ПРОЕКЦИИ СКРЕЩИВАЮЩИХСЯ ПРЯМЫХ

А. Гайфуллин, А. Скопенков, М. Скопенков и А. Шаповалов

So also werde ich alles in Erinnerung behalten:
Nur ein kleines Album von Miniaturen.
H. Böll, Im Tal der donnernden Hufe.

Вводные задачи.

0. Существует ли в пространстве одна или несколько замкнутых ломаных, дающие при проекции на плоскость данную картинку (см. рис. 0)? При этом каждое звено ломаной должно проецироваться в *целое* звено проекции.

1. Существует ли семейство прямых в пространстве, которые при проектировании на некоторую плоскость дают данную картинку (см. рис. 1)?

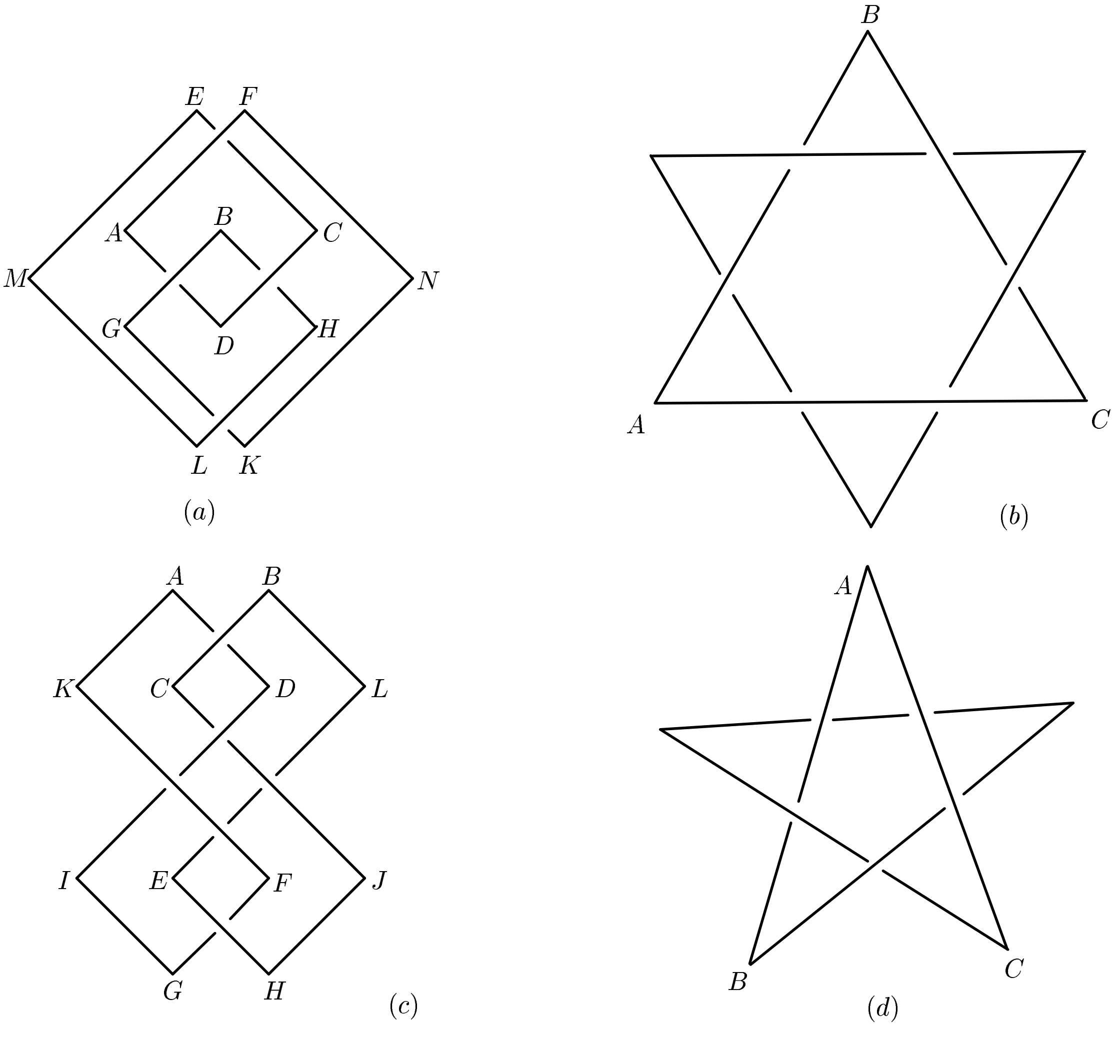


Рис 0. / Fig. 0

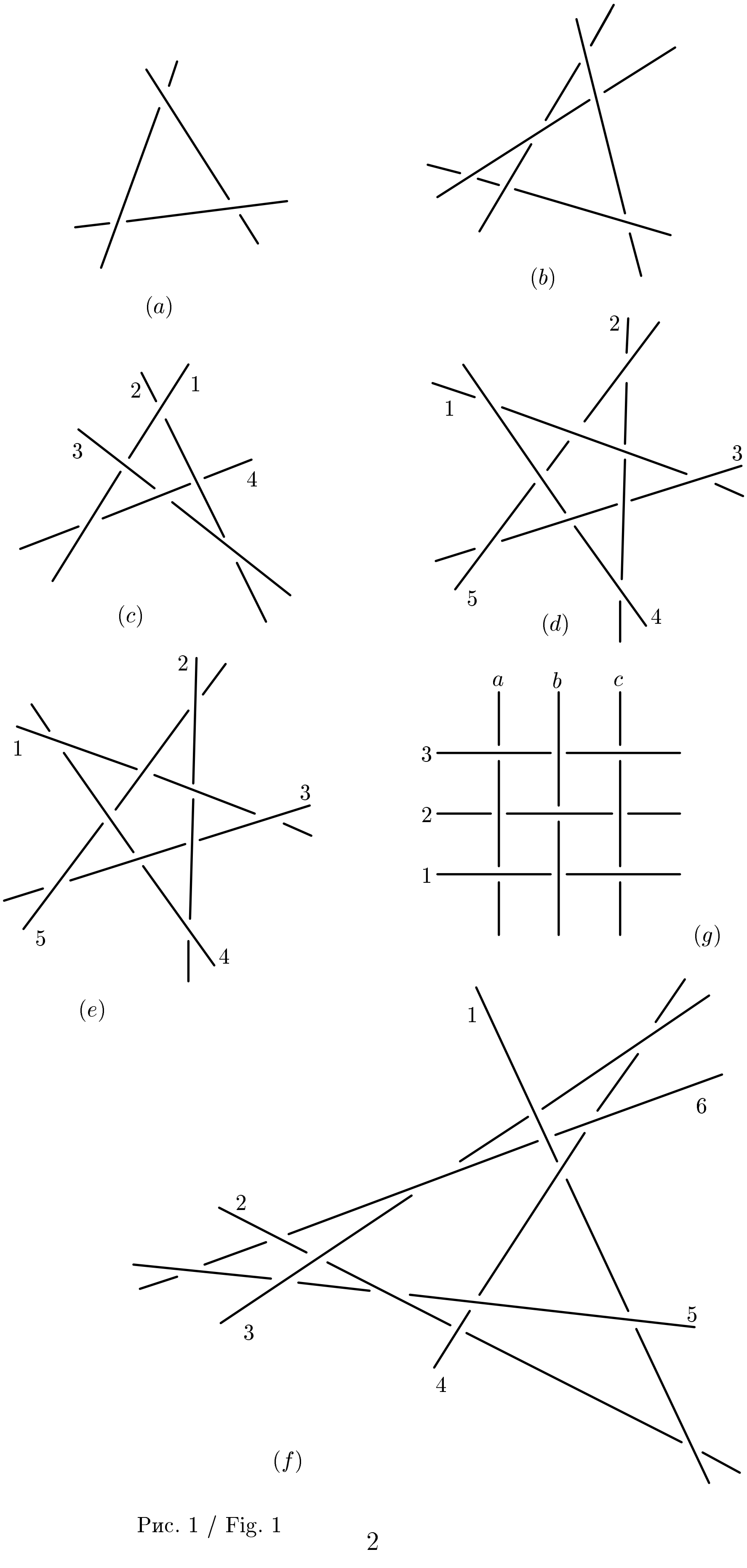


Рис. 1 / Fig. 1

Определения. Пусть на плоскости задано семейство прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке. Нарисуем в местах пересечения прямых, что одна из прямых "проходит выше". Полученная (плоская!) картинка называется *плетенкой*. Плетенки *равны*, если они переводятся друг в друга подобием. Плетенка называется *реализуемой*, если существует набор прямых в пространстве, дающий при проекции на некоторую плоскость данную плетенку.

Если условие задачи является формулировкой утверждения, то подразумевается, что это утверждение нужно доказать.

Определение. Прямая в плетенке называется *монотонной*, если на ней существует такая точка, что с одной стороны от нее прямая проходит выше всех, а с другой — ниже. В частности, прямая, проходящая выше всех остальных или ниже всех остальных, тоже считается монотонной.

2. Реализуемость плетенки не меняется при отбрасывании монотонной прямой.

3. a) Если плетенка состоит из 1, 2 или 3 прямых, то каждая ее прямая монотонна.

b) Если плетенка состоит из 4 или 5 прямых и каждая ее прямая не монотонна, то плетенка не реализуема.

c) Существует реализуемая плетенка из 6 не монотонных прямых.

