

многочлен Конвея и разложение Магнуса

С.В.Дужин

АННОТАЦИЯ. Разложение Магнуса представляет собой универсальный инвариант конечного типа крашенных кос со значениями в пространстве горизонтальных хордовых диаграмм. Композиция многочлена Конвея с отображением короткого замыкания кос в узлы порождает серию инвариантов конечного типа крашенных кос и, следовательно, пропускается через разложение Магнуса. Мы явно описываем получаемое отображение горизонтальных хордовых диаграмм в целочисленные многочлены от одной переменной и вычисляем его значение на ассоциаторе Дринфельда, оказывающееся замечательным бесконечным рядом, коэффициенты которого суть (гипотетически) альтернированные суммы кратных дзета-значений.

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы предполагаем, что читатель знаком с основами теории кос, теории узлов и инвариантами конечного типа (инвариантами Васильева); всё это можно найти, например, в книге [15].

Короткое замыкание [10] порождает отображение из группы крашенных кос во множество (топологических типов) ориентированных узлов. Всякий инвариант Васильева узлов можно превратить, таким образом, в инвариант конечного типа крашенных кос. Существует универсальный инвариант конечного типа крашенных кос, задаваемый разложением Магнуса. В этой статье мы дадим явное описание (через значения на базисных элементах) отображения пространства горизонтальных хордовых диаграмм на трех нитях, получаемого при пропуске многочлена Конвея, перенесенного на косы, через разложение Магнуса. Главный результат описывается занятным комбинаторным отображением из множества упорядоченных разбиений данного натурального числа во множество обычных (неупорядоченных) разбиений того же числа.

В разделе 2 мы напоминаем некоторые сведения о группе крашенных кос и вводим разложение Магнуса. Раздел 3 посвящен конструкции короткого замыкания, связывающего косы и узлы. В разделе 4 мы говорим о многочлене Конвея, перенесенном на косы посредством короткого замыкания, и формулируем основную теорему, доказательство которой дается в разделе 5. В разделе 6 мы делаем попытку сосчитать значение отображения, описанного в основной теореме, на ассоциаторе Дринфельда, и формулируем гипотезу, основанную на компьютерных вычислениях. Последний раздел 7

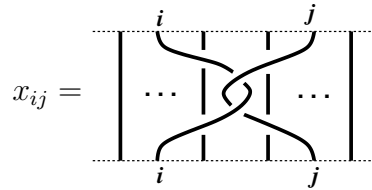
Работа поддержана грантами РФФИ 08-01-00379-а, НШ 709.2008.1, JSPS S-09018.

содержит небольшой список открытых проблем, связанных с материалом статьи.

Автор признателен Я. Мостовому, который прочел первую версию текста и сделал ряд ценных замечаний.

2. КРАШЕННЫЕ КОСЫ И РАЗЛОЖЕНИЕ МАГНУСА

Пусть P_m — группа крашенных кос на m занумерованных вертикальных нитях с умножением, заданным как конкатенация сверху вниз. Группа P_m порождена элементами x_{ij} , $1 \leq i < j \leq m$, каждый из которых представляет собой положительную перекрутку i -й и j -й нитей, причем все остальные нити строго вертикальны и проходят сзади двух данных:



Определяющие соотношения между этими образующими перечислены, например, в [2, 4]; в настоящем тексте они нам не потребуются.

Существует полупрямое разложение [2]

$$P_m \cong F_{m-1} \rtimes \dots \rtimes F_2 \rtimes F_1,$$

где F_k — свободная группа с k образующими, в нашем случае реализованная как подгруппа в P_m , порожденная множеством $x_{1,k+1}, x_{2,k+1}, \dots, x_{k,k+1}$. Это разложение показывает, что любую крашеную косу можно однозначно записать в *причесанном виде* $\prod_s x_{i_s j_s}^{a_s}$ with $j_1 \geq j_2 \geq \dots$ где a_s — ненулевые целые числа, причем одинаковые образующие не встречаются в произведении рядом (то есть, слово является приведенным). *Разложение Магнуса* — это отображение P_m в \mathbb{Z} -алгебру формальных степенных рядов от $\binom{m}{2}$ некоммутирующих переменных t_{ij} , $1 \leq i < j \leq m$, определенное правилом

$$\mu_m(\beta) = \prod_s (1 + t_{i_s j_s})^{a_s},$$

если $\prod_s x_{i_s j_s}^{a_s}$ есть причесанный вид косы β . Отрицательные степени здесь понимаются в соответствии с общим правилом $(1+t)^{-1} = 1-t+t^2-t^3+\dots$, — именно поэтому для определения μ_m требуются бесконечные ряды, а не просто многочлены.

