

## Дополнительные сведения и основные идеи курса

Елена Грекова  
ИПМаш РАН, Санкт-Петербургский политехнический  
университет им. Петра Великого

`elgreco@pdmi.ras.ru`

# Функции Грина для редуцированной упругой изотропной среды Коссера

Гармонические сосредоточенные источники

$$\rho \mathbf{F} = \mathbf{F}_0 e^{i\omega t} \delta(\mathbf{r}), \rho \mathbf{L} = \mathbf{L}_0 e^{i\omega t} \delta(\mathbf{r});$$

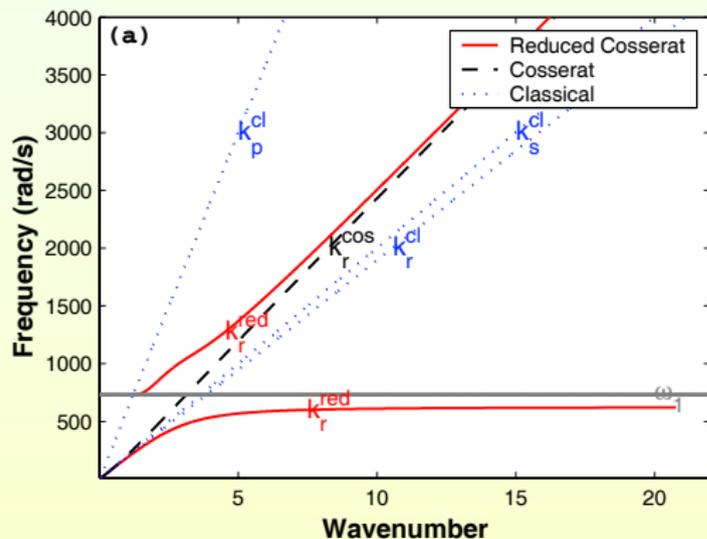
$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|.$$

Локализация при  $\omega_1 \leq \omega < \omega_0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = & \frac{\mathbf{F}_0 e^{i\omega t}}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \left( \frac{\omega^2}{C_I^2} + |k_s|^2 \right)^{-1} \left( \frac{\omega^2}{\omega_1^2} - 1 \right)^{-1} \cdot \left( - e^{-i\frac{\omega}{C_I} r} (\dots) + \right. \\ & e^{-|k_s| r} \left( \frac{1}{r} \mathbf{E} \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\omega^2}{C_I^2} + |k_s|^2 \right) \right. \\ & \left. \left. + \left( (\lambda + \mu - \alpha) \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) + \alpha \right) \left( -\frac{1}{r} |k_s|^2 \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} + (1 + |k_s| r) \frac{\mathbf{E} - 3\hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}}}{r^3} \right) \right) \right) \\ & + \frac{\mathbf{L}_0 e^{i\omega t}}{8\pi\alpha\mu} \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \right)^{-1} \cdot \frac{\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} (1 + |k_s| r) e^{-|k_s| r} \end{aligned}$$

Grekova, Herman

# Волна Рэлея в изотропной редуцированной упругой среде Коссера



- запрещенная зона непосредственно под запрещенной зоной для трехмерного пространства
- отсечка по волновому числу для верхней ветви

$$v_1 = \sqrt{k^2 - \omega^2/C_l^2}, \quad v_2 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{C_s^2} \frac{1 - \omega^2/\omega_0^2}{1 - \omega^2/\omega_1^2}},$$

$$4k^2 v_1 v_2 = (2k^2 - \omega^2/C_s^2)^2.$$

Кулеш, Грекова, Шардаков, 2009

## Редуцированная упругая среда Коссера с локальной анизотропией

Ось симметрии параллельна  $\mathbf{n}$ ,  $|\mathbf{n}|$  — упругий модуль анизотропии.  
Перевязка:  $\nabla \mathbf{u}^S$  и  $\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u}/2$ . Другие упругие тензоры изотропны

