определение ориентации струнных зацеплений при помощи инвариантов конечного типа

С.В.Дужин, М.В.Карев

Аннотация. Мы доказываем существование инварианта Васильева порядка 7 для длинных (струнных) зацеплений с двумя нумерованными компонентами, изменяющего свое значение при обращении ориентации. Доказательство основано на изучении весовой системы со значениями в тензорном квадрате универсальной обертывающей алгебры для алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N$.

1. Введение

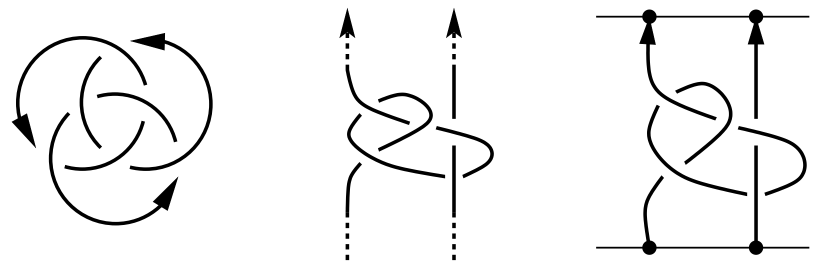
Хорошо известно, что классические инвариантные полиномы (Джонса, HOMFLY и т.д.) и вообще квантовые инварианты узлов принимают одинаковые значения на узлах, отличающихся сменой ориентации. Класс инвариантов Васильева строго шире [Vog], и вопрос о том, могут ли они различать ориентацию, по сей день не решен. В этой работе мы изучаем соответствующую проблему для зацеплений с более чем одной компонентой.

Пусть S^1_p — дизъюнктное объединение n пронумерованных экземпляров ориентированной окружности, $\mathbb{R}^1_p$ — дизъюнктное объединение n пронумерованых экземпляров вещественной прямой, а I^1_p — дизъюнктное объединение n пронумерованных ориентированных отрезков $[0,1]$.

Определение. *Назовем n-компонентным замкнутым зацеплением гладкое вложение S^1_p в ориентированное трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$, рассматриваемое с точностью до изотопии, сохраняющей компоненты.*

Длинным n-компоненитным зацеплением называется гладкое вложение R^1_p в ориентированное трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$ с фиксированной асимптотикой на бесконечности: $x_i(t) = [i, 0, t]$ при $|t| > C$, рассматриваемое с точностью до изотопии, тождественной вне шара достаточно большого радиуса, и евклидова движения пространства.

Струнным n-компонентным зацеплением назовем гладкое вложение I^1_p в полосу $\mathbb{R}^2 \times [0,1] \subset \mathbb{R}^3$ с закрепленными концами: $x_i(t) = [i, 0, t]$ для $t = 0, 1$, рассматриваемое с точностью до изотопии, тождественной на границе, и евклидова движения пространства.



Замкнутое зацепление — Длинное зацепление — Струнное зацепление

Очевидно, что теории длинных и струнных зацеплений эквивалентны. В случае узлов ($n = 1$) обе эти теории также эквивалентны теории замкнутых зацеплений, но это становится неверным в случае $n > 1$.

Вопрос об обратимости в этом случае ставится следующим образом. Пусть L — некоторое зацепление и L' — его обращение, т.е. то же зацепление с той же нумерацией компонент, но с противоположной ориентацией. Может ли так случиться, что зацепления L и L' не эквивалентны? Если ответ утвердителен, то какие инварианты могут их различать?

В случае узлов этот вопрос оставался нерешенным долгое время, пока Троттер [Tro] в 1964 году не доказал необратимость некоторых узлов (например, крендельного узла $P_{3,5,7}$). Простейшим необратимым узлом является узел 8_{17} ([Ka]). Инварианты, использованные в работах [Tro, Ka] и др. для доказательства неэквивалентности узла своему обратному, довольно сложны, и до сих пор не известно, можно ли различить какую-то пару взаимно обратных узлов при помощи инвариантов конечного типа.

В случае зацеплений единственным опубликованным результатом по данной проблеме является теорема Лина [L2], которая утверждает, что инварианты Васильева различают ориентацию замкнутых зацеплений с 6 или более компонентами. Имеется еще несколько работ, имеющих к этой задаче лишь косвенное отношение, например, Бар-Натан в [BN2] изучает *гомотопические* инварианты струнных зацеплений, а Лин в [L1] использует нестандартное определение класса инвариантов конечного типа.