Пример. Чтобы вычислить значение $\mu_3(x_{12}x_{23})$, мы сначала причесываем косу:

$$x_{12}x_{23} = x_{13}x_{23}x_{13}^{-1}x_{12},$$

а затем пишем:

$$\begin{aligned} \mu_3(x_{12}x_{23}) &= (1+t_{13})(1+t_{23})(1-t_{13}+t_{13}^2-\dots)(1+t_{12}) \\ &= 1+t_{12}+t_{23}+t_{13}t_{23}-t_{23}t_{13}+t_{23}t_{12}+\dots \end{aligned}$$

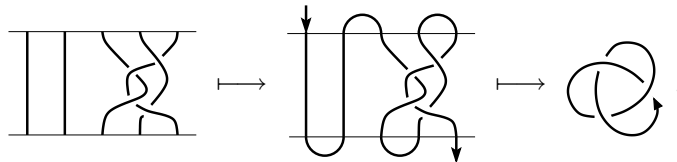
образующей x_{ij} в причесанном виде косы элемент $1 + c_{ij}t_{ij} + T_{ij}$, где c_{ij} — любые ненулевые константы, а T_{ij} — произвольные ряды из $\hat{\mathcal{A}}^h(m)$, начинающиеся с членов степени выше первой. Замечательным примером этой конструкции (со значениями в $\hat{\mathcal{A}}^h(m) \otimes \mathbb{C}$) является интеграл Концевича ([1, 3]). По сравнению со стандартным разложением Магнуса он имеет важное преимущество, заключающееся в его мультипликативности. Однако, определение интеграла Концевича гораздо сложнее, его трудно вычислять в явном виде и, кроме того, его значение зависит от расположения конечных точек косы. Например, если верхние и нижние концы нитей расположены на параллельных прямых и отстоят друг от друга на одинаковом расстоянии, то интегралы Концевича, взятые от образующих группы P_3 , представляются следующими рядами до степени 2:

$$\begin{aligned} I(x_{12}) &= 1 - A + \frac{1}{2}A^2 - \frac{i \ln 2}{2\pi}[B, C] + \dots, \\ I(x_{13}) &= 1 - C + \frac{1}{2}C^2 + \frac{1}{2}[A, B] + \dots, \\ I(x_{23}) &= 1 - B + \frac{1}{2}B^2 + \frac{i \ln 2}{2\pi}[C, A] + \dots, \end{aligned}$$

где $A = t_{12}, B = t_{23}, C = t_{13}$. Напомним, что $[A, B] = [B, C] = [C, A]$ в соответствии с определением алгебры $\hat{\mathcal{A}}^h(3)$. Читатель может в качестве упражнения проверить на этом примере мультипликативность, то есть согласованность этих формул с коммутационными соотношениями в группе P_3 (кратко выражаемыми одним фактом: элемент $x_{12}x_{13}x_{23}$ является центральным, см. [4]).

3. КОРОТКОЕ ЗАМЫКАНИЕ КОС

Наряду с обычным (Артиновским) замыканием кос, которое превращает их в зацепления, существует другая операция замыкания крашенных кос в ориентированные узлы, называемая *коротким замыканием* (short-circuit closure, см. [10, 3]). Она определяется попарным соединением короткими дугами верхних концов косы с номерами $2i$ и $2i + 1$ и нижних концов с номерами $2i - 1$ и $2i$, что превращает косу в длинный узел. При желании два свободных конца длинного узла можно соединить дополнительной дугой и получить обычный компактный узел. Ориентация узла порождается ориентацией сверху вниз первой (крайней левой) нити косы. Например:



(Неориентированный вариант этой операции, называемый *plat closure*, изучался ранее, см., например, [2].)

