденном гомологическими сферами, вводится убывающая фильтрация

$$\mathcal{M} \supseteq \mathcal{M}_0 \supseteq \mathcal{M}_1 \supseteq \mathcal{M}_2 \supseteq \mathcal{M}_3 \supseteq \dots .$$

При этом оказывается, что $\mathcal{M}_{3n} = \mathcal{M}_{3n+1} = \mathcal{M}_{3n+2}$, а пространство $\mathcal{M}_{3n}/\mathcal{M}_{3(n+1)}$ изоморфно пространству (возможно несвязных) 3-графов с $2n$ вершинами, рассматриваемых по модулю соотношений (AS) и (IHX). На таком пространстве естественно определяется умножение (как несвязное объединение графов) и коумножение, задающие на нем структуру алгебры Хопфа. Пространство связных 3-графов, т. е. наша алгебра Γ, оказывается примитивным пространством этой алгебры Хопфа.

Нам не известно никаких топологических применений мультипликативной структуры алгебры 3-графов Γ в контексте трехмерных многообразий, и в данном параграфе Γ будет выступать только как линейное пространство.

7.1 Хирургия Дена

Пусть M — замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие и $L = L_1 \cup \ldots \cup L_n$ — зацепление в M. Рассмотрим регулярную трубчатую окрестность $N(L_j)$ компоненты L_j. Выберем сечение f_j единичного нормального расслоения $\partial N(L_j) \cong S^1 \times L_j \to L_j$. Его гомотопический класс однозначно определяется целым числом — коэффициентом зацепления f_j и L_j. Поскольку нас интересуют только гомотопические классы сечений, мы будем обозначать коэффициент зацепления f_j с L_j той же буквой f_j, что и само сечение. Пара $\mathcal{L} = (L, \mathbf{f})$, где $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$, называется *оснащенным зацеплением* в M.

Определение. *Хирургия Дена* — это способ построения нового многообразия $M_{\mathcal{L}}$ по M и оснащенному зацеплению $\mathcal{L}$ в M (см. [MF, PS, Ro]). Конструкция $M_{\mathcal{L}}$ состоит в следующем. Возьмем стандартное полноторие $T = S^1 \times D^2$ и выделим в нем меридиан $\mu = \{*\} \times \partial D^2$. Вырежем из M окрестности $N(L_j)$ всех компонент зацепления L и вклеим вместо каждой из них полноторие T по диффеоморфизму границ $h_j : \partial T \to \partial N(L_j)$, переводящему фиксированный меридиан $\mu \subset \partial T$ в сечение f_j:

$$M_{\mathcal{L}} = (M \setminus \cup N(L_j)) \bigcup_{h_j} T_j \ ,$$

где T_j — это j-й экземпляр стандартного полнотория T.

Легко видеть, что класс диффеоморфизма многообразия $M_{\mathcal{L}}$ не зависит от произвола в его конструкции (т. е. от выбора сечений f_j в данных гомотопических классах и диффеоморфизмов h_j).

Р. Ликориш [Li] (см. также [Wa, PS, MF]) доказал, что каждое замкнутое ориентированное трехмерное многообразие может быть получено из S^3 хирургией Дена вдоль подходящего оснащенного зацепления в S^3. Оснащенные зацепления в S^3, приводящие к одному и тому же многообразию, описаны Р. Кирби [Kir].

7.2 Целочисленные гомологические трехмерные сферы

Определение. *Целочисленной гомологической трехмерной сферой* (для краткости *гомологической 3-сферой*) называется замкнутое ориентированное трехмерное многообразие M, имеющее гомологии сферы: $H_0(M) = \mathbb{Z}$, $H_1(M) = H_2(M) = 0$, $H_3(M) = \mathbb{Z}$.

Класс гомологических 3-сфер замкнут относительно операций хирургии Дена вдоль так называемых *алгебраически разложимых 1-оснащенных* зацеплений.