Настоящая работа посвящена вопросу определения ориентации с помощью инвариантов конечного типа для *струнных* (или длинных) зацеплений. Переформулировка проблемы в терминах хордовых диаграмм немедленно показывает, что ответ утвердителен для $n > 2$. В случае 2-компонентных зацеплений ($n = 2$) вопрос нетривиален; ниже мы даем доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Существует инвариант Васильева f порядка, не превосходящего 7, и двухкомпонентное струнное зацепление L, такие, что $f(L') \neq f(L)$.*

Мы дадим два доказательства этой теоремы. Оба будут основаны на прямых вычислениях. Первое доказательство (разд. 2–3, предложение 1 на стр. 6) использует хордовые диаграммы и требует привлечения компьютерного счета. Второе (разд. 4–5, предложение 2 на стр. 10) — использует диаграммы Якоби; необходимые для него вычисления выполняются вручную. Оба доказательства на самом деле относятся к *оснащенным* зацеплениям, но в разделе 6 мы покажем, каким образом результат переносится на неоснащенный случай, что и завершит доказательство теоремы.

Вопрос об обращении ориентации n-компонентных струнных зацеплений на уровне инвариантов конечного типа тесно связан с вопросом о коммутативности алгебры хордовых диаграмм на n нитях. А именно, некоммутативность алгебры $\mathcal{A}(n)$ влечет существование элементов, неинвариантных относительно замены ориентации. В самом деле, операция замены ориентации τ (см. ниже) является антиавтоморфизмом. Если предположить симметричность всех элементов $\mathcal{A}(n)$, то мы бы получили: $xy = \tau(xy) = \tau(y)\tau(x) = yx$ для любых $x, y \in \mathcal{A}(n)$. (Мы признательны рецензенту, обратившему наше внимание на это рассуждение.)

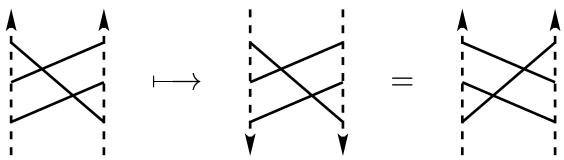
Некоммутативность алгебры $\mathcal{A}(n)$ при $n > 2$ очевидна, а при $n = 2$, хотя и считается известной как фольклорный факт, но нигде до сих пор не была доказана. Предложение 1 настоящей работы содержит, в частности, первое строгое доказательства этого утверждения.

2. Сведение к хордовым диаграммам

Инварианты конечного типа для различных типов зацеплений определяются так же, как и в классическом случае узлов, см. [BN1, Sta].

Пусть $\mathbb{F}$ — поле характеристики 0, например $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{C}$. Обозначим символом $V_n(p)$ пространство $\mathbb{F}$-значных инвариантов Васильева для p-компонентных длинных зацеплений степени не более чем n, через $\mathcal{A}_n(p)$ — пространство, порожденное хордовыми диаграммами степени n на p нитях с точностью до 4-членных соотношений и через $W_n(p) = \mathcal{A}_n^*(p) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}_n(p), \mathbb{F})$ — соответствующее пространство *весовых систем.* Существует линейное отображение $\sigma_n^p : V_n(p) \to W_n(p)$ (взятие *символа* инварианта Васильева), ядро которого совпадает с $V_{n-1}(p)$, а образ состоит из весовых систем, обращающихся в 0 при применении их к хордовым диаграммам с изолированными хордами. (Для случая оснащенных зацеплений образ совпадает с $W_n(p)$.)

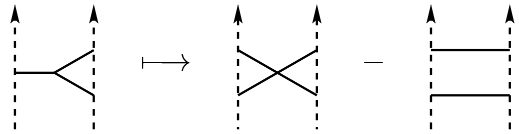
Как и прежде, обозначим через L' зацепление, обращенное по отношению к L. Полагая $\tau_V(f)(L) = f(L')$ для $f \in V$, мы получаем инволюцию τ_V пространства инвариантов Васильева. В терминах хордовых диаграмм соответствующая операция τ_A действует так:

$\tau_A :$  ,

то есть она меняет ориентацию всех компонент носителя хордовой диаграммы, или, что то же самое, отражает изображенную в плоскости диаграмму относительно горизонтальной линии, считая, что компоненты носителя ориентированы вертикально (ориентация компонент при этом сохраняется).

То же самое пространство $\mathcal{A}(p)$ можно получить как линейную оболочку всех *обобщенных* хордовых диаграмм, то есть 1-3-валентных графов, одновалентные вершины которых отождествлены с точками на многообразии $\mathbb{R}_p^1$ с циклическим порядком полуребер, сходящихся в каждой трехвалентной вершине.