Легко видеть, что короткие замыкания кос с разным числом нитей согласованы с вложениями $P_m \rightarrow P_{m+1}$ (добавление одной вертикальной нити справа), так что имеется корректно определенное отображение \varkappa из группы $P_\infty := \cup_{m \geq 1} P_m$ в множество ориентированных узлов \mathcal{K} . Теорема Мостового и Стэнфорда утверждает, что это отображение сюръективно и позволяет отождествить \mathcal{K} с множеством двойных смежных классов группы P_∞ по двум специальным подгруппам, см. [10].

В частном случае $m = 3$ образ $\varkappa_3 = \varkappa|_{P_3}$ совпадает с множеством всех 2-мостовых (рациональных) узлов (подробное введение в теорию рациональных узлов можно найти в [12]). В самом деле, короткое замыкание косы $x_{13}^{a_1} x_{23}^{b_1} \dots x_{13}^{a_k} x_{23}^{b_k}$, соответственно $x_{13}^{a_1} x_{23}^{b_1} \dots x_{13}^{a_k} x_{23}^{b_k} x_{13}^{a_{k+1}}$, где все числа a_i, b_i ненулевые целые, есть рациональный узел, соответствующий непрерывной дроби со знаменателями

$$(2a_1, -2b_1, \dots, 2a_k, -2b_k + 1),$$

соответственно,

$$(2a_1, -2b_1, \dots, 2a_k, -2b_k, 2a_k + 1).$$

Простое теоретико-числовое рассуждение показывает, что любое рациональное число с нечетным числителем и знаменателем имеет разложение в цепную дробь указанного вида (последний знаменатель нечетен, а все предыдущие четны). Рациональные узлы, в отличие от зацеплений, отвечают дробям с нечетным знаменателем. Если числитель дроби p/q четен, то соответствующий узел эквивалентен узлу $(p \pm q)/q$ (см. [12]) и, таким образом, наше утверждение доказано.

4. СИМВОЛ МНОГОЧЛЕНА КОНВЕЯ

Композиция с отображением короткого замыкания превращает всякий инвариант узлов в инвариант крашенных кос. Например, многочлен Конвея узлов $\nabla : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{Z}[t]$ порождает многочлен Конвея крашенных кос $\nabla \circ \varkappa_m : P_m \rightarrow \mathbb{Z}[t]$. Для каждого n коэффициент этого многочлена при t^{2n} является инвариантом Васильева порядка $2n$. В силу универсальности разложения Магнуса, найдется отображение $\chi_m : \hat{\mathcal{A}}^h(m) \rightarrow \mathbb{Z}[t]$ («символ многочлена Конвея») такое, что $\nabla \circ \varkappa_m = \chi_m \circ \mu_m$.

Нам удалось найти явное описание отображения χ_m только для $m = 3$. В следующей теореме указаны значения $\chi = \chi_3$ на нисходящих хордовых диаграммах из $\mathcal{A}^h(3)$ (составляющих, как мы уже говорили, аддитивный базис этой свободной абелевой группы). Примем обозначения $A = t_{12}, B = t_{23}, C = t_{13}$.

Теорема. *Всякая нисходящая хордовая диаграмма на трех нитях представляет собой (положительное) слово в алфавите $\{A, B, C\}$, в котором все буквы A находятся в конце. Мы утверждаем, что для любых слов w, w_1, w_2 :*

$$(1) \chi(wA) = 0.$$

$$(2) \chi(Bw) = 0.$$

$$(3) \chi(w_1 B^2 w_2) = 0.$$

Перечисленные свойства означают, что ненулевые значения χ может принимать лишь на словах одного из двух видов:

$$C^{c_1} B \cdot \dots \cdot C^{c_{k-1}} B C^{c_k}$$

и

$$C^{c_1} B \cdot \dots \cdot C^{c_{k-1}} B C^{c_k} B,$$

которые мы закодируем соответственно как $[c_1, \dots, c_k]$ и $[c_1, \dots, c_k]'$.