Определение. Оснащенное зацепление $\mathcal{L} = (L, \mathbf{f})$ в гомологической 3-сфере M называется *алгебраически разложимым, 1-оснащенным*, если все оснащения f_j равны ± 1 и все попарные индексы зацеплений компонент L равны нулю.

Замечание. Поскольку мы работаем с гомологическими 3-сферами, то использованное здесь понятие индекса зацепления корректно определено.

Имеют место следующие две важные леммы.

Лемма 1 [Oh1]. *Пусть M — гомологическая 3-сфера. Оснащенное зацепление $\mathcal{L}$ в M является алгебраически разложимым, 1-оснащенным зацеплением тогда и только тогда, когда результат хирургии Дена $M_{\mathcal{L}'}$ представляет собой гомологическую 3-сферу для любого подзацепления $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$.*

Лемма 2 [Oh1]. *Всякая гомологическая 3-сфера M может быть получена из S^3 хирургией Дена вдоль алгебраически разложимого, 1-оснащенного зацепления $\mathcal{L}$ в S^3: $M = S^3_{\mathcal{L}}$.*

7.3 Инварианты конечного порядка

Пусть $\mathcal{M}$ — линейное пространство (над полем, скажем, для простоты, $\mathbb{C}$), порожденное гомологическими 3-сферами. С данной гомологической 3-сферой M и алгебраически разложимым, 1-оснащенным зацеплением $\mathcal{L}$ в M мы свяжем линейную комбинацию гомологических 3-сфер

$$(M, \mathcal{L}) := \sum_{\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}} (-1)^{\#\mathcal{L}'} M_{\mathcal{L}'} \in \mathcal{M} \ ,$$

где суммирование ведется по всем подзацеплениям $\mathcal{L}'$ зацепления $\mathcal{L}$, включая пустое; $\#\mathcal{L}'$ — число компонент подзацепления $\mathcal{L}'$.

Обозначение. Через $\mathcal{M}_m$ обозначим подпространство в $\mathcal{M}$, порожденное всеми линейными комбинациями вида $(M, \mathcal{L})$, где число компонент $\#\mathcal{L}$ равно m:

$$\mathcal{M}_m := \{(M, \mathcal{L}) | \#\mathcal{L} = m\} \ .$$

Пространства $\mathcal{M}_m$ образуют убывающую фильтрацию

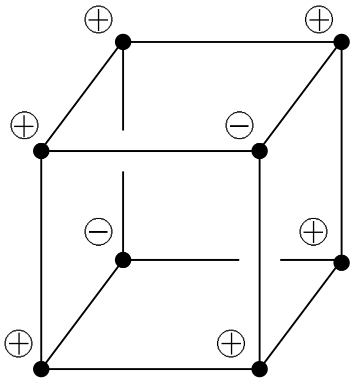
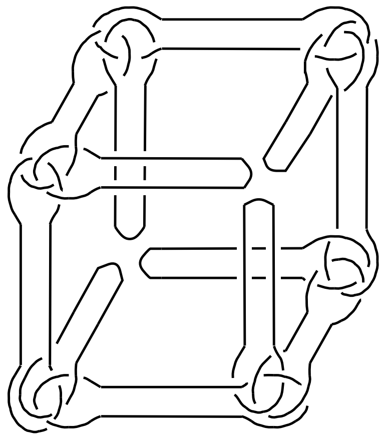
$$\mathcal{M} \supseteq \mathcal{M}_0 \supseteq \mathcal{M}_1 \supseteq \mathcal{M}_2 \supseteq \mathcal{M}_3 \supseteq \ldots \ .$$

Определение. Инвариант $v : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ называется *инвариантом порядка* m, если $v|_{\mathcal{M}_{m+1}} \equiv 0$ и $v|_{\mathcal{M}_m} \not\equiv 0$.