### Определяющие уравнения

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C} \cdot \cdot (\nabla \mathbf{u})^S + 2\alpha (\nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E})^A + (\mathbf{n} \times \mathbf{E} \mathbf{E} - \mathbf{E} \mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \cdot (\nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E})$$

### Уравнения в перемещениях

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - (\mu + \alpha) \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + 2\alpha \nabla \times \boldsymbol{\theta} \\ - \mathbf{n} \times \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\nabla (\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u}/2)) = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \\ -4\alpha \boldsymbol{\theta} + 2\alpha \nabla \times \mathbf{u} - 2\mathbf{n} \nabla \cdot \mathbf{u} = I \ddot{\boldsymbol{\theta}}. \end{aligned}$$

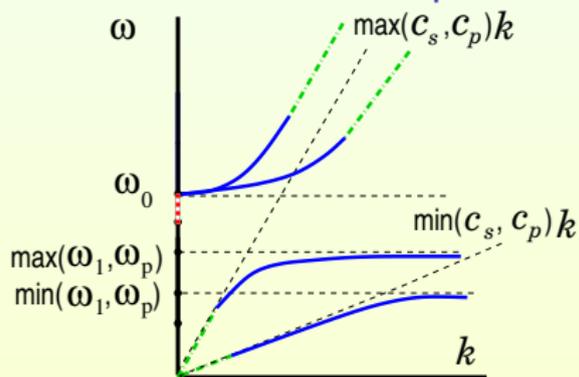
### Волна растяжения–сжатия

не отделяется. Дисперсивна. Почти всегда это смешанная волна

### Особый режим на частоте $\omega_0$

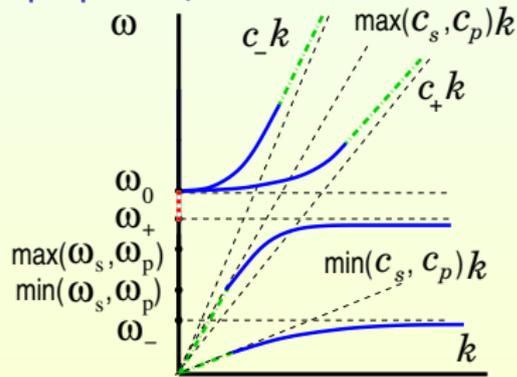
$$\mathbf{u}_0 \equiv \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 e^{i\omega_0 t}, \quad \text{при } \alpha \nabla \times \boldsymbol{\theta}_0 + \nabla (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\theta}_0) = \mathbf{0}.$$

# Дисперсионные кривые для редуцированной упругой среды Коссера с анизотропной перевязкой между объемными и поворотными деформациями



Продольная волна (вдоль оси симметрии) и волна сдвига-вращения

$$c_p^2 = \frac{(\lambda + 2\mu)\alpha - n^2}{\alpha\rho}, \quad C_s^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad \omega_0^2 = \frac{4\alpha}{\rho l}, \quad \omega_p^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{n^2}{\alpha(\lambda + 2\mu)}\right).$$



Произвольное направление волны (не вдоль и не ортогонально оси симметрии)

# Вязкоупругая редуцированная среда Коссера

Для линейных волн все упругие константы становятся комплексными и линейно зависящими от частоты:

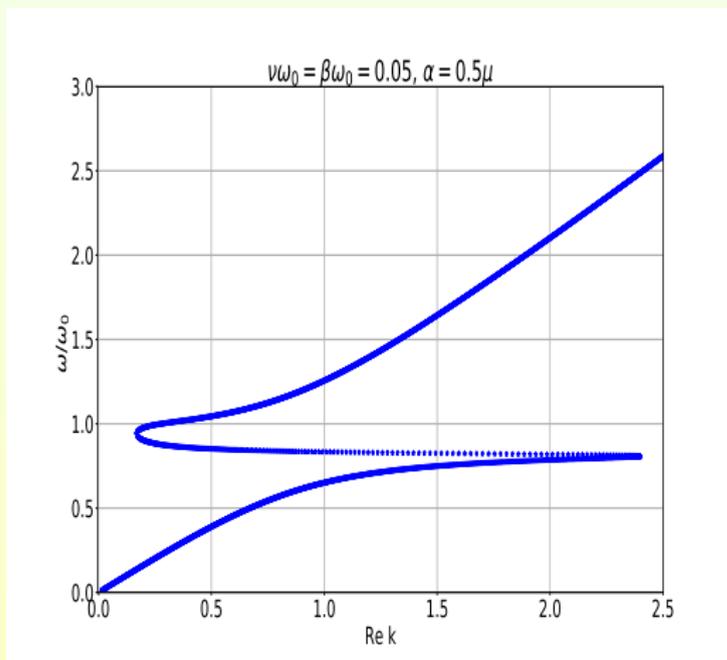
$$\alpha \mapsto \alpha(1 + i\beta\omega),$$