d) Существует бесконечно много реализуемых плетенок без монотонных прямых, которые состоят из разного количества прямых.

Определение. Если плетенку B можно получить, выкинув одну или несколько прямых из плетенки A, то B называется *подплетенкой* плетенки A.

4. a) Плетенка, содержащая нереализуемую подплетенку, сама является нереализуемой.

b) Существует нереализуемая плетенка, все подплетенки которой реализуемы.

c) Существует бесконечно много нереализуемых плетенок (с разным количеством прямых), все подплетенки которых реализуемы.

d) Для любого $n \geq 4$ существует нереализуемая плетенка из n прямых, все подплетенки которой реализуемы.

5. Пусть каждая прямая плетенки параллельна либо оси Ox, либо оси Oy.

a) Существует ли нереализуемая плетенка такого типа, в которой нет подплетенки вида 1g?

b)* Найдите критерий реализуемости таких плетенок.

6.* В этой "физической" задаче мы не приводим аккуратной формулировки условия и не требуем аккуратного доказательства. Важно не столько решить данную задачу, сколько использовать ее для проведения эксперимента путем построения моделей и получения ответа в других задачах (но не для их строгого доказательства!).

a) Пусть мы имеем достаточно много длинных тонких упругих прутьев (или полосок). Составим из них (слегка изгибая прутья) фигуру, изображающую данную плетенку. Предположим, что получилась жесткая конструкция, то есть фигуру можно подвесить за одну точку так, чтобы она не распалась. Тогда соответствующая плетенка не реализуема.

b) Плетенка реализуема тогда и только тогда, когда построенная в (a) конструкция не содержит жестких подконструкций.

Промежуточный финиш.

После промежуточного финиша участники могли представить решения задач 3.d, 4.c, 5.ab, 6.ab, 7, 8, 9.ab, 10,11,12,13,14abcd,15.abcd. В задачах 3.d и 4.c был приведен только пример, а решение можно было сдать и после промежуточного финиша.