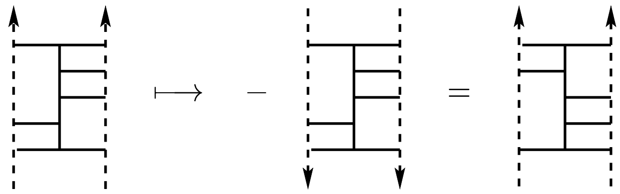
Обобщенные хордовые диаграммы можно понимать как линейные комбинации обычных хордовых диаграмм, получаемые применением STU-соотношений следующего вида (подробнее см. [BN1])



(На рисунках здесь и ниже используется такое соглашение: в каждой трехвалентной вершине ребра упорядочены против часовой стрелки).

Для *обобщенных* хордовых диаграмм определение инволюции τ_A несколько усложняется. Распространение операции τ_A на обобщенные хордовые диаграммы посредством соотношений STU приводит к следующему правилу:

$\tau_A :$



т.е. необходимо поменять ориентацию на каждой компоненте носителя и *умножить результат на* ± 1 в зависимости от четности количества трехвалентных вершин, или, что то же самое, просто отразить плоское изображение диаграммы относительно горизонтальной прямой, не меняя ориентации носителя.

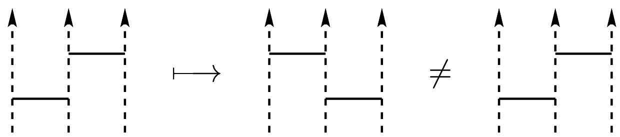
Лемма 1. *Инволюция* τ_A *есть градуированный аналог инволюции* τ_V, *т.е. следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{tikzcd} V_n(p) \arrow[r, "\sigma_n^p"] \arrow[d, "\tau_V"] & W_n(p) \arrow[d, "\tau_A^*"] \\ V_n(p) \arrow[r, "\sigma_n^p"] & W_n(p) \end{tikzcd}$$

Доказательство. Для обычных хордовых диаграмм это немедленно следует из определения σ ([BN1, CD]). На обобщенные хордовые диаграммы распространение происходит как объяснено выше. □

Проблема нахождения необратимых струнных зацеплений с помощью инвариантов конечного типа эквивалентна следующей: существует ли хордовая диаграмма на p нитях, отличная от своей обратной по модулю соотношений 4T. При $p \geq 3$ соответствующий пример легко построить:

$\tau_A :$



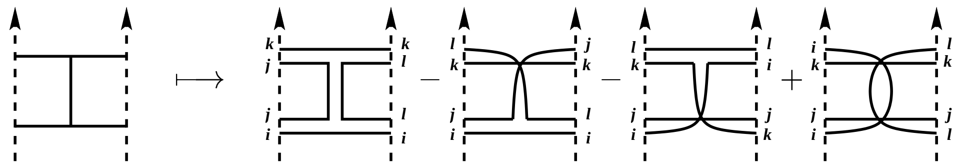
При $p = 2$ проблема нетривиальна, поскольку, как легко убедиться, хордовые диаграммы малых степеней (например, диаграммы на стр. 3) все τ_A-инвариантны. В следующем разделе мы предъявим диаграмму, не являющуюся τ_A-инвариантной.

3. Первое доказательство теоремы

Для того, чтобы доказать, что некоторый элемент пространства $\mathcal{A}(p)$ отличен от нуля, естественно использовать весовые системы, то есть линейные функционалы на этом пространстве. Одной из наиболее часто применяемых весовых систем является гомоморфизм Концевича $\varphi = \varphi_{\mathfrak{g}} : \mathcal{A}(p) \to U(\mathfrak{g})^{\otimes p}$, который строится по метризованной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (см. [Kon, CD]). В действительности, φ принимает значения в $\mathfrak{g}$-инвариантной подалгебре $U(p) = [U(\mathfrak{g})^{\otimes p}]^{\mathfrak{g}}$. Мы дадим описание действия этой весовой системы для случая $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N$ используя стандартный базис e_{ij} (матрица с одной 1 и большим количеством нулей) и метрику, определенную правилом сопряжения $e_{ij}^* = e_{ji}$.

Лемма 2. *Пусть $D \in \mathcal{A}(p)$ — (обобщенная) хордовая диаграмма на p нитях. Элемент $\varphi(D) \in U(\mathfrak{gl}_N)^{\otimes p}$ может быть получен следующей процедурой. Возьмем альтернированную сумму по всем возможным вариантам разрешения* [BN1] *внутренних тройных точек диаграммы D. Для каждого варианта разрешения необходимо обозначить компоненты связности полученной диаграммы различными независимыми индексами; затем заменить каждую пару сходящихся индексов на e_{ij} и взять сумму по всем встречающимся индексам от 1 до N. (Если встречаются замкнутые компоненты, то они переходят в умножение на N.)*

Доказательство этой леммы в точности повторяет аналогичное для случая $p = 1$, которое можно найти в [BN1, CD]. Приведем лишь пример:



Следовательно, образ этой диаграммы при применении к ней весовой системы φ равен

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{N} (e_{ij}e_{jk} \otimes e_{li}e_{kl} - e_{ij}e_{kl} \otimes e_{li}e_{jk} - e_{ij}e_{kl} \otimes e_{jk}e_{li} + e_{ij}e_{ki} \otimes e_{jl}e_{lk}).$$

Заметим, что порядок сомножителей e_{ij} согласуется с ориентацией каждой из компонент носителя, но порядок индексов i, j соответствует “правилу обхода по кругу” (в нашем случае это снизу вверх на левой компоненте и сверху вниз на правой).

Обозначим через τ_U оператор на $U(\mathfrak{gl}_N)^{\otimes p}$, который обращает порядок сомножителей в каждом из мономов и меняет местами индексы у каждого базисного элемента e_{ij}, например $\tau_U(e_{12}e_{23} \otimes e_{13}e_{24}) = e_{32}e_{21} \otimes e_{42}e_{31}$. Этот оператор является инволюцией, сохраняющей ad-инвариантную часть $U(p) = [U(\mathfrak{gl}_N)^{\otimes p}]^{\mathfrak{g}}$.

Следующая лемма непосредственно вытекает из конструкции отображения φ.

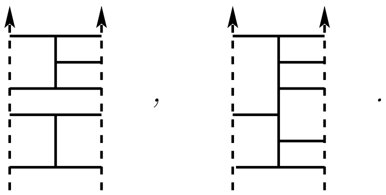
Лемма 3. *Диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}(p) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\tau_A"] & U(p) \arrow[d, "\tau_U"] \\ \mathcal{A}(p) \arrow[r, "\varphi"] & U(p) \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Из леммы следует, что необратимость хордовой диаграммы может быть замечена на уровне универсальной обертывающей алгебры: если φ-образ диаграммы не τ_U-инвариантен, то и сама диаграмма не инварианта относительно τ_A. Таким образом, следующее предложение доказывает заявленную Теорему.

Предложение 1. *Каждая из приведенных ниже диаграмм отлична от свооего образа при применении инволюции τ_A:*



Доказательство. Вычисленные с помощью компьютера φ-образы диаграмм и их обращенных различны, если в качестве алгебры Ли брать $\mathfrak{gl}_4$ (и, следовательно, любую $\mathfrak{gl}_N$ с $N \geq 4$).

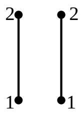
Вычисления проводились так: фиксируем лексикографический порядок на множестве базисных элементов e_{ij} и преобразуем выражение для $\varphi(D)$, полученное по вышеизложенному алгоритму, с использованием коммутационных соотношений, так, чтобы порядок сомножителей в каждом из мономов становился лексикографическим. Программы, использованные для расчетов, а также входные и выходные данные имеются на Интернет-сайте [Calc]. Например, образ диаграммы, изображенной слева, состоит из 58378 слагаемых; его вычисление заняло несколько часов с использованием современного компьютера средней мощности. Поскольку эта диаграмма является произведением двух τ-симметричных диаграмм, мы заодно доказали некоммутативность алгебры $\mathcal{A}(2)$. □

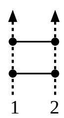
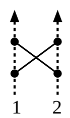
4. Сведение к диаграммам Якоби

Другая, пожалуй более простая, переформулировка проблемы обратимости, может быть дана в терминах крашеных диаграмм *Якоби.* Крашеная диаграмма Якоби — это почти то же самое, что и *китайский иероглиф*, определенный в [BN1], за исключением того, что ее одновалентные вершины помечены одним из p цветов. *Пространство* крашеных диаграмм Якоби определяется как линейное пространство $\mathcal{B}(p)$, формально порожденное всеми p-цветными диаграммами Якоби и профакторизованное по соотношениям антисимметрии и IHX (см. [BN1, CD]).

Аналогично Теореме 8 в [BN1], можно доказать, что отображение симметризации $\chi : \mathcal{B}(p) \to \mathcal{A}(p)$ является линейным изоморфизмом двух векторных пространств (см. также [LM]).

Отображение χ определяется так — объясним конструкцию на примере $p = 2$. Пусть D — диаграмма Якоби с k 'ногами' цвета 1 и l 'ногами' цвета 2. Тогда $\chi(D)$ будет средним по всем $k!l!$ способам прикрепеления ног цвета 1 к первой компоненте носителя и ног цвета два — ко второй, например



$$\longmapsto \frac{1}{2}\Bigg($$  $$+$$  $$\Bigg)$$

Крашеные диаграммы Якоби можно рассматривать как симметрические элементы пространства $\mathcal{A}(p)$ — ровно в том же смысле, как полиномы на пространстве $\mathfrak{g}^*$ отождествляются с симметрическими элементами универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ в силу теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта.