$$\mu \mapsto \mu(1 + i\nu\omega).$$

Диссипация способствует прохождению волны в бывшей запрещенной зоне

Окна непрозрачности больше нет. Появляется зона аномального преломления

Дисперсионная кривая.  
Волна сдвига–вращения



Грекова, Пятышева, Абреу, 2019–2020

## Нелинейные упругие среды Коссера

Вблизи предварительно напряженного состояния эффективные тензоры упругости умножаются на  $\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}$  и на  $\mathbf{P}$  (“деформированы и повернуты”). Также в уравнениях малых колебаний появляются новые члены, зависящие от первых производных  $U$  по тензорам деформации.

Для изотропных однородных сред уравнения малых колебаний такие же, как и вблизи натурального состояния, но с иными эффективными константами.

При помощи предварительного напряженного состояния частично можно контролировать

- эффективные константы
- запрещенную зону (для редуцированной среды)

## Неустойчивость из-за предварительного напряженного состояния в упругих средах Коссера

Гидростатическое давление может вызвать неустойчивость изотропного материала с выпуклой упругой энергией

Даже с квадратичной энергией!

Среда не сопротивляется сдвиговым возмущениям.

То же имеет место в классических средах (Toupin, Bernstein, 1961)

Изотропное растяжение может вызвать неустойчивость изотропного материала с выпуклой упругой энергией

Даже с квадратичной энергией!

Среда не сопротивляется поворотам с некоторой резонансной частотой или более высокой

Это явление не существует в классических средах.

Grekova, 2019, Continuum Mechanics and Thermodynamics

## Направления исследований

*Где работать мне тогда, чем мне заниматься? (В. Маяковский)*

- Вязкость в редуцированных средах без динамического спина: управление зонами аномального преломления
- Вязкость в гироконтинуумах, следящий момент
- Неоднородные среды Коссера и Кельвина: плавное изменение констант и контрасты, ловушечные моды
- Нелинейность в акустических метаматериалах с поворотными степенями свободы
- Анизотропия
- Аналоги магнитоакустического резонанса в акустических метаматериалах
- Мультиферроики (ферромагнетизм + сегнетоэлектричество)
- ...и многое другое!

## Основные идеи

- уравнения упругих сред без учета температурных эффектов вытекают из закона баланса сил, закона баланса моментов, закона баланса энергии. При учете неупругости также добавляется второе начало термодинамики.
- если это возможно, необходимо использовать соображения симметрии и другую информацию о среде (например, ее линейность), отсюда получается больше ограничений на уравнения
- уравнения сплошных сред должны подчиняться принципу материальной объективности (независимости от системы отсчета)

## Основные идеи

- определяющие уравнения упругих сред получаются из закона баланса энергии, но необходимо знать, как упругая энергия зависит от деформации. Если в среде есть жесткая кинематическая связь, полагающая некую деформацию  $\delta \equiv \mathbf{0}$ , то усилия, работающие в среде без связи на  $\delta$ , определяются из законов динамики ( $\tau^A$  для псевдосреды Коссера)
- подставляя определяющие уравнения в законы динамики, получаем уравнения в перемещениях
- для линейного случая ищем нетривиальное решение уравнений без внешних нагрузок в виде  $\mathbf{u}_0 e^{i(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ ,  $\boldsymbol{\theta}_0 e^{i(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ . Ее решение описывает свободные гармонические волны. Полученная задача вида  $\mathbf{S}(\omega, \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$  — спектральная задача. У нее есть нетривиальные решения лишь при определенной зависимости  $\omega(\mathbf{k})$ , называемой дисперсионным соотношением. Период волны равен  $2\pi/\omega$ , длина —  $2\pi/k$ . Аналог в дискретных системах — нахождение собственных частот.