7. Реализуемость плетенки не изменяется при

a) замене плетенки на равную ей;

b) изменении всех пересечений прямых на противоположные (прямая, проходившая "выше", будет проходить "ниже" и наоборот);

c)* аффинном преобразовании;

d)* проективном преобразовании, если по одну сторону от образа бесконечно удаленной прямой при этом преобразовании заменить все пересечения прямых на противоположные.

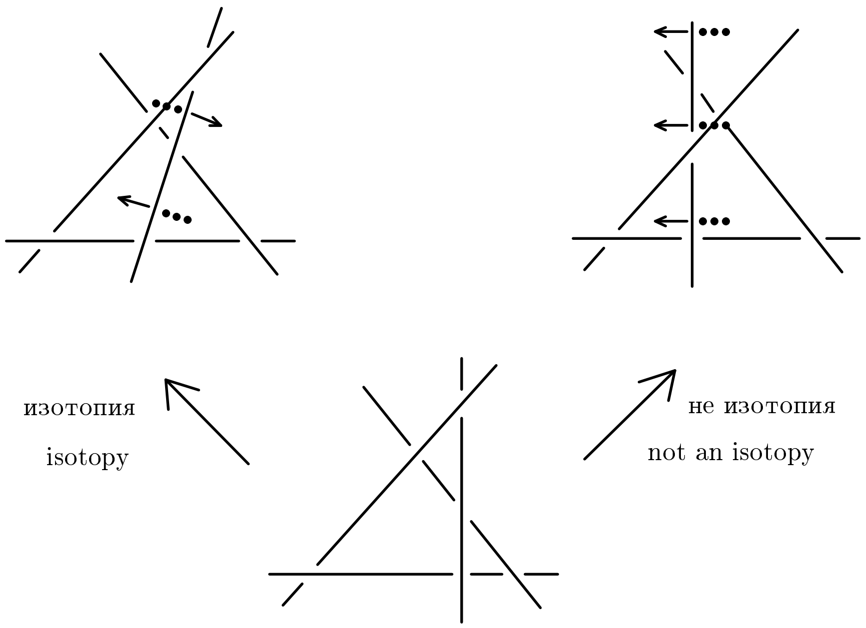


Рис. 2 / Fig. 2

Возьмем плетенку и будем непрерывно двигать ее прямые (по одной или несколько одновременно) так, чтобы они оставались прямыми, типы пересечений не менялись, параллельные оставались параллельными, пересекающиеся — пересекающимися, и ни одна прямая не проходила через точки пересечения других прямых (см. пример на рис. 2). Такое преобразование плетенки называется *изотопией*, а начальная и конечная плетенка — *изотопными*.

На рис. 0 и 1 картинки и плетенки заданы с точностью до изотопии.

8. Рассмотрим плетенку, изотопную плетенке на рис. 1.f, и диагонали AD, BE и CF шестиугольника $ABCDEF$.

a) Если диагонали пересекаются в одной точке так, как на рис.3.a, то плетенка не реализуема.

b) Если диагонали пересекают друг друга так, как на рис. 3.b, то плетенка не реализуема.

c) Если диагонали пересекают друг друга так, как на рис. 3.c, то плетенка реализуема.

d) Существуют две изотопные плетенки, одна из которых реализуема, а другая нет (эту задачу можно решить и другим способом, отличным от намеченного в пунктах a,b,c)