Линейные пространства, порожденные инвариантами различных порядков, образуют возрастающую фильтрацию в пространстве всех инвариантов. Примером инварианта конечного порядка (равного 3) является знаменитый инвариант Кассона (A. Casson) (см. [Oh1]). В [Oh2] Ооцуки построил серию инвариантов λ_n, обобщающих инвариант Кассона, равный $\lambda_1/6$. А. Крикер и Б. Спенс [KrS] доказали, что λ_n имеет порядок $3n$. Таким образом, для всех m, делящихся на 3, имеется нетривиальный инвариант порядка m. С другой стороны, в [GO] доказано, что $\mathcal{M}_{3n} = \mathcal{M}_{3n+1} = \mathcal{M}_{3n+2}$. Поэтому инвариантов гомологических 3-сфер порядков, не делящихся на 3, не бывает.

Определение. *Отображение Ле* [Le] из множества трехвалентных графов в $\mathcal{M}$ определяется следующим образом. Пусть G — регулярный трехвалентный (возможно несвязный) граф с $2n$ вершинами, в которых задано вращение. Вложим G в трехмерное пространство и рассмотрим его общую проекцию на плоскость такую, что вращение в каждой вершине согласовано с ориентацией плоскости. Пометим i-ю вершину G одним из знаков $\varepsilon_i =$ '+' или '−'. Помеченный граф обозначим через $G_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n}}$. По этому графу мы построим оснащенное зацепление $\mathcal{L}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n}}(G)$ в S^3, состоящее из $3n$ компонент, отвечающих ребрам графа. Каждая компонента незаузлена и представляет собой тонкий овал, лежащий вдоль соответствующего ребра. В окрестности вершины расположение овалов зависит от метки данной вершины и устроено локально как борромеево зацепление, если метка положительна, и как тривиальное зацепление, если метка отрицательна:

Оснащения всех компонент построенного зацепления будем считать равными 1. Полученное оснащенное зацепление и есть $\mathcal{L}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n}}(G)$. Вот пример:

$G_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n}} =$  $\mathcal{L}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n}}(G) =$ 

Легко видеть, что $\mathcal{L}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n}}(G)$ — алгебраически разложимое, 1-оснащенное зацепление. Теперь определим отображение Ле как альтернированную сумму 2^{2n} гомологических 3-сфер, полученных хирургией Дена вдоль построенных зацеплений:

$$\boxed{Le(G) = \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n}} \varepsilon_1 \cdot \ldots \cdot \varepsilon_{2n} \cdot S^3_{\mathcal{L}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n}}(G)} \,.}$$

Построенное отображение, вообще говоря, зависит от вложения графа G в трехмерное пространство и от его проекции на плоскость.

Теорема [Le, GO].
1) Образ $Le(G)$ графа G s $2n$ вершинами принадлежит $\mathcal{M}_{3n}$.

Рассмотрим композицию $\pi \circ Le$ отображения Ле из множества графов с $2n$ вершинами с проекцией $\pi : \mathcal{M}_{3n} \to \mathcal{M}_{3n}/\mathcal{M}_{3(n+1)}$. Тогда

2) Отображение $\pi \circ Le$ определено корректно, т. е. не зависит от способа вложения G в трехмерное пространство и его проекции на плоскость.

3) Отображение $\pi \circ Le$ удовлетворяет соотношениям (AS) и (IHX).

4) Отображение $\pi \circ Le$ задает изоморфизм пространства, порожденного (несвязными) 3-графами, рассматриваемыми по модулю соотношений (AS) и (IHX), на пространство $\mathcal{M}_{3n}/\mathcal{M}_{3(n+1)}$.