## Основные идеи

- Для редуцированных сред Коссера выражаем  $\theta_0$  из закона баланса моментов через  $u_0$  и подставляем в закон баланса сил, получаем редуцированную (3x3) спектральную задачу  $S_1(\omega, \mathbf{k}) \cdot u_0 = 0$ .
- Для изотропной упругой полной среды Коссера выражаем  $\mathbf{k} \times \theta_0$  из баланса моментов и подставляем в закон баланса сил. Действуем аналогично
- Для классической упругой среды имеем волны без дисперсии (три прямые в анизотропном случае, две в изотропном)
- Для редуцированных сред Коссера (как и вообще для редуцированных сред, где упругая энергия зависит от некоторой обобщенной координаты, но не от нее градиента) имеется запрещенная зона для некоторых волн. В изотропном — для волны сдвига–вращения. В редуцированной псевдосреде запрещенная зона для волны сдвига–вращения — вся область выше граничной частоты

## Основные идеи курса

- В упругой полной среде Коссера (и Кельвина) запрещенных зон нет
- В простейшей редуцированной среде Кельвина без внешних нагрузок одна ветвь волны сдвига–вращения имеет запрещенную зону, другая — нет
- В изотропных средах волна растяжения–сжатия отделяется от остальных. В рассмотренных случаях имеет классический вид (без дисперсии)
- В средах без динамического спина свободные гармонические волны — плоские, в средах Кельвина — поляризованные
- Представляет интерес аналог магнитоакустического резонанса, где проявляется перевязка волн разной природы. Для существования перекрестных членов необходима анизотропия

## Что нужно знать — математические факты

- 1  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{K}$  не меняются при жестком движении. Кстати, что это за тензоры и зачем они нужны?
- 2  $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}$ ,  $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}$ ,  $\nabla\mathbf{u}$  не являются материально объективными,  
 $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}' = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}^T$ .
- 3  $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R} \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^T$  не меняется при жестком движении,  $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^T \cdot \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}$  материально объективен
- 4 В линейной теории надо требовать материальную объективность в линейном приближении (для малых жестких движений)
- 5 для малых тензоров материальная объективность в линейном приближении совпадает с неизменностью при жестком движении
- 6  $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}^S$  не объективен в нелинейном смысле и объективен в линейном приближении
- 7  $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{u}^A$  не объективен ни в линейном, ни в нелинейном смысле

## Что нужно знать — основные понятия

- 1 что такое среда Коссера, чем она отличается от классической по определению?
- 2 что такое редуцированная среда Коссера?
- 3 что такое псевдосреда Коссера (или среда Коссера со стесненным вращением)?
- 4 что такое среда Кельвина?
- 5 моделями каких материалов могут служить редуцированная среда Коссера и среда Кельвина?

## Что нужно знать — основные уравнения

- 1 каким законам должны подчиняться уравнения сплошных сред?
- 2 откуда берутся уравнения динамики (каждое из них)?
- 3 откуда берутся определяющие уравнения?
- 4 энергетические тензоры напряжений  $\tau_*$ ,  $\mu_*$  не меняются при жестком движении. Как они связаны с  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{K}$ ?
- 5 геометрически нелинейная (оперирующая нелинейными материально объективными тензорами деформации), но физически линейная (энергия — квадратичная форма тензоров деформации) корректна. Наоборот — нет (за исключением особых кусочно-линейных вариантов). Знать, почему
- 6 тензоры напряжений Коши  $\tau$ ,  $\mu$  материально объективны
- 7 чем отличается  $\tau$  в классической среде и среде Коссера?
- 8 в каких средах  $\mu = 0$ ? Что можно сказать об энергии деформации таких сред, если они упруги?
- 9 какой закон определяет  $\tau^A$  в псевдосреде Коссера?