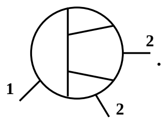
Изоморфизм χ представляет необычайный интерес для наших нужд, поскольку инволюция τ_A, перенесенная в $\mathcal{B}(p)$ через этот изоморфизм, в терминах диаграмм Якоби приобретает необыкновенно простой вид. А именно, оказывается верным следующее утверждение:

Лемма 4. *Определим $\tau_B : \mathcal{B}(p) \to \mathcal{B}(p)$ как линейный оператор, тождественный на всех диаграммах Якоби с четным числом ног и умножающий на -1 каждую диаграмму с нечетным числом ног. Тогда операторная диаграмма*

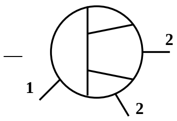
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(p) \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\tau_B"] & \mathcal{A}(p) \arrow[d, "\tau_A"] \\
\mathcal{B}(p) \arrow[r, "\chi"] & \mathcal{A}(p)
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

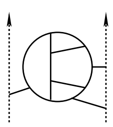
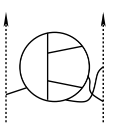
Доказательство. Этот факт очевидным образом вытекает из определений τ_A и τ_B, данных выше. Для лучшего понимания приведем простой пример. Пусть

$$D =$$  .

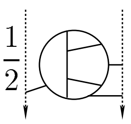
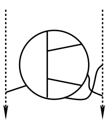
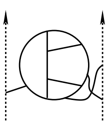
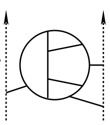
Тогда, по определению,

$$\tau_B(D) = -$$  .

Поэтому

$$\chi(D) = \frac{1}{2}$$  $$+ \frac{1}{2}$$ 

и, следовательно,

$$\tau_A(\chi(D)) = -\frac{1}{2}$$  $$-\frac{1}{2}$$  $$= -\frac{1}{2}$$  $$-\frac{1}{2}$$  $$= \chi(\tau_B(D)).$$

□

Проблема обратимости 2-компонентных струных зацеплений, с учетом приведенной выше леммы, переформулируется таким образом: *существует ли ненулевая двуцветная диаграмма Якоби с нечетным числом ног?* В следующем разделе мы приведем пример такой диаграммы.

5. Второе доказательство теоремы

Возьмем метризованную алгебру Ли $\mathfrak{g}$ и обозначим через $S(\mathfrak{g})$ симметрическую алгебру векторного пространства $\mathfrak{g}$. Конструкция весовой системы $\mathcal{B}(1) \to S(\mathfrak{g})$, описанная в [BN1, CD], допускает обобщение на случай произвольного значения p, позволяя получить гомоморфизм $\psi : \mathcal{B}(p) \to S(\mathfrak{g})^{\otimes p}$, образ которого лежит в $\mathfrak{g}$-инвариантной подалгебре p-й симметрической степени $S(p) = [S(\mathfrak{g})^{\otimes p}]^{\mathfrak{g}}$.

Лемма 5. *Отображение ψ делает коммутативной следующую диаграмму*

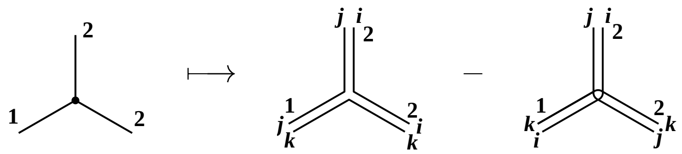
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(p) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\chi"] & S(p) \arrow[d, "\pi"] \\
\mathcal{A}(p) \arrow[r, "\varphi"] & U(p)
\end{tikzcd}$$

где χ — изоморфизм, определенный в предыдущем разделе, φ — весовая система Концевича для алгебры $\mathcal{A}(p)$, а π — p-я тензорная степень изоморфизма Пуанкаре-Биркгофа-Витта.