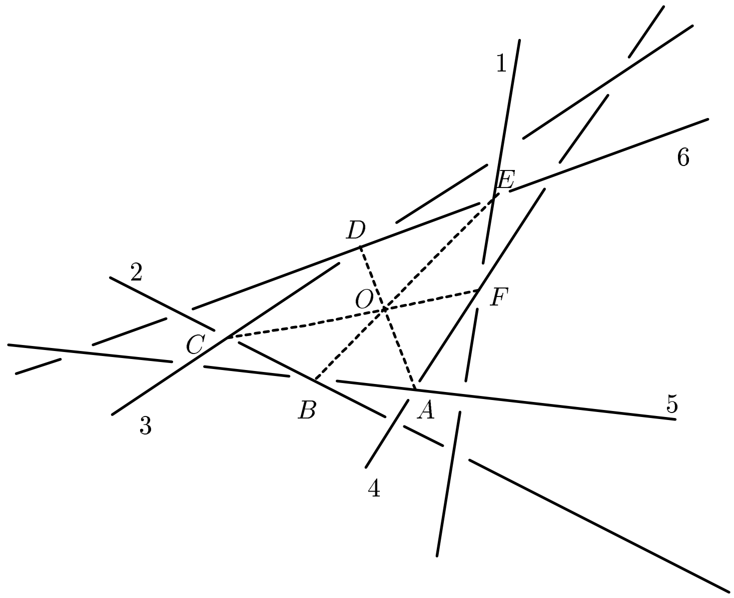


Рис. 3a / Fig. 3a

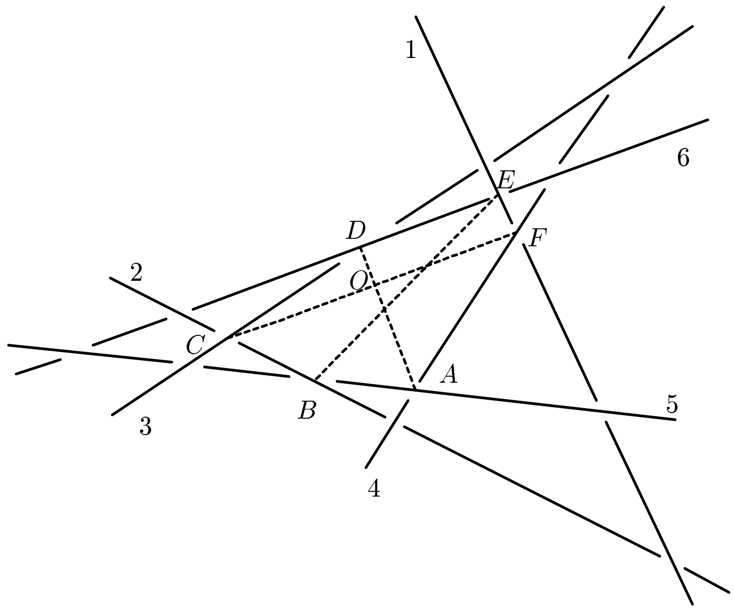


Рис. 3b / Fig. 3b

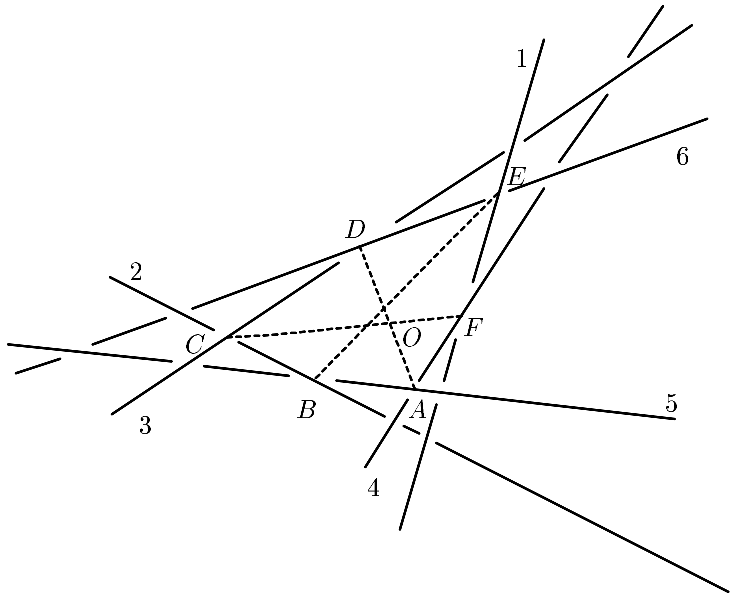


Рис. 3c / Fig. 3c

Определение. Предположим, что в плетенке выделены две прямые l_1 и l_2 и выбрана ориентация на всех остальных прямых. Разрешается двигаться по прямым плетенки в направлении их ориентации (по прямым l_1 и l_2 можно двигаться в произвольном направлении) и переходить с одной прямой на другую, если первая прямая проходит в этой точке "выше" второй. Назовем плетенку *ацикличной*, если для любого выбора прямых l_1 и l_2 и ориентаций на оставшихся прямых нельзя пройти по замкнутому маршруту и вернуться в исходную точку.

9 a) Всякая реализуемая плетенка ациклична.

b)* Верно ли, что для любой ацикличной плетенки некоторая изотопная ей плетенка реализуема?

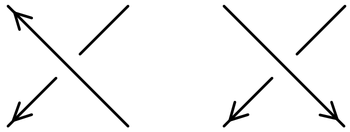
10.* Существует бесконечная последовательность реализуемых плетенок, в которой каждая плетенка не изотопна остальным и подплетенкам остальных.

Определения. Сплетение — это неупорядоченный набор попарно скрещивающихся неориентированных прямых в пространстве.

(Пространственная) изотопия набора попарно скрещивающихся прямых — это такое непрерывное движение прямых набора, в процессе которого они остаются попарно скрещивающимися.

11. Если $p = 4k + 3$, где k — любое целое, то всякое сплетение из p прямых не изотопно своему зеркальному образу (указание: см. задачи 12 и 13).

Определение. Пусть дана упорядоченная пара ориентированных скрещивающихся прямых. Спроектируем эту пару на плоскость общего положения. Если полученная ориентированная плетенка такова, как на рис. 4.a, то *коэффициент зацепления* этой пары равен -1, иначе $+1$.



(a) (b)

Рис. 4 / Fig. 4

12. a) Коэффициент зацепления не зависит от выбора плоскости проекции и сохраняется при одновременном изменении ориентации обеих ориентированных прямых.

b) Коэффициент зацепления упорядоченной пары ориентированных прямых не изменяется при изотопии.

c) Две упорядоченные пары ориентированных скрещивающихся прямых изотопны тогда и только тогда, когда их коэффициенты зацепления равны.

d)* Тройки ориентированных попарно скрещивающихся прямых изотопны тогда и только тогда, когда их попарные коэффициенты зацепления равны.

Определение. Коэффициент зацепления упорядоченной тройки ориентированных попарно скрещивающихся прямых — это произведение трех попарных коэффициентов зацепления.

13. a) Коэффициент зацепления тройки ориентированных прямых не зависит от выбора упорядочивания и ориентаций прямых.

b) Зеркальная симметрия пространства изменяет коэффициент зацепления как пары, так и тройки прямых.

c) Набор из p прямых содержит $p(p-1)(p-2)/6$ троек прямых.

d) Число $p(p-1)(p-2)/6$ нечетно тогда и только тогда, когда $p = 4k+3$, где k — целое.

Историческое замечание. Настоящий цикл элементарных задач появился в *алгебраической теории узлов* [Maz88, ViDr88, Vir85]. Основными результатами нашего цикла являются задачи 4.cd (А. Скопенков, 1989 [Kva89]) и 8 (Г. Гальперин и А. Скопенков, 1988; приведенные здесь решения получены А.Гайфуллиным в 2001 г.). Интересные нерешенные задачи — 5, 9.b и 10.

Благодарности. Мы благодарим А. Б. Сосинского и А. Таламбуцу за полезные обсуждения и А.Кулыгина за подготовку компьютерной верстки.

Список литературы

[1] В. Мазуровский. Записки научных семинаров ЛОМИ v. 187, 1988, pp. 121–134.

[2] В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин. Задачи по стереометрии.

[3] С. Л. Табачников. Задачи М1085абв. Квант v. 5, 1988.