## Что нужно знать — основные уравнения

- 1 что такое принцип материальной объективности (независимости от системы отсчета)? Как он изменяется в линейном случае?
- 2 вблизи натуральной конфигурации в линейной теории от каких линейных тензоров деформации зависит упругая энергия? Как они связаны с  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{K}$ ?
- 3 можно ли в нелинейной теории задать упругую энергию как нелинейную функцию линейных тензоров деформации?
- 4 сколько упругих параметров в изотропной линейной полной; редуцированной; псевдо- среде Коссера; классической среде? Есть ли в таких средах перевязки между  $\nabla \mathbf{u}^S$ ,  $\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u}/2$  и  $\nabla \boldsymbol{\theta}$ ? Почему?
- 5 как связаны тензоры напряжений Коши и энергетические тензоры напряжений в линейном случае?
- 6 какой связи подчиняются тензоры напряжений в среде Кельвина, и откуда она берется? Каковы требования к упругой энергии? Что превалирует в динамическом члене баланса моментов?

## Что нужно знать — гармонические волны

- 1 что такое дисперсионные соотношения? Откуда они берутся?
- 2 чем отличаются дисперсионные кривые следующих изотропных сред:
  - классической упругой среды;
  - редуцированной упругой псевдосреды Коссера;
  - редуцированной упругой среды Коссера;
  - полной упругой среды Коссера;
  - вязкоупругой редуцированной (псевдо)среды Коссера?
- 3 что можно сказать о продольной волне в перечисленных выше упругих средах?
- 4 какой вид имеют дисперсионные кривые в анизотропной классической теории упругости? Сколько их? А в изотропной? (Уметь отличать одни от других по графикам.)
- 5 что можно сказать о скорости волны сдвига и продольной волны в классической изотропной упругой среде? А в редуцированной среде Коссера (в пределе для низких и высоких частот)?

# Что нужно знать — гармонические волны в среде Кельвина

- 1 чем отличаются гармонические волны в средах Кельвина и в средах Коссера без динамического спина?
- 2 какие особенности есть у дисперсионных кривых простейшей редуцированной среды Кельвина?
- 3 что такое магнитоакустический резонанс? В каких средах может присутствовать большее количество точек магнитоакустического резонанса?
- 4 что такое акустический метаматериал (единожды или дважды отрицательный)? Какие среды из упомянутых в курсе являются акустическими метаматериалами, какого типа?

На экзамене будет проведена беседа по курсу, ответ будет без подготовки. Необходимо ориентироваться в конспекте лекций, понимать основные идеи и уметь отвечать на вопросы на предыдущих слайдах. Также будут заданы вопросы, подобные изложенным далее. Нужно будет быстро и аргументированно ответить.

## Примеры вопросов. Определяющие уравнения

Могут ли следующие уравнения быть определяющими уравнениями для упругой нелинейной/линейной полной/редуцированной среды Коссера/Кельвина? Линейной упругой редуцированной псевдосреды Коссера? Классической нелинейной/линейной упругой среды? Почему?  $\mathbf{C}_i$  — постоянные тензоры 4 ранга,  $C, \alpha, \beta$  — константы-скаляры,  $\mathbf{m}_0$  — постоянный единичный полярный вектор.