Доказательство. Доказательство полностью повторяет аналогичное для случая $p = 1$. □

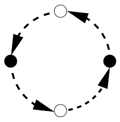
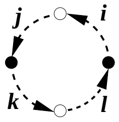
Для случая алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N$ существует графический алгоритм нахождения ψ-образа, аналогичный процедуре применения оператора φ, описанной в разделе 3. Единственное отличие состоит в том, что теперь базисные элементы e_{ij} коммутируют, и мы можем не заботиться о порядке сомножителей в мономах. Приведем пример:

ψ :



$$\longmapsto \quad \sum_{i,j,k=1}^{N} (e_{jk} \otimes e_{ij}e_{ki} - e_{ki}e_{ij}e_{jk}) \ = \ 0.$$

Преимущество отображения ψ состоит в том, что $\mathfrak{g}$-инвариантная часть $S(\mathfrak{gl}_N)^{\otimes p}$ обладает прозрачной структурой. Назовем p-цветным *ожерельем* порядка n комбинаторный объект, определенный как последовательность из n чисел от 1 до p, рассматриваемая с точностью до циклических перестановок членов последовательности; визуализацией этого объекта являются расположенные на ориентированной окружности n бусин p цветов. Каждому ожерелью можно сопоставить ad-инвариантный элемент $S(\mathfrak{gl}_N)^{\otimes p}$ следующим образом. Поставим над каждой дугой в ожерелье свой индекс; тогда каждая бусина переходит в элемент e_{ij} где i — индекс над ниткой сзади от бусины и j — индекс над ниткой спереди; поставим этот элемент e_{ij} в тензорный соомножитель, номер которого совпадает с номером цвета соответствующей бусины, а потом возьмем сумму по всем встречающимся индексам от 1 до N. Например:

[1212] =  $\longmapsto$ 

$\longmapsto \quad \sum_{i,j,k,l=1}^{N} (e_{ij}e_{kl} \otimes e_{jk}e_{li}) \; =: \; x_{1212}$.

Мы будем обозначать соответствующие *ожерелья* через x_μ, где μ — лексикографически наименьшая последовательность, отвечающая данному ожерелью.

Лемма 6. *В случае алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N$, $\mathfrak{g}$-инвариантная часть $S(\mathfrak{g})^{\otimes p}$, совпадает с алгеброй, порожденной всеми ожерельями. Алгебраические соотношения между элементами могут иметь место при малых N, но исчезают при $N \to \infty$.*

Доказательство. Утверждения, близкие по формулировке к этой лемме, доказаны в [W] и [VP]. Данное утверждение из них легко выводится. □

В алгебре, порожденной ожерельями, существует инволюция τ_S, обращающая ориентацию каждого ожерелья. Для двуцветных ожерелий вплоть до степени 5 она действует тождественно; ожерелье наименьшей степени, не инвариантное относительно τ_S, — x_{112122}. Оказывается, что операция τ_S согласуется со всеми остальными операциями обращения, обозначенными выше буквой τ с различными индексами.

Лемма 7. *Инволюции изменения ориентации в пространствах $\mathcal{A}(p)$, $\mathcal{B}(p)$, $S(p)$, $U(p)$ коммутируют с четырьмя стрелками диаграммы в лемме (5). Точнее, имеет место коммутативный куб*

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & \mathcal{B}(p) \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dl, "\tau_B"'] \arrow[dd, "\chi" near end] & & S(p) \arrow[dl, "\tau_S"'] \arrow[dd, "\pi"] \\
\mathcal{B}(p) \arrow[rr, crossing over, "\psi" near end] \arrow[dd, "\chi"'] & & S(p) & \\
 & \mathcal{A}(p) \arrow[rr, "\varphi" near start] \arrow[dl, "\tau_A"'] & & U(p) \arrow[dl, "\tau_U"'] \\
\mathcal{A}(p) \arrow[rr, "\varphi"] & & U(p) \arrow[from=uu, crossing over, "\pi" near start] &
\end{tikzcd}$$

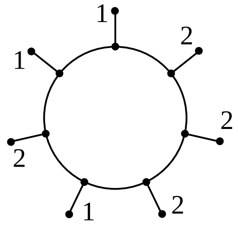
(напомним, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N$, $S(p) = [S(\mathfrak{g})^{\otimes p}]^{\mathfrak{g}}$, $U(p) = [U(\mathfrak{g})^{\otimes p}]^{\mathfrak{g}}$; все отображения были определены ранее в тексте, в частности, π — это изоморфизм Пуанкаре-Биркгофа-Витта).

Доказательство. На самом деле, единственное, что еще не было доказано — это коммутативность верхней грани куба. Поскольку все вертикальные стрелки — изоморфизмы, этот факт вытекает из коммутативности остальных пяти граней, которая была доказана выше в различных местах текста. □

В силу коммутативности верхней грани куба, для доказательства не-τ_B-инвариантности какой-то диаграммы Якоби (элемента $\mathcal{B}(p)$), достаточно показать не-τ_S-инвариантность его ψ-образа в алгебре ожерелий. Поскольку минимальная степень необратимого ожерелья равна 6, а мы хотим найти необратимую диаграмму нечетной степени, необходимо искать нужный нам пример среди диаграмм степени 7. Оказывается, таковой существует, и это дает второе доказательство Теоремы.