[4] С. Л. Табачников. Линейные неравенства и задача М1085. Квант v. 6, 1989, pp. 38,60.

[5] О. Я. Виро, Ю. В. Дроботухина. Сплетения скрещивающихся кривых. Квант v. 3, 1988, pp. 12–19.

[6] О. Я. Виро. ДАН СССР v. 284:5, 1985, стр. 1049–1052.

[7] *Нам пишут: Еще раз о сплетающихся прямых.* Квант v. 11 , 1989, pp. 33

Решения задач, рассказанные на промежуточном финише.

0. b),d) Ответ: нет. Объявим плоскость ABC горизонтальной и начнем последовательно выяснять про остальные концы и точки пересечения, выше или ниже плоскости ABC они лежат. Быстро придем к противоречию.

a),c) Ответ: да.

Заметим, что при изменении высоты вершины ломаной проекция не изменяется. Если в проекции получаются два пересекающихся отрезка, то зафиксировав три конца отрезков и меняя высоту четвертого конца, мы можем получить нужный нам тип пересечения.

(a) Построим ломаную в пространстве для любой проекции вида 0a. Сперва расположим вершины A, B, C, D, E на высоте 0. Расположив H на высоте -1, добьемся, что отрезок BH пройдет под CD. Расположив вершины F и G на высоте 1, получим отрезки AF и BG проходящие над CE и AD соответственно. Теперь нетрудно выбрать высоты вершин K и L так, чтобы HL прошел над GK. Наконец, высоты вершин M и N можно выбрать произвольно.

(c) Построим ломаную в пространстве для любой проекции вида 0c. Выберем высоты вершин A, B, C, D чтобы AD шел над BC, и высоты E, F, G, H чтобы EH шел над FG. Затем выберем высоты вершин I, J чтобы DI шел над CJ. Наконец, выберем высоту K чтобы FK шел над DI, затем высоту L чтобы EL прошел под FK и CJ.

1. a),b) Ответ: да. Следует из задачи 2.

c) [Tab88] Ответ: нет. Допустим, что требуемое расположение (рис. 1.c) существует. "Опустим" прямую 1 в вертикальной плоскости, не задевая прямую 3, так, чтобы она пересекла прямые 2 и 4 (рис. 5). Затем аналогично "опустим" прямую 3 так, чтобы она пересекла прямые 1 и 4. Наконец, повернем прямую 2 в вертикальной плоскости вокруг ее точки пересечения с прямой 1 так, чтобы она пересекла прямую 3. При этом прямая 2 будет по-прежнему проходить под прямой 4. Но в то же время прямые 2 и 4 должны пересекаться, т.к. каждая из них пересекает прямые 1 и 3. Следовательно, все четыре прямые должны лежать в одной плоскости. Противоречие.

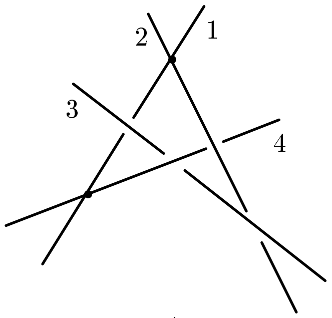


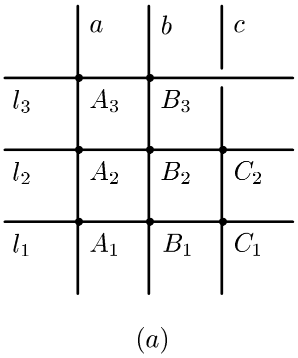
Рис. 5 / Fig. 5

d) Ответ: нет. Эта плетенка содержит плетенку на рис. 1.c в качестве подплетенки.

e) Ответ: нет. Доказательство аналогично задаче 4c.

f) Ответ: да. Очевидно, что если из данной плетенки выкинуть прямую 2, она станет реализуемой. Рассмотрим 5 прямых m_1, m_3, m_4, m_5, m_6, дающих при проекции на горизонтальную плоскость плетенку на рис. 1.f с выкинутой прямой 2. Пусть m_2 — прямая, пересекающая прямые m_3 и m_5 и проектирующаяся в прямую 2. Будем двигать прямую 2 параллельно самой себе по направлению к точке пересечения прямых 3 и 5. При этом прямую m_2 будем двигать так, чтобы она все время пересекала прямые m_3 и m_5 и проектировалась в прямую 2. Начиная с некоторого момента прямая m_2 будет проходить над прямой m_6 и под прямыми m_1 и m_4. Немного повернем ее в вертикальной плоскости так, чтобы она стала проходить под прямой m_3 и над прямой m_5. Получим набор прямых $m_1, \dots, m_6$ дающий при проекции на горизонтальную плоскость плетенку, изотопную данной.

g) [Tab88] Ответ: нет. Допустим, что рассматриваемая конфигурация возможна. Передвигая прямые в вертикальных плоскостях, как в задаче 1.c, мы можем добиться, чтобы каждая из прямых a, b, c пересекала каждую из прямых l_1, l_2, а l_3 пересекалась с a и b (рис. 6.a). Пусть $A_1, A_2, \dots, C_2$ — точки пересечения прямых a и l_1, a и $l_2, \dots, c$ и l_2; теми же буквами обозначаются и проекции этих точек на плоскость плетенки. Спроектируем всю конфигурацию на вертикальную плоскость λ, содержащую прямую l_3, вдоль прямой c (рис. 6.b). Прямая c при этом проектируется в точку C. Докажем, что эта точка лежит на прямой l_3 — это бы означало, что c и l_3 пересекаются, и противоречило предположению. Вертикальные плоскости, содержащие прямые a, b и c, параллельны (так как проекции прямых a, b и c на плоскость плетенки параллельны), поэтому и проекции a и b вдоль c на плоскость λ параллельны. Кроме того, в плетенке $A_1A_2 : A_2A_3 = B_1B_2 : B_2B_3$, а следовательно, это верно и для самой конфигурации, а значит, и для рис. 6.b (при параллельной проекции отношения длин параллельных отрезков сохраняются). Отсюда очевидно, что на рис. 6.b прямая A_3B_3 проходит через точку C, что и требовалось доказать.