(4) Значение χ на элементах второго вида выражается через его значения на элементах первого вида по формуле

$$\chi([c_1, \dots, c_k]') = t^{-2} \chi([c_1, \dots, c_k, 1]).$$

Остается, таким образом, описать значения χ на элементах вида $[c_1, \dots, c_k]$.

(5) Мы имеем:

$$\chi([c_1, \dots, c_k]) = (-1)^{k-1} \left(\prod_{i=1}^{k-1} p_1 p_{c_i-1} \right) \cdot p_{c_k},$$

где $p_s = \chi([s])$ есть последовательность многочленов от t , определяемая рекуррентно по правилам $p_0 = 1$, $p_1 = t^2$ и $p_{s+2} = t^2(p_s + p_{s+1})$ для $s \geq 0$. В частности, значение χ на пустой диаграмме (единичном элементе алгебры $\hat{\mathcal{A}}^h(3)$) равно 1.

Замечание 1. Многочлен $p_k = \chi([k])$ равен $t^k \nabla(T_{k+1,2})$, где буква T означает торическое зацепление с указанными параметрами (в случае 2-компонентного зацепления нужно при этом правильно выбрать ориентации компонент), и может быть явно записано как

$$p_k = \sum_{k/2 \leq j \leq k} \binom{j}{2j-k} t^{2j}.$$

Замечание 2. Образ χ лежит в коммутативной алгебре, порожденной элементами p_1, p_2 и т.д., занумерованными натуральными числами. Аддитивный базис этой алгебры можно отождествить с множеством (обычных комбинаторных) разбиений. В такой постановке отображение χ определяется преобразованием упорядоченных разбиений в неупорядоченные (обычные) по правилу

$$[c_1, \dots, c_k] \mapsto (1^{k-1}, c_1 - 1, \dots, c_{k-1} - 1, c_k).$$

Примеры.

$$\begin{aligned}\chi(1) &= 1, \\ \chi(B) &= 0, \\ \chi(C) &= t^2, \\ \chi(CB) &= -t^2, \\ \chi(BC) &= 0, \\ \chi(C^3BC^3) &= -p_1p_2p_3 = -t^2(t^4 + t^2)(t^6 + 2t^4).\end{aligned}$$

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Нам нужно найти отображение χ , замыкающее коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} P_3 & \xrightarrow{\mu_3} & \hat{\mathcal{A}}^h(3) \\ \downarrow \varkappa & & \downarrow \chi \\ \mathcal{K} & \xrightarrow{\nabla} & \mathbb{Z}[[t]] \end{array}$$

Продолжим разложение Магнуса по линейности до отображения $\widehat{\mathbb{Z}P_3} \rightarrow \hat{\mathcal{A}}^h(3)$, которое будем обозначать той же буквой μ_3 . Мы докажем теорему, используя правое обратное к μ_3 , то есть отображение $\nu_3 : \hat{\mathcal{A}}^h(3) \rightarrow \widehat{\mathbb{Z}P_3}$, что $\mu_3 \circ \nu_3 = \text{id}$. Такое отображение существует. В самом деле, множество нисходящих хордовых диаграмм на трех нитях находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством положительных кос P_3^+ . Это соответствие задается простой подстановкой $x_{ij} \leftrightarrow t_{ij}$. Отождествляя слово w от букв x_{ij} с соответствующим словом от букв t_{ij} , мы видим, что для положительных слов

$$\mu_3(w) = \sum_{w' \subseteq w} w'.$$

Это отображение в подходящем базисе задается треугольной матрицей с единицами на главной диагонали и, следовательно, определяет автоморфизм абелевой группы $\widehat{\mathbb{Z}P_3^+} \cong \hat{\mathcal{A}}^h(3)$. Обратный автоморфизм, как легко видеть, выражается формулой

$$\nu_3(w) = \sum_{w' \subseteq w} (-1)^{|w|-|w'|} w',$$

где модуль слова обозначает его длину (или суммарный показатель). Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbb{Z}P_3} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\mu_3} \\ \xleftarrow{\nu_3} \end{array} & \hat{\mathcal{A}}^h(3) \\ \downarrow \varkappa & & \downarrow \chi \\ \widehat{\mathbb{Z}\mathcal{K}} & \xrightarrow{\nabla} & \mathbb{Z}[[t]] \end{array}$$

показывает, что $\chi = \nabla \circ \varkappa \circ \nu_3$ и, следовательно,

$$\chi(w) = \sum_{w' \subseteq w} (-1)^{|w| - |w'|} \nabla(\varkappa(w')),$$

где w' , слово от букв t_{ij} , понимается, в силу упомянутого отождествления, как слово от букв x_{ij} , то есть как положительная крашенная коса.