Предложение 2. *Следующая диаграмма отлична от 0 как элемент пространства* $\mathcal{B}(2)$*:*

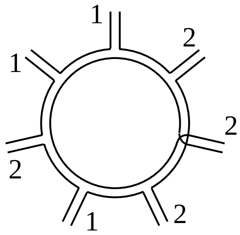
H =



Доказательство. Прямое вычисление показывает, что образ этой диаграммы в алгебре $S(2)$ (для достаточно большого N), выраженный через ожерелья, равен

$$N(x_{1121222} - x_{1122212}) + 3x_2(x_{112212} - x_{112122}),$$

то есть отличен от 0. Выражение для $\psi(H)$ содержит 128 слагаемых (по числу разрешений трехвалентных вершин 2^7), из которых только 8 содержат необратимые ожерелья, например



$$\longmapsto \quad -x_2 x_{112122}.$$

Этот результат также может быть получен с помощью компьютерной программы, доступной по ссылке [Calc]. □

6. Переход к неоснащенному случаю

Как упоминалось во введении, результаты, полученные в разделах 3 и 5, на самом деле относятся к оснащенным зацеплениям, поскольку мы не принимали во внимание одночленные соотношения. Вообще говоря, определение ориентации оснащенного зацепления является более простой задачей, поскольку в теории с оснащениями есть дополнительная структура, которая может менять свои свойства при обращении. В этом разделе мы докажем, что основная теорема остается верной и в случае обычных. неоснащенных, зацеплений.

Действительно, обозначим через $\mathcal{A}'(2)$ фактор пространства $\mathcal{A}(2)$ по одночленным соотношениям, то есть по идеалу, порожденному диаграммами a_1 (одна хорда, концы которой отождествлены с первой компонентой носителя) и a_2 (соответственно, одна хорда, приклеенная к правой компоненте носителя): $\mathcal{A}'(2) = \mathcal{A}(2)/\langle a_1, a_2\rangle$, где угловые скобки обозначают двусторонний идеал с обозначенными в них образующими. Факторалгебра $\mathcal{A}'(2)$ может быть вложена в $\mathcal{A}(2)$ как подалгебра: по структурной теореме для кокоммутативных алгебр Хопфа алгебра $\mathcal{A}(2)$ является универсальной обертывающей алгеброй алгебры Ли своих примитивных элементов P. Поэтому, если мы возьмем подпространство в P, порожденное всеми примитивными диаграммами, за исключением a_1 и a_2, мы получим вложение $\mathcal{A}'(2) \subset \mathcal{A}(2)$. Поскольку диаграммы, фигурируюшие в Предложении 1, принадлежат $\mathcal{A}'(2)$, то это значит, что необратимость имеет место и для неоснащенных зацеплений.

Покажем теперь, что второе доказательство (разд. 5) также проходит в неоснащенном случае.

Пусть $\chi : \mathcal{A}(2) \to \mathcal{B}(2)$ — изоморфизм, определенный выше.

Лемма 8. *Подпространство* $\chi^{-1}(\mathcal{A}'(2)) = \mathcal{B}'(2)$ *совпадает с подалгеброй в* $\mathcal{B}(2)$*, порожденной всеми связными диаграммами Якоби за исключением* $b_1 = \overset{1}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{1}{\bullet}$ *и* $b_2 = \overset{2}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{2}{\bullet}$.

Доказательство. Этот факт не вполне очевиден по той причине, что изоморфизм линейных пространств χ не является гомоморфизмом алгебр, а подалгебры $\mathcal{A}'(2)$ и $\mathcal{B}'(2)$ определяются своими образующими в смысле разных операций умножения. Тем не менее, несложно проверить, что χ-образ произведения диаграмм, отличных от b_1 и b_2, является линейной комбинацией произведений связных хордовых диаграмм, отличных от a_1 и a_2. $\square$

Лемма показывает, что семиногая диаграмма H, фигурирующая в Предложении 2, является элементом подалгебры $\mathcal{B}'(2)$, ответственной за инварианты Васильева неоснащенных длинных зацеплений. Поскольку эта диаграмма не равна 0, существование инварианта седьмого порядка, различающего ориентацию, вторично доказано.

7. Открытые проблемы

Вопрос 1. Существет ли гомоморфизм $\mathcal{B}(1) \to \mathcal{B}(2)$, образ которого не содержится в τ-инвариантном подпространстве $\mathcal{B}(2)$?

