Graphes de Moore

S. Duzhin, Université de Pereslavl

duzhin@botik.ru

Un graphe de Moore est un graphe régulier de diamètre 2 et de degré k ayant k^2+1 sommets. On sait qu'un tel graphe ne peut exister que pour les valeurs suivantes de k: $k = 2$, 3, 7 et 57 (théorème de Hoffman et Singleton [1]). On connaît la structure des graphes de Moore de degré $k = 2$, 3 et 7. On ne sait rien dans le cas $k = 57$.

Je dirai quelques mots sur l'origine de ce probleme, je donnerai une démonstration simple du théorème de Hoffman et Singleton et je parlerai de la géométrie des graphes de Moore de degré 3 (dit *graphe de Petersen*) et de degré 7 (dit *Hoffman–Singleton*). De plus, on verra l'importance des notions primaires de la topologie algébrique (espace fibré, revêtement, groupe de monodromie) dans ce sujet.

Définitions

Par un *graphe*, on entend un graphe non dirigé, sans lacets ni arêtes multiples. Un graphe est dit *régulier* de degré k, si tout sommet est incident avec exactement k arêtes. La *distance* entre deux points est la longueur minimale d'un chemin qui les réunit. Le diamètre du graphe est la distance maximale entre deux de ses sommets.

Par example, un circuit de $2k+1$ sommets est un graphe régulier de degré 2 et diamètre k.

On voit tout de suite que le nombre de sommets dans un graphe de degré k et diamètre 2 ne peut jamais surpasser k^2+1. En effet, choisissons un sommet quelconque v, alors le nombre des sommets voisins de v est k et le nombre des sommets á distance 2 de v est inférieur ou égal à $k(k-1)$. L'égalité tient si et seulement si tous les points à distance 1 et 2 de v sont distincts. Dans ce cas, le nombre total de sommets devient $1+k+k(k-1) = k^2+1$.

On peut exprimer le raisonnement ci-dessus de la manière suivante:

Proposition 1. *Un graphe régulier de degré k avec k^2+1 sommets est un graphe de Moore si et seulement si il n'a pas de cycles de longueur 3 et 4.*

Remarque. On peut également introduire la notion du graphe de Moore de diamètre $d > 2$, mais un théorème simple affirme qu'un tel graphe est toujours ou bien un circuit ou bien un graphe de Moore de diamètre 2. Le problème général comprenant ce des graphes de Moore est le probleme des *grands graphes de degré et diamètre donnés* (voir [3] et les références là-dedans).

Thérème fondamentale

Théorème (Hoffman et Singleton.) *Le degré d'un graphe de Moore ne peut être égal qu'à une des valeurs suivantes: 2, 3, 7 et 57.*

Démonstration. Soit G un graphe de Moore de degré k. Dénotons par A sa matrice associeé, $A_{i,j} = 1$ si les sommets numéro i et j sont adjacents, 0 autrement. Soit B la matrice de distance 2, c'est-à-dire $B_{i,j} = 1$ si la distance entre les sommets i et j est 2, $B_{i,j} = 0$ autrement. Si encore E est la matrice unité (matrice de distance 0), on a alors $E + A + B = I$ où I est la matrice avec tous éléments égaux à 1.

La proposition 1 entraîne les deux lemmes suivants:

Lemme 1. $A^2 = kE + B$.

Lemme 2. $AB = (k-1)A + (k-1)B$.

— et l'on en déduit l'équation caractéristique de la matrice A:

$$A^3 - (k-1)A^2 - (2k-1)A + k(k-1) = 0.$$

On sait bien que le spectre de la matrice associée d'un graphe régulier connexe de degré k contient la valeur propre k de multiplicité 1. Il doit y avoir donc encore deux valeurs propres λ_1 et λ_2 de multiplicité m_1 et m_2 satisfaisantes à l'équation $A^2 + A - (k-1) = 0$.