Мы докажем последовательно все пять утверждений теоремы, применяя это выражение для χ и разбивая сумму по всем 2^n подсловам $w' \subseteq w$ на подходящие частичные суммы, состоящие из 2, 4, ..., 2^k слагаемых.

(1). Разобьем сумму на пары $\pm(\nabla(\varkappa(w'A)) - \nabla(\varkappa(w')))$ и заметим, что узлы $\varkappa(w'A)$ и $\varkappa(w')$ изотопны.

(2). То же рассуждение для пар узлов $\varkappa(Bw')$ и $\varkappa(w')$.

(3). Сумма, задающая $\chi(w_1 B^2 w_2)$, состоит из четверок, определяемых выбором подслов $w'_1 \subseteq w_1$, $w'_2 \subseteq w_2$:

$$\pm(\nabla(\varkappa(w'_1 B^2 w'_2)) - 2\nabla(\varkappa(w'_1 B w'_2)) + \nabla(\varkappa(w'_1 w'_2))).$$

Докажем, что каждая такая четверка дает нуль.

В самом деле, определяющее соотношение для многочлена Конвея приводит к равенствам

$$\nabla(\text{crossing}(w_1, w_2)) - \nabla(\text{crossing}(w_1, w_2)) = -t \nabla(\text{crossing}(w_1, w_2)) = \nabla(\text{crossing}(w_1, w_2)) - \nabla(\text{crossing}(w_1, w_2)),$$

где косы, соответствующие словам w'_1 и w'_2 , изображены в виде прямоугольных ящиков. Поэтому

$$\nabla(\text{crossing}(w_1, w_2)) - 2\nabla(\text{crossing}(w_1, w_2)) + \nabla(\text{crossing}(w_1, w_2)) = 0,$$

как и требовалось.

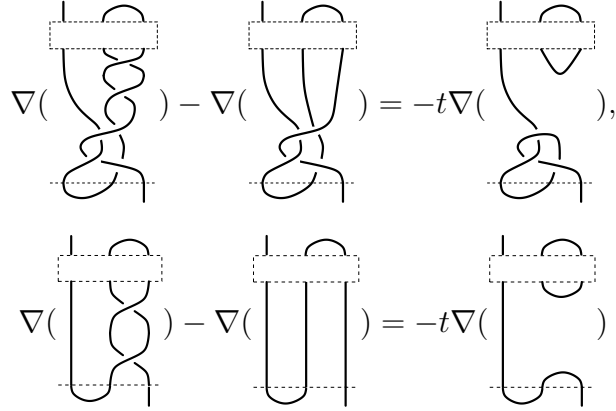
(4). Достаточно доказать, что для любого слова w мы имеем $\chi(wBC) = t^2 \chi(wB)$. Действительно,

$$\begin{aligned} \chi(wB) &= \sum_{w' \subseteq w} (-1)^{|w| - |w'|} (\nabla(w'B) - \nabla(w')), \\ \chi(wBC) &= \sum_{w' \subseteq w} (-1)^{|w| - |w'|} (\nabla(w'BC) - \nabla(w'B) - \nabla(w'C) + \nabla(w')). \end{aligned}$$

Теперь видно, что требуемое утверждение вытекает из тождества

$$\nabla(w'BC) - \nabla(w'C) = (t^2 + 1)(\nabla(w'B) - \nabla(w')),$$

которое доказывается применением определяющего соотношения Конвея



с учетом того обстоятельства, что взятие связной суммы зацепления с узлом-трилистником (как на картинках справа) приводит к умножению соответствующего многочлена на $(t^2 + 1)$.