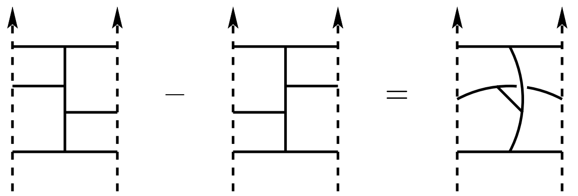
Комментарий. Если бы такой гомоморфизм существовал, то можно было бы попытаться применить технику, разработанную в этой работе, к проблеме обратимости узлов. К сожалению, известный оператор удвоения $\Delta : \mathcal{B}(1) \to \mathcal{B}(2)$ (определенный в [BN1, LM]), как легко убедиться, для данной цели не подходит.

Вопрос 2. Возможно ли с помощью инвариантов Васильева заметить необратимость *замкнутого* 2-компонентного зацепления?

Комментарий. Комбинаторный объект, применяемый для описания инвариантов конечного типа замкнутых зацеплений — это пространство хордовых диаграмм на двух окружностях, обозначим его через $\mathcal{A}(S^1_2)$. Существует очевидный эпиморфизм $\mathcal{A}(\mathbb{R}^1_2) \to \mathcal{A}(S^1_2)$; его ядро порождено так называемыми линк-соотношениями (link relations, см. [BGRT]). Для решения вопроса необходимо разобраться во взаимосвязи линк-соотношений с операцией замены ориентации τ.

Вопрос 3. Является ли 7 наименьшей степенью инварианта Васильева, который может быть использован для различения ориентации двухкомпонентных струнных зацеплений?

Комментарий. Этот вопрос сводится к вопросу существования необратимой диаграммы порядка меньшего, чем 7. К примеру, мы не знаем, равна ли следующая диаграмма



нулю как элемент $\mathcal{A}_5(2)$.

Благодарности

Мы благодарим А.Хорошкина, С.Локтева и Э.Б.Винберга за полезные сведения по теории инвариантов, а также С.К.Ландо и анонимного рецензента, прочитавших рукопись и сделавших ряд ценных замечаний. Первый автор был поддержан грантами РФФИ 05-01-01012, РФФИ 05-01-00899, НШ-1972.2003.1.

Список литературы

[BN1] D. Bar-Natan, *On the Vassiliev knot invariants*, Topology, **34** (1995) 423–472.

[BN2] D. Bar-Natan, *Vassiliev Homotopy String Link Invariants*, Journal of Knot Theory and its Ramifications 4-1 (1995) 13–32.

[BGRT] D. Bar-Natan, S. Garoufalidis, L. Rozansky and D. P. Thurston, *The Århus integral of rational homology 3-spheres II: Invariance and universality*, Selecta Mathematica, New Series 8 (2002) 341-371, `arXiv:math.QA/9801049`.

[Calc] С. Дужин. *Программы и файлы данных, относящиеся к вычислению весовых систем φ и ψ.* `http://www.pdmi.ras.ru/~arnsem/dataprog/OrLinks/`.

[CD] S. V. Chmutov and S. V. Duzhin, CDBook. Introduction to Vassiliev Knot invariants, a preliminary draft version of a book, Online at `http://www.pdmi.ras.ru/~duzhin/papers/`.

[Ka] A. Kawauchi, *The invertibility problem on amphicheiral excellent knots.* Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 55 (1979), no. 10, 399–402.

[Kon] M. Kontsevich, *Vassiliev's knot invariants*, Adv. in Soviet Math., **16** Part 2 (1993) 137–150.

[L1] X.-S. Lin, *Finite type link invariants and the invertibility of links*, Math. Res. Letters 3 (1996), no. 3, pp. 405–417. Online at `arXiv:q-alg/9601019`.

[L2] X.-S. Lin, *Finite type link-homotopy invariants*, l'Enseignement Mathématique 47 (2001), pp. 315–327. Online at `arXiv:math.GT/0012095`.

[LM] T. Q. T. Le, J. Murakami, *The universal Vassiliev–Kontsevich invariant for framed oriented links*, Compositio Math. **102** (1996) 41–64.

[Sta] T. Stanford, *Finite-type invariants of knots, links and graphs.* Topology, Vol. 35, no. 4, pp. 1027–1050.

[Tro] H.F.Trotter, *Non-invertible knots exist.* Topology 2 (1964), 275–280.

[VP] Э.Б.Винберг, В.Л.Попов. *Теория инвариантов.* // Итоги науки и техники, Совр. Проблемы Математики, Фунд. направления 55 (1989), 137-314. (Пример 1 в п. 9.5, стр. 291).

[Vog] P. Vogel, *Algebraic structures on modules of diagrams*, Institut de Mathématiques de Jussieu, Prépublication 32, August 1995, Revised in 1997, `http://www.math.jussieu.fr/~vogel/`.

[W] Г.Вейль. Классические группы, их инварианты и представления. М., ИЛ, 1947.

duzhin@pdmi.ras.ru