Lemme 3. $m_1 = m_2$ implique $k = 2$.

Ce lemme se démontre facilement partant du système d'équations

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 &= k^2 \\ \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 &= -k \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= -1 \end{aligned}$$

Ici, la deuxième équation veut dire que la somme de toutes les valeurs propres est égale à la trace de la matrice.

Pour démontrer le théorème, supposons que $k \neq 2$. On a alors $m_1 \neq m_2$ et donc les racines λ_1 et λ_2 sont des nombres rationnels: $\lambda_1 = (-1+t)/2$, $\lambda_2 = (-1-t)/2$ où t est un entier naturel vérifiant à $4k - 3 = t^2$. Du système ci-dessus on déduit maintenant l'équation

$$t^4 - 2t^2 - 16(m_1 - m_2)t - 15 = 0,$$

donc t doit être un diviseur du nombre 15.

Prenant successivement $t = 1, 3, 5, 15$, on obtient les valeurs $k = 1, 3, 7, 57$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. Cette démonstration a été inventée par S. Chmutov en 1990 au cours d'un séminaire dirigé par le présent auteur. Elle est beaucoup plus courte et claire que la démonstration donnée dans [2].

Exercise 1. Construire le graphe de Moore de degré 3.

Exercise 2. Démontrer que le graphe de Moore de degré 4 n'existe pas en calculant le nombre de 5–circuits qui passent par un sommet fixé dans le graphe eventuel.

Revêtements des graphes.

Definition. Un revêtement du graphe G est un graphe H avec une application surjective des ensembles de sommets $p : V(H) \to V(G)$ vérifiante les deux propriétés:

1. pour tout sommet $v \in V(G)$ l'image inverse $F_v = p^{-1}(v)$ forme un sous-graphe de H sans arêtes de la cardinalité constante m.

2. toute arête de G dont les bouts sont u et v correspond à une famille de m arêtes de H qui joignent un à un les points du fibré F_u aux points du fibré F_v.

Si H est un revêtement de G, alors tout chemin c dans G se lève uniquement à un chemin dans H. En particulier, pour tout fibré $F_v = p^{-1}(v)$, on peut définir le groupe de monodromie $M(v) \subset \mathrm{Perm}(F_v)$ engendré par les permutations provenantes des chemins fermés dans G.

Par example, le graphe complet de 3 sommets K_3 possède deux revêtements divers de multiplicité 2:

(1) la réunion disjointe de deux exemplaires de K_3 avec la monodromie triviale;

(2) le circuit C_6 de 6 sommets avec la monodromie complète.

Soit G un graphe régulier de degré k avec k^2+1 sommets et G' son sous-graphe qu'on obtient en jetant de côté un sommet quelconque v de G et tous ses voisins. L'ordre de G' est donc $k(k-1)$ et il y a une projection naturelle p de cet ensemble de $k(k-1)$ points sur l'ensemble de k points voisins de v.

Proposition 2. *Le graphe G est un graphe de Moore si et seulement si l'application p est un revêtement du graphe complet de l'ordre k, dont la monodromie au-dessus des 3- et 4-cycles n'a pas de points fixes.*

Exemple 1. Pour $k = 3$, prenant le revêtement double non-trivial du graphe complet K_3 et y ajoutant les 4 sommets de la manière standarde, on arrive au graphe de Petersen.

Exemple 2. Pour démontrer l'existence du graphe de Moore de degré $k = 7$, on doit construire un revêtement 6-uple du graphe complet sur 7 sommets dont la monodromie satisfait aux exigences de la proposition 2. Un tel revêtement a été découvert par Irina Ignatovich (Program Systems Institute, Pereslavl-Zalessky) en 1990 en utilisant l'ordinateur. Après cela, on a trouvé que le graphe de Moore construit de cette manière existait dans la littérature depuis 1960 (voir [1]).