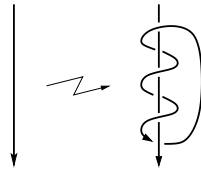
(5). Здесь нам предстоит показать, что $\chi(C^n Bw) = -p_1 p_{n-1} \chi(w)$ где w — произвольное слово от C и B . Разобьем альтернированную сумму, выражающую $\chi(C^n Bw)$ на части, отвечающие фиксированному подслову $w' \subseteq w$:

$$\sum_{w' \subseteq w} (-1)^{|w|-|w'|} \sum_{l=1}^n (-1)^{n-l} \binom{n}{l} (\nabla \varkappa(C^l Bw') - \nabla \varkappa(C^l w')).$$

Используя соотношение Конвея в подходящем перекрестке, получаем:

$$\nabla \varkappa(C^l Bw') - \nabla \varkappa(C^l w') = -t \nabla(K_{(l)}),$$

где $K = \varkappa(w')$, а $K_{(l)}$ обозначает ориентированное 2-компонентное зацепление, получаемое из ориентированного узла K добавлением незаузленной компоненты, зацепленной с данным узлом согласно рисунку (на котором взято $l = 3$):



Лемма. Для любого узла K и любого натурального числа l

$$\nabla(K_{(l)}) = t(q_0 + q_1 + \dots + q_{l-1}) \nabla(K),$$

где q_s есть многочлен Конвея торического узла типа $(2, 2s + 1)$, задаваемый формулой

$$q_s = \sum_{j=0}^s \binom{s+j}{s-j} t^{2j}.$$

6. ЗНАЧЕНИЕ НА АССОЦИАТОРЕ

Ассоциатор Дринфельда [4, 9] — это замечательный элемент алгебры $\hat{\mathcal{A}}^h(3)$, имеющий вид бесконечного ряда от (некоммутирующих) переменных $a = A/(2\pi i)$, $b = B/(2\pi i)$ с коэффициентами в алгебре кратных дзета-значений [8]:

$$\begin{aligned} \Phi = & 1 - \zeta_2[a, b] - \zeta_3([a, [a, b]] + [b, [a, b]]) \\ & - \zeta_4[a, [a, [a, b]]] - \zeta_{3,1}[b, [a, [a, b]]] - \zeta_{2,1,1}[b, [b, [a, b]]] + \frac{1}{2}\zeta_2^2[a, b]^2 \dots \end{aligned}$$

(явное разложение Φ до членов степени 12 приведено в [5]).

Беря значение комплексификации найденного нами отображения $\chi_{\mathbb{C}} : \hat{\mathcal{A}}^h(3) \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}[t]$ на этом элементе, мы получаем следующий результат:

Гипотеза.

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbb{C}}(\Phi) = & -\zeta_2 T^2 + (-\zeta_3 + \zeta_{2,2}) T^4 + (-\zeta_4 + \zeta_{2,3} + \zeta_{3,2} - \zeta_{2,2,2}) T^6 + \dots \\ = & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n (-1)^k \zeta_{n+k}^{(k)} \right) T^{2n}, \end{aligned}$$

где $T = t/(2\pi i)$, числа $\zeta_{l_1, \dots, l_k} = \zeta(l_1, \dots, l_k)$ суть кратные дзета-значения, а $\zeta_m^{(k)}$ представляет собой краткую форму записи для суммы всех чисел ζ_{l_1, \dots, l_k} , где $l_i \geq 2$, $i = 1, \dots, k$, и $l_1 + l_2 + \dots + l_k = m$.

Эта формула проверена до степени T^{10} путем компьютерных вычислений (см. [5]) с использованием таблицы соотношений между кратными дзета-значениями, приведенной в [14]. Любопытно отметить, что численные значения коэффициентов этого многочлена

$$\begin{aligned} & -1.644934 T^2 - 0.390314 T^4 - 0.332698 T^6 - 0.312405 T^8 \\ & -0.303958 T^{10} - 0.300153 T^{12} - 0.298365 T^{14} - 0.297505 T^{16} + \dots \end{aligned}$$

кажутся стремящимися к некоторому пределу, природа которого остается загадочной.