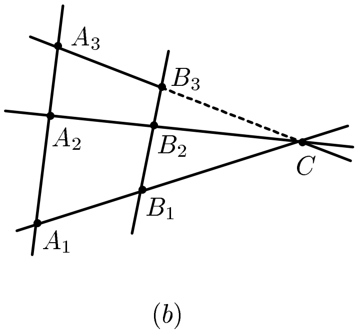


Рис. 6 / Fig. 6

2. Пусть P — плетенка с монотонной прямой, P' — плетенка, получающаяся из нее при выкидывании этой прямой. Очевидно, что если P реализуема, то P' реализуема. Докажем обратное. Предположим, что P' реализуема. Рассмотрим соответствующее расположение прямых в пространстве. На монотонной прямой плетенки P (лежащей в горизонтальной плоскости) отметим точку, с одной стороны от которой эта прямая проходит "выше" остальных прямых плетенки P, а с другой — "ниже". Проведем через эту точку вертикальную прямую и немного наклоним ее. Получим расположение прямых, дающее в проекции на горизонтальную плоскость плетенку P.

3. a) Очевидно, так как каждая прямая плетенки пересекается только с двумя

другими прямыми плетенки.

b) Любая плетенка из 4 не монтонных прямых изотопна плетенке на рис. 1.c или симметричной ей относительно некоторой оси, а значит, нереализуема. Любой набор 5 прямых общего положения на плоскости переводится проективным преобразованием в "звездочку". Любая такая плетенка из 5 не монотонных прямых либо содержит подплетенку из 4 не монотонных прямых, либо с точностью до изотопии и осевой симметрии совпадает с плетенкой на рис. 1.e. В любом случае она нереализуема.

c) Например, плетенка на рис. 1.f.

4. a) Очевидно. b) Например, плетенка на рис. 1.c.

Решения задач, рассказанные после промежуточного финиша.

3.d) Первое решение. Для любого набора прямых в пространстве, дающего в проекции плетенку без монотонных прямых, построим такой набор с удвоенным числом прямых. А именно, сдвинем все прямые на один и тот же вектор, параллельнный плоскости проекции, отследив, чтобы ни одна из новых прямых не пересекла старую (подумайте, почему это всегда возможно). Тогда и в проекции набора из новых прямых все прямые будут не монотонными, тем более они не монотонны в проекции объединения наборов.

Второе решение. Докажем по индукции по n, что при $n > 1$ существует реализуемая плетенка из $3n$ не монтонных прямых. При $n = 2$ это следует из задачи 1.f. Пусть $n > 2$ и P — плетенка из $3n - 3$ не монтонных прямых. Проведем в плоскости плетенки P произвольную прямую l, не параллельную никакой прямой плетенки P и не проходящую ни через какую точку пересечения двух прямых из P. Пусть A и B — две точки пересечения прямой l с прямыми плетенки P, такие что все остальные точки пересечения прямой l с прямыми плетенки P лежат на отрезке AB. Дополним плетенку P тремя прямыми, близкими к l, пересекающимися в трех точках вблизи продолжения отрезка AB за точку B. Расставим проходы и переходы так: на пересечениях этих трех прямых — как на рис. 1.a, в точках пересечения этих трех прямых с прямой из P, пересекающей l в точке A они проходят "ниже", а в точках пересечения с остальными прямыми из P — "выше". Полученная плетенка из $3n$ прямых не содержит монотонных прямых, но реализуема. В самом деле, можно взять в пространстве три близких прямых, дающих при проекции на плоскость плетенки P плетенку, изотопную плетенке на рис. 1.a и "вставить" эти три прямые в расположение прямых, дающее при проекции на эту плоскость плетенку P.

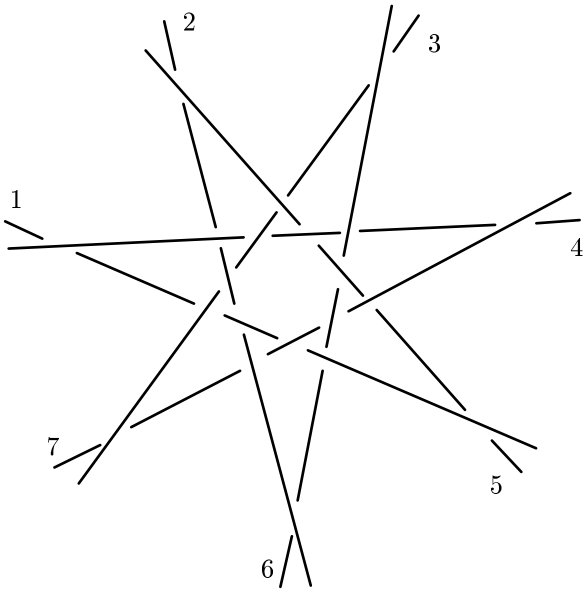


Рис.7 / Fig. 7

4.c) Построим последовательность плетенок L_n с требуемым свойством. Плетенка L_n будет состоять из $2n+1$ прямых — продолжений самых длинных диагоналей правильного $(2n+1)-$угольника. На рисунках 1.e, 7 и 8 изображены плетенки L_2, L_3 и L_4. Заметим, что пересечения каждой прямой плетенки L_n с остальными прямыми устроены одинаково: если идти так, чтобы центр $(2n+1)-$угольника оставался слева, то сначала прямая проходит $(n-1)$ раз "под", потом один раз "над", затем опять "под" и наконец $(n-1)$ раз "над"(рисунок 9).