Описанное выше отображение Ле было придумано не сразу. Вначале Ооцуки [Oh1] рассмотрел отображение

$$G \mapsto (S^3, \mathcal{L}_{+,\ldots,+}(G))$$

и доказал его сюрьективность. Это отображение не удовлетворяет соотношениям (AS) и (IHX), однако позволяет доказать, что последовательные факторы $\mathcal{M}_m/\mathcal{M}_{m+1}$ конечномерны. Затем Гаруфалидис и Ооцуки [GO] ввели новое отображение

$$G \mapsto \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n}} \varepsilon_1 \cdot \ldots \cdot \varepsilon_{2n} \cdot (S^3, \mathcal{L}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n}}(G)),$$

где $(S^3, \mathcal{L}_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{2n}}(G))$ — определенная выше линейная комбинация 2^{3n} гомологических сфер, и доказали, что оно удовлетворяет (AS) и (IHX). Наконец, Ле заметил [Le, Lemma 5.1], что отображение Гаруфалидиса–Ооцуки можно задать проще, а именно формулой для отображения Ле, взятой в рамочку.

Наиболее трудная часть теоремы — инъективность отображения $\pi \circ Le$ — доказана в [Le] (см. также [BGRT]).

Список литературы

[AH] K. I. Appel, W. Haken, *Every planar map is four colorable*, Contemp. Math. **98**, Amer. Math. Soc., Providence, 1989.

[BGRT] D. Bar-Natan, S. Garoufalidis, L. Rozansky, D. P. Thurston, *The Århus invariant of rational homology 3-spheres I: A highly non trivial flat connection on S^3*. Preprint q-alg/9706004, June 1997.

[BN1] D. Bar-Natan, *On the Vassiliev knot invariants*, Topology, **34** (1995) 423–472.

[BN2] D. Bar-Natan, *Lie algebras and the four color theorem*, Århus University preprint, August 1995, and q-alg/9606016 preprint, June 1996. To appear in Combinatorica.

[Ca] A. Cayley, *On the colouring of maps*, Proc. Royal Geographical Soc. (New Series), **1** (1879) 259–261.

[CD1] S. Chmutov, S. Duzhin. *An upper bound for the number of Vassiliev knot invariants.* — Journal of Knot Theory and its Ramifications. **3** (1994), 141–151.

[CD2] S. Chmutov, S. Duzhin. *A lower bound for the number of Vassiliev knot invariants.* Preprint, 21 pages (`ftp://ftp.botik.ru/pub/local/zmr/lb.ps.gz`). Принято к печати в 'Topology and Applications' (сентябрь 1997).

[CD3] S. Chmutov, S. Duzhin. *The Kontsevich integral.* Preprint of Max Planck Institut für Mathematik, Bonn, August 1997, 27 pp., Available as PostScript file at `ftp://ftp.botik.ru/pub/local/zmr/ki.ps.gz`.

[CDL] S. Chmutov, S. Duzhin, S. Lando. *Vassiliev knot invariants I. Introduction.* — Adv. in Soviet Math., **21**. Singularities and Curves, V.I.Arnold ed. (1994) 117–126.

[CV] S. Chmutov, A. Varchenko, *Remarks on the Vassiliev knot invariants coming from sl_2*, Topology **36** (1997) 153–178.

[Cub] G. Royle. *WWW-page* `http://www.cs.uwa.edu.au/~gordon/cubics/` *containing tables of 3-graphs*, October 1996.

[Das] O. Dasbach, *Private communication*, July 1997.

[Ftp] А. И. Каишев, *Програмы и данные, расположенные на анонимном ftp-сервере* `ftp://math.botik.ru/pub/a3g`.

[Gar] S. Garoufalidis, *Reinventing the wheel*, Harvard University preprint, February 1997.

[GO] S. Garoufalidis, T. Ohtsuki, *On finite type invariants of 3-manifolds III: Manifold weight systems*, preprint (March, 1997), to appear in Topology.

[He] P. J. Heawood, *Map-colour theorem*, Quarterly J. of Pure and Applied Math., **24** (1890) 332–338.

[Ka1] L. H. Kauffman, *Map coloring and the vector cross-product*, J. Comb. Theory. B, **48** (1990) 145–154.

[Ka2] L. H. Kauffman, *Map coloring, q-deformed spin networks and Turaev–Viro invariants for 3-manifolds*, Int. J. of Mod. Phys. B, **6** (1992) 1765–1794.