1  $\boldsymbol{\tau} = C(\nabla \mathbf{u})^S$

2  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C} \cdot \cdot (\nabla \mathbf{u})^3$

3  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{A}$

4  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{C}_1 \cdot \cdot \mathbf{A} + \mathbf{C}_2 \cdot \cdot \mathbf{K}) \cdot \mathbf{P}^\top$

5  $\boldsymbol{\tau} = \alpha(\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u}/2) \times \mathbf{E}$

6  $\boldsymbol{\mu} = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}^\top \cdot (\mathbf{C}_1 \cdot \cdot \mathbf{K} + \mathbf{C}_2 \cdot \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{P}^\top$

7  $\boldsymbol{\mu} = \alpha \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}$ ,  $\boldsymbol{\theta}$  — вектор малого поворота

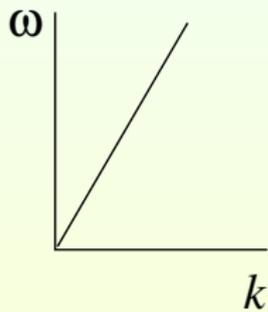
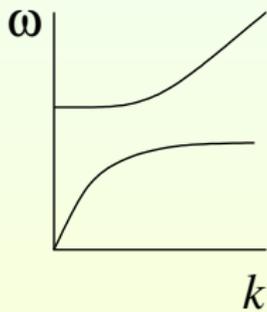
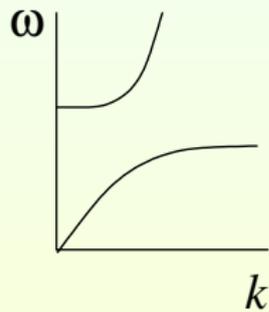
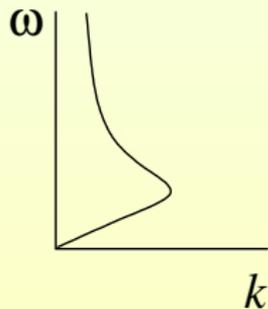
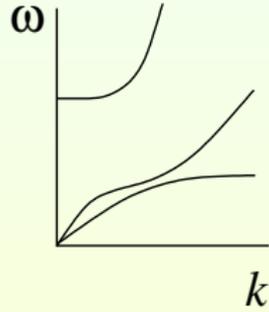
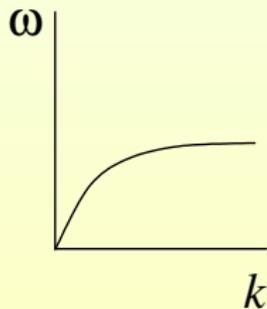
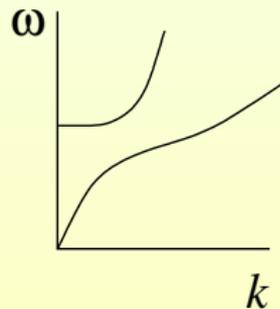
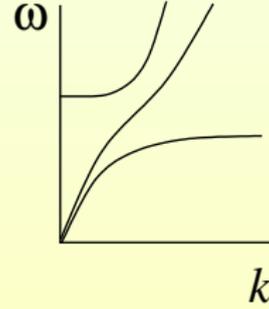
8  $\boldsymbol{\tau} = \alpha((\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u}/2) \times \mathbf{m}_0) \times \mathbf{E}$ ,  $\boldsymbol{\mu} = \beta \nabla \boldsymbol{\theta} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_0)$

## Примеры вопросов. Гармонические волны

Могут ли кривые на следующих слайдах быть дисперсионными кривыми для

- продольных/сдвиговых свободных волн в следующих линейных изотропных безграничных средах:
  - 1 классическая упругая
  - 2 редуцированная упругая псевдосреда Коссера
  - 3 редуцированная вязкоупругая псевдосреда Коссера
  - 4 редуцированная упругая среда Коссера
  - 5 полная среда Коссера
- гармонических волн в упругой редуцированной простейшей (трансверсально-изотропной, анизотропия связана лишь с наличием динамического спина) среде Кельвина (возможно, под действием следящего упругого момента).

Обоснуйте ответ.

**A****B****C****D****E****F****G****H**

Здесь изображены дисперсионные кривые для некоторых свободных волн в двух различных средах Кельвина. Они отличаются тем, что в упругой энергии одной из них имеется анизотропный перевязочный член между двумя различными типами деформации, а в упругой энергии другой среды его нет. Какой среде соответствует какая картинка? Почему?