7. ОТКРЫТЫЕ ПРОБЛЕМЫ

- (1) Для каких троек сокращенных рациональных дробей p_1/q_1 , p_2/q_2 , p_3/q_3 , и числители и знаменатели которых составляют арифметические прогрессии, многочлены Конвея соответствующих рациональных узлов также образуют арифметическую прогрессию? Наше доказательство утверждения 3 главной теоремы (см. стр. 8) поставило неожиданно большое количество таких троек, например $(\frac{11}{3}, \frac{31}{13}, \frac{51}{23})$, $(\frac{11}{5}, \frac{19}{9}, \frac{27}{13})$, $(\frac{17}{5}, \frac{41}{11}, \frac{65}{17})$, $(\frac{75}{13}, \frac{111}{19}, \frac{147}{25})$, — однако не все тройки указанного вида обладают названным свойством.
- (2) Обобщить основную теорему (раздел 4) в двух направлениях: (А) на крашенные косы с произвольным числом нитей, (Б) на многочлен HOMFLY, являющийся обобщением многочлена Конвея.

- (3) Эта задача относится к замечанию на стр. 3. Описать все (или хотя бы некоторые) тройки формальных рядов $P, Q, R \in \hat{\mathcal{A}}^h(3) \otimes \mathbb{C}$, не имеющих членов степени 0 и 1 и таких, что сопоставление $x_{12} \mapsto 1 + t_{12} + P$, $x_{23} \mapsto 1 + t_{23} + Q$, $x_{13} \mapsto 1 + t_{13} + R$ определяет групповой гомоморфизм.
- (4) Доказать гипотезу из раздела 6. Найти подобные факты для других горизонтальных ассоциаторов и связать их с действием группы Гротендика–Тейхмюллера (см. [4, 6]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. Bar-Natan, *Vassiliev and Quantum Invariants of Braids*, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics **51** (1996) 129–144. Online at [arXiv:q-alg/9607001](http://arxiv.org/abs/q-alg/9607001).
- [2] J. S. Birman, *Braids, Links and Mapping Class Groups*, Princeton University Press, 1974.
- [3] S. Chmutov, S. Duzhin and J. Mostovoy. *Introduction to Vassiliev Knot invariants*, to be published by Cambridge University Press, draft available at <http://www.pdmi.ras.ru/~duzhin/papers/cdbook/>.
- [4] В. Дринфельд, *О квазитреугольных квазихопфовых алгебрах и одной группе, тесно связанной с $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$* , Алгебра и Анализ, **2**, вып. 4, 149–181 (1990).
- [5] S. Duzhin, *Program and data files related to the Drinfeld associator*, online at <http://www.pdmi.ras.ru/~arnsem/dataprogram/associator/>.
- [6] P. Etingof, O. Schiffmann, *Lectures on Quantum Groups*, International Press, 1998.
- [7] R. Graham, D. Knuth and O. Patashnik. *Concrete Mathematics*, Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1994.
- [8] M. E. Hoffman, *Multiple harmonic series*, Pacific J. Math. **152** (1992), 275–290.
- [9] T. Q. T. Le, J. Murakami, *The Kontsevich integral for the Kauffman polynomial*, Nagoya Mathematical Journal **142** (1996) 39–65.
- [10] J. Mostovoy, T. Stanford, *On a map from pure braids to knots*, Journal of Knot Theory and its Ramifications, **12** (2003), 417–425.
См. также <http://www.matcuer.unam.mx/~jacob/works.html>.
- [11] J. Mostovoy, S. Willerton, *Free groups and finite-type invariants of pure braids*. Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **132** (2002) 117–130.
См. также <http://www.matcuer.unam.mx/~jacob/works.html>.
- [12] K. Murasugi, *Knot Theory and Its Applications*, Birkhäuser, 1996.
- [13] S. Papadima, *The universal finite-type invariant for braids, with integer coefficients*, Topology Appl. **118** (2002) 169–185.
- [14] M. Petitot, *Tables of relations between MZV up to weight 16*,
Online at <http://www2.lifl.fr/~petitot/>.
- [15] В. В. Прасолов, А. Б. Сосинский, *Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия*, МЦНМО, 1997.