La monodromie du revêtement de Ignatovich possède des propriétés tout à fait exceptionnelles que nous décrivons dans la proposition suivante.

Proposition 3. *Pour tout circuit γ dans K_7 du longueur $r = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ la monodromie de ce revêtement au-dessus de γ est une permutation du fibré d'ordre $r-1$. Plus précisement, ces permutations ont toujours la structure cyclique suivante:* $(1,1,1,1,1,1)$, $(2,2,2)$, $(3,3)$, $(4,1,1)$, $(5,1)$, $(3,2,1)$.

Autres constructions du graphe de Hoffman–Singleton.

1. La construction la plus classique du graphe de Hoffman–Singleton est *le fibré de Petersen au-dessus du graphe biparti* $K_{5,5}$. Expliquons-nous.

Le graphe de Petersen P_{10} peut être représenté comme deux circuits pentagonaux réunis par cinq arêtes selon la formule $x \mapsto 2x \bmod 5$ si les éléments de chaque circuit sont dénombrés par les résidus modulo 5. Actuellement, le dénombrement étant fixé, on peut choisir n'importe quelle des 10 applications $x \mapsto \pm 2x + a \bmod 5$ où $a = 0, 1, 2, 3, 4$. On appèle une telle application *la torsion de Petersen*.

Un fibré de Petersen au-dessus d'un graphe donné G est un graphe plus grand H qui s'obtient de G en remplaçant chaque sommet de G par un curcuit pentagonal et chaque arête de G par une torsion de Petersen joignante ces deux circuits.

Maintenant, prenons le graphe complet biparti $K_{5,5}$ ("5 maisons et 5 puits") comme la base de "l'espace fibré", suspendons un 5-circuit au-dessus du chaque sommet, soit maison ou puits, et joignons la maison numéro i au puits numéro j par la torsion de Petersen $x \mapsto 2x + ij \bmod 5$.

Exercise 3. Vérifier que cette construction amène à un graphe de diamètre 2.

2. Construction géométrique de J. Seidel.

Soit P l'ensemble des points et L l'ensemble des lignes dans l'espace projectif à 3 dimensions sur le corps fini de 2 éléments F_2. On a $\#(P) = 15$, $\#(L) = 35$. On pose $V = P \cup L$ et l'on considère V comme l'ensemble des sommets du graphe de Hoffman–Singleton. Un sommet $p \in P$ est uni par les arêtes à tous les sommets $l \in L$ correspondants aux lignes qui contiennent p. Deux sommets $p_1, p_2 \in P$ ne sont jamais uni. Pour définir les arêtes joignantes les sommets du type ligne $l_1, l_2 \in L$, on construit préalablement une correspondance bijective entre l'ensemble L et l'ensemble des triples d'un ensemble auxiliaire M de cardinalité 7 ainsi que les deux lignes se rencontrent si et seulement si les deux triple correspondants ont exactement un point commun. Alors, on joind les deux sommets $l_1, l_2 \in L$ si et seulement si les triples correspondants sont disjoints dans M.

Exercise 4. Trouver explicitement la correspondance décrite ci-dessus et vérifier que le graphe ainsi obtenu est un graphe de Moore.

Problème ouvert. Construire le graphe de Moore de degré 57 ou démontrer qu'il n'existe pas.

Références

[1] A. J. Hoffman, R. R. Singleton. On Moore graphs with diameters 2 and 3. – IBM J. Res. Develop., 1960, 4, 497–504.

[2] E. Bannai, T. Ito. Algebraic combinatorics I. Association schemes. Benjamin and Cummings, 1984.

[3] Ch. Delorme, F. Comellas. Table de grands graphes de degré et diamètre donnés. – `http://maite71.upc.es/grup_de_grafs/table_g.html`.

[4] S. Abramov, S. Chmutov, S. Duzhin, I. Ignatovich, A. Nemytykh. Quelques résultats sur le problème des grands graphes. Manuscript (en Russe), 1991.