[KaS] L. H. Kauffman, H. Saleur, *An algebraic approach to the planar coloring problem*, Comm. Math. Phys., **152** (1993) 565–590.

[Kai] P. C. Kainen, *Is the four color theorem true?*, Geombinatorics, **3** (1993) No. 2, 41–56.

[Ke] A. B. Kempe, *On the geographical problem of the four colours*, Amer. J. of Math., **2** (1879) 193–200.

[Kir] R. C. Kirby, *The calculus of framed links in* S^3, Invent. Math., **45** (1978) 35–56.

[Kn] J. Kneissler, *The number of primitive Vassiliev invariants up to degree twelve.*. Preprint q-alg 9706022, also available at `http://rhein.iam.uni-bonn.de/~jk/`, June 1996.

[Kon] M. Kontsevich, *Feynman diagrams and low-dimensional topology*, First European Congress of Mathematics II 97–121, Birkhäuser, Basel 1994.

[KrS] A. Kricker, B. Spence, *Ohtsuki's invariants are of finite type*, preprint of Queen Mary and Westfield College, London and preprint q-alg/9608007, July 1996.

[Kv] *XXI Российская олимпиада школьников по математике.* Квант, 1995, 5, 46–49 (см. также *Задачник Кванта*, M1509).

[Le] T. T. Q. Le, *An invariant of integral homology 3-spheres which is universal for all finite type invariants*, in *Solitons, Geometry, and Topology: On the Crossroad*, (V. Buchstaber and S. Novikov, eds.), AMS Translation Series 2, **179**, American Mathematical Society, Providence (1997) 75–100.

[Li] W. B. R. Lickorish, *A representation of orientable combinatorial 3-manifolds*, Ann. Math. **76** (1962) 531–538.

[MF] С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, *Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии.* Изд-во Московского университета, 1991.

[Oh1] T. Ohtsuki, *Finite type invariants of integral homology 3-spheres*, J. of Knot Theory and its Ramifications, **5** (1996) 101–115.

[Oh2] T. Ohtsuki, *A polynomial invariant of integral homology 3-spheres*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **117** (1995) 83–112.

[PS] В. В. Прасолов, А. Б. Сосинский, *Узлы и маломерная топология*, специальный семинар, изд-во МК НМУ, 1993.

[Pen] R. Penrose, *Applications of negative dimensional tensors*, In: Combinatorial mathematics and its applications (ed. D. J. A. Welsh), New York, London: Academic Press, 1971.

[Ro] D. Rolfsen, *Knots and Links*. Publish or Perish, 1976.

[RSST] N. Robertson, D. P. Sanders, P. Seymour, R. Thomas, *The four-colour theorem*, J. Comb. Theory. B, **70** (1997) 2–44.

[SK] T. L. Saaty, P. C. Kainen, *The four-color problem. Assaults and conquest*, Second edition. Dover Publications, Inc., New York, 1986.

[Se] P. Seymour, *Progress on the four-color theorem*, Proc. of the International Congress of Mathematicians, (Zürich, 1994), Birkhäuser, Basel, 1995, **1**, 183-195.

[Ta] P. G. Tait, *Remarks on the colouring of maps*, Proc. Royal Soc. Edingburgh, **10** (1880) 729.

[Va] V. A. Vassiliev, *Cohomology of knot spaces*, Theory of Singularities and Its Applications (ed. V. I. Arnold), Advances in Soviet Math., **1** (1990) 23–69.

[Vai] A. Vaintrob, *Melvin-Morton conjecture and primitive Feynman diagrams*, University of Utah preprint, also known as q-alg/9605028, May 1996.

[Vo] P. Vogel, *Algebraic structures on modules of diagrams*, Institut de Mathématiques de Jussieu, Prépublication 32, August 1995, 45 pages.

[Wa] A. D. Wallace, *Modifications and cobounding manifolds*, Canad. J. Math., **12** (1960), 503–528.