Докажем нереализуемость плетенки L_4, в общем случае доказательство аналогично. Предположим, что наша плетенка является проекцией некоторого набора прямых в пространстве. Возьмем на прямой 1 точку A, которая проецируется в точку пересечения проекций прямых 1 и 2. и повернем прямую 1 в вертикальной плоскости вокруг точки A, до пересечения с прямой 2. Аналогично, повернем прямую 2 до пересечения с прямой 3, ..., повернем прямую 9 до пересечения с прямой 1. Докажем нереализуемость полученной картинки. Направим ось z вниз перпендикулярно прямым 1 and 2. Пусть p — плоскость, проходящая через прямые 1 и 2. Докажем, что z-координата возрастает при движении вдоль прямых 3,4 ..., 9 по часовой стрелке вокруг центрального девятиугольника, и тем самым придем к противоречию. Сначала докажем это для прямых 3, 4, 5. Заметим, что точка каждой из прямых 3, 4, 5, проецирующаяся в точку пересечения с проекцией прямой 1, находится выше плоскости p, при этом каждая из прямых 3, 4, 5 пересекает девятиугольник не выше плоскости p (это очевидно для прямой 3, и доказывается по индукции для остальных прямых). Для прямых 9, 8, 7 доказательство аналогично. Остается заметить, что прямая 6 проходит выше прямой 1 и ниже прямой 2, и нереализуемость плетенки доказана.

Докажем теперь реализуемость всех подплетенок. Заметим, что после выбрасывания прямой l_{n+1} прямые l_n and l_{n+2} становятся монотонными. Далее, после выбрасывания l_{n-k+2} и l_{n+k} монотонными становятся прямые l_{n-k+1} и l_{n+k+1}. Отсюда согласно задаче 2, плетенка, получающаяся из L_n выбрасыванием прямой l_{n+1}, реализуема.

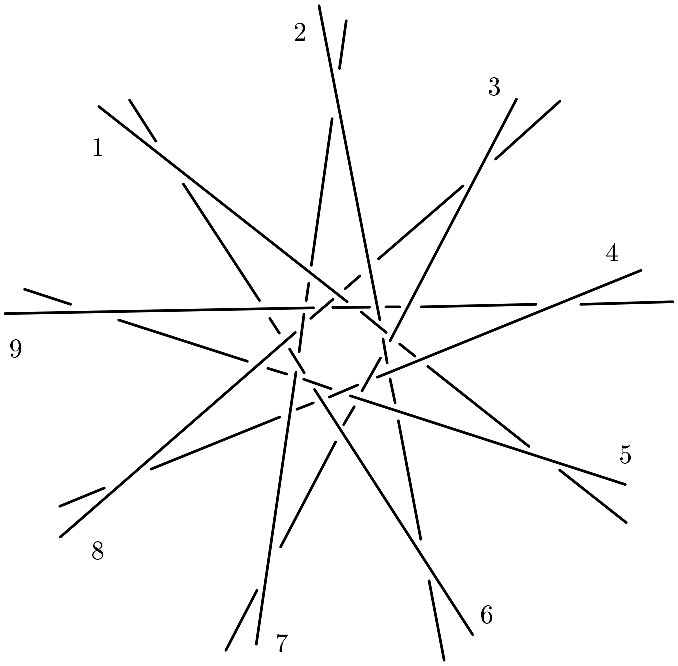


Рис. 8 / Fig. 8

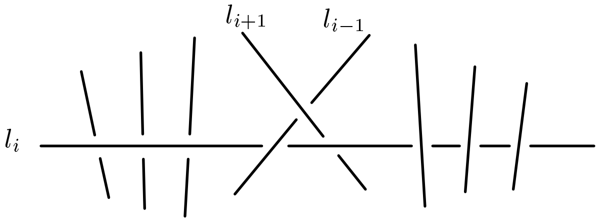


Рис. 9 / Fig. 9

7. a) Пусть P_1 и P_2 — две равные плетенки на горизонтальной плоскости, f — преобразование подобия плоскости, переводящее P_1 в P_2. Тогда f однозначно продолжается до преобразования подобия пространства F, которое переводит верхнее полупространство в верхнее, а нижнее — в нижнее. Пусть P_1 реализуема и A_1 — множество прямых в пространстве, дающее при проекции на горизонтальную плоскость плетенку P_1. Тогда множество прямых $A_2 = F(A_1)$ дает при проекции на горизонтальную плоскость плетенку P_2. Следовательно P_2 тоже реализуема.

b) Пусть плетенка P' получается из плетенки P заменой всех пересечений на противоположные. Предположим, что P реализуема. Рассмотрим семейство прямых, дающее при проекции на некоторую плоскость плетенку P. Отразим его относительно этой плоскости. Получим семейство прямых, дающее при проекции на эту плоскость плетенку P'.

c) Решение аналогично решению задачи 7.a.

d) Любое проективное преобразование представляется в виде композиции аффинного преобразования и центральной проекции в пространстве с одной плоскости на другую . Поэтому достаточно доказать наше утверждение для случая, когда наше проективное преобразование является центральной проекцией плоскости π на плоскость π' с центром в точке $O \notin (\pi \cup \pi')$. Так как исходная плетенка P реализуема, то существует семейство A прямых в пространстве, которое при проекции на плоскость π дает плетенку P. При этом можно считать, что A лежит в малой окрестности плоскости π. Проекция с плоскости π на плоскость π' с центром O продолжается до проективного преобразования f пространства. Обозначим через l прямую пересечения плоскости π' с плоскостью, проходящей через точку O параллельно плоскости π. Тогда l является f-образом одной из бесконечно удаленных прямых. Если прямая $n \in A$ проходит выше прямой $m \in A$, то прямая $f(n)$ будет проходить выше прямой $f(m)$, если точка пересечения их проекций на плоскость π' лежит по одну сторону от прямой l, и ниже — если по другую. Поэтому семейство $f(A)$ прямых проецируется на плоскость π' в плетенку P', т.е. P' реализуема.

8. a),b) Допустим, эта плетенка реализуема. Рассмотрим прямые 1 — 6 в пространстве. Повернем прямую 2 в вертикальной плоскости относительно точки, которая проектируется в точку пересечения проекций прямых 2 и 6, так чтобы она пересекла прямую 5. Аналогично повернем прямые 4 и 6, так чтобы они пересекли прямые 1 и 3 соответственно. Повернем прямую 5 в вертикальной плоскости относительно точки пересечения с прямой 2, так чтобы она пересекла прямую 6. Теперь повернем прямую 4 в вертикальной плоскости относительно точки пересечения с прямой 1, так чтобы она пересекла прямую 5, и прямую 3 относительно точки пересечения с прямой 6, так чтобы она пересекла прямую 4. Аналогично, повернув прямые 1 и 2, добьемся того, чтобы прямая 2 пересекала прямые 1 и 3. Пусть π_1 — плоскость, содержащая прямые 1 и 2, π_2 — плоскость, содержащая прямые 3 и 4, π_3 — плоскость, содержащая прямые 5 и 6. Пусть A', B', C', D', F' — точки пересечения прямых получившейся конструкции, проецирующиеся в точки A, B, C, D, F соответственно. Плоскости π_1 и π_3 пересекают плоскость π_2 по прямым $C'F'$ и $A'D'$ соответственно. Тогда в точке O' пересечения прямых $C'F'$ и $A'D'$ пересекаются все три плоскости π_1, π_2 и π_3, значит, прямая $B'O'$ пересекает прямые 1 и 6 в некоторых точках E_1' и E_2'. Заметим, что точка E_2' лежит на отрезке $D'E'$ и, следовательно, лежит ниже плоскости π_1. Это противоречит тому, что прямая $B'O'$ лежит в плоскости π_1.

c) Докажем сначала, что плетенка, изображенная на рис. 3.d, реализуема. Очевидно, она была бы реализуема, если бы не был задан тип перекрестка в точке E. Рассмотрим семейство прямых, дающее при проекции на горизонтальную плоскость эту конструкцию, возможно, с другим типом перекрестка в точке E. Определим точки $A', B', C', D', F', O', E_1', E_2'$ и плоскости π_1, π_2 и π_3 так же, как в предыдущем пункте. Прямая $B'O'$ лежит в плоскости π_3, значит, точка E_1' лежит в плоскости π_3. Тогда в точке E прямая 1 проходит выше плоскости π_3, а значит, и выше прямой 6. Следовательно, конструкция на рис. 3.d реализуема. Теперь проделаем в обратном порядке все преобразования предыдущего пункта. Получим, что плетенка на рис. 3.c тоже реализуема.

9. Предположим, эта плетенка реализуема. Рассмотрим множество прямых A, дающее при проекции на горизонтальную плоскость эту плетенку. Пусть m_1 и m_2 — прямые в A, проектирующиеся в прямые l_1 и l_2 соответственно, π — плоскость, параллельная прямым m_1 и m_2. Направим ось z "вниз" перпендикулярно плоскости π. Ориентируем все прямые из A, кроме m_1 и m_2, так, чтобы при проходе по каждой из них вдоль ориентации координата z увеличивалась (если какая-нибудь прямая из A параллельна плоскости π, ориентируем ее произвольно). При проходе по любому за-

мкнутому маршруту в соответствии с условиями задачи координата z уменьшается, чего не может быть, так как в итоге мы возвращаемся в исходную точку. Противоречие.

10. Пример строится следующим образом (см. рис. 10 для $n = 5$). Для $k = 1, \dots, n$ прямая k проходит через точки с координатами $(n - k, 0)$ и $(0, k - 1)$. При этом 1 проходит "выше" 2 и n и "ниже" остальных прямых. Для $k = 2, \dots, n - 1$ прямая k "выше" $1, \dots, k - 2, k + 1$ и "ниже" остальных прямых. Прямая n проходит "выше" $2, 3, \dots, n - 2$.

Докажем, что все подплетенки реализуемы. В самом деле, после удаления прямой k прямая $k - 1$ становится монотонной, а прямая n становится монотонной после удаления 1. Поэтому после выбрасывания любой прямой мы можем одну за другой выбросить все остальные прямые, не меняя реализуемости плетенки, следовательно, наша подплетенка реализуема.

Докажем нереализуемость построенной плетенки. Опустим прямую 1 до пересечения с прямыми 2 и n. Повернем прямую 2 до пересечения с прямой 3, и т. д., прямую $n - 1$ до пересечения с прямой n, прямую n до пересечения с прямой 1. Направим ось z вниз перпендикулярно прямым 1 и n. В результате получим, что z-координата возрастает вдоль каждой из прямых $2, \dots, n - 1$ в направлении от прямой 1 к n. Значит, z-координата возрастает в последовательности точек пересечения $1 \cap 2$, $2 \cap 3$, $\dots$, $n - 1 \cap n$. Но она равна нулю для точек $1 \cap 2$ и $n - 1 \cap n$. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

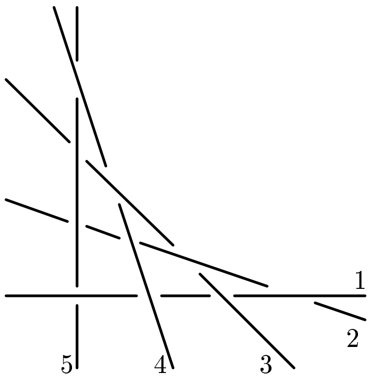


Рис. 10 / Fig. 10

13–15. [ViDr88].