П.В.Спорышев

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ К ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

0. Введение

Для изучения различных аналитических характеристик задач линейной алгебры, в частности, задач линейного программирования, можно использовать методы интегральной геометрии. Для этого необходимо параметризовать множество соответствующих задач (например, задач линейного программирования) и изучать геометрические свойства пространства задач. Такое пространство можно строить по-разному. А.М.Вершик предложил отождествить пространство задач с многообразием Грассмана ([2]). Соответствующее построение проводится в пункте I. Удобство использования многообразия Грассмана для построения пространства задач состоит в том, что на нем существует единственная инвариантная относительно естественного действия ортогональной группы нормированная мера (см. [3]), и можно говорить о вероятности того, что задача обладает определенным свойством, как о мере соответствующего множества задач. В наиболее простых случаях ответ можно получить не только для инвариантной меры, но и для более широкого класса мер. В этой работе будут вычислены вероятность того, что экстремум в задаче линейного программирования конечен, вероятность того, что экстремум в задаче линейного программирования бесконечен, и среднее число допустимых базисов. Результат основан на формуле Штейнера-Шлёфли [8] о числе частей, на которые гиперплоскости общего положения разбивают пространство. Она уже использовалась для изучения характеристик случайных конусов в работах [4,5] . Другие определения пространства задач линейного программирования можно найти в работах [6,7] .

I. Построение пространства задач

В дальнейшем символом $G(n,k)$ $(n \geqslant k \geqslant 0)$/ обозначается многообразие Грассмана k-мерных подпространств в $\mathbb{R}^n$. Для каждого подпространства E размерность и ортогональное дополнение обозначаются соответственно $\dim E$ и $E^{\perp}$. Если $A=\{a_j^i\}$ – вещественная матрица размерности $n \times k$, то через a^i обозначается вектор $a^i=(a_1^i, a_2^i, \ldots, a_n^i)$ в $\mathbb{R}^n$, а через a_i обозначается вектор $a_i=(a_i^1, a_i^2, \ldots, a_i^k)$ в $\mathbb{R}^k$. Множество целых чисел $\{k, k+1, \ldots, n\}$ обозначается $k:n$. Подмножество может быть пустое s из $1:n$ мы будем называть набором индексов из $1:n$ и обозначать через $|s|$ число элементов s, а через $\bar{s}$ набор $1:n \setminus s$. Запись задачи в виде: $\sup\{f(x)|$ $B(x)\}$ означает, что надо найти супремум функции f на векторах, для которых выполнены условия B. Такие вектора называются допустимыми. Определим на матрицах размерности $n \times k$ $(n \geq k)$ ранга k отображение Sub со значениями в $G(n,k)$. Оно сопоставляет каждой матрице $A = \{a^i_j\}$ подпространство в R^n, являющееся линейной оболочкой векторов $a^1, a^2, \ldots, a^k$ *).

Пусть n, m, k – целые неотрицательные числа, причем $n \geq m$, $n \geq k$, $m + k \geq n$. Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\sup\{x_{n+1} \mid xA = \mathbb{0};\ x_i \geq 0,\ i \in 1:m;\ x_{n+2} = 1\}, \qquad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+2})$ – вектор в R^{n+2}, A – вещественная матрица размерности $(n+2) \times (k+1)$ ранга $k+1$.

Пусть $E = Sub(A)$. Тогда условие на допустимые вектора в задаче (1): $xA = \mathbb{0}$, эквивалентно тому, что x ортогонален всем векторам порождающим E, то есть $x \in E^{\perp}$. Используя это, получаем следующую задачу:

$$\sup\{x_{n+1} \mid x \in E^{\perp};\ x_i \geq 0,\ i \in 1:m;\ x_{n+2} = 1\}. \qquad (2)$$

Заметим, что хотя каждому подпространству E из $G(n+2, k+1)$ соответствует целый класс матриц, вектор-столбцы которых порождают E, условия на допустимые вектора в задаче (1) для произвольной матрицы A, такой, что $Sub(A) = E$, и в задаче (2) эквивалентны. Поэтому при изучении характеристик задач линейного программирования, связанных со структурой множества допустимых векторов, естественно в качестве пространства задач взять многообразие $G(n+2, k+1)$, в каждой точке E которого рассматривается задача (2). Связь между таким определением пространства задач и матричным определением обсуждается в пункте 5.

2. Формулировка теоремы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть L – n-мерное линейное пространство, $b = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ – базис в L, E – k-мерное подпространство $(n \geq k \geq 0)$. Мы будем говорить, что E – подпространство в общем положении в L относительно базиса b, если для любого набора индексов s из $1:n$ такого, что $|s| = k$,

*) Другое обозначение – $Span\ A$.

$E \cap \{x \mid x_i = 0,\ i \in s\} = \mathbb{O}$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - координаты вектора x в базисе b .

Фиксируем в пространстве R^n стандартный базис $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, где e_i обозначает вектор, у которого i-я координата равна I, а остальные равны нулю. Мы будем говорить, что E - подпространство в общем положении в R^n или просто подпространство в общем положении, когда ясно о каком R^n идет речь, если E - подпространство в общем положении в R^n относительно базиса e . Свойства подпространств в общем положении будут рассматриваться в пункте 3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть на борелевских множествах многообразия $G(n,k)$ задана мера μ . Мы будем говорить, что μ инвариантна относительно замен знаков координат, если для любого преобразования многообразия φ_ε , соответствующего замене координат векторов в R^n с $\{x_i\}$ на $\{\varepsilon_i x_i\}$, где $\varepsilon_i = \pm 1$, и любого измеримого множества C $\mu(C) = \mu(\varphi_\varepsilon(C))$.

Пусть n, m, k - целые неотрицательные числа, причем $n \geq m$, $n \geq k$, $m+k \geq n$. В каждой точке E многообразия $G(n+2, k+1)$ рассматривается задача (2). Обозначим val функцию на $G(n+2, k+1)$ со значениями в расширенной вещественной прямой равную в каждой точке супремуму задачи (2), рассматриваемой в ней.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть s - набор индексов из $1:(n+1)$, причем $(m+1):(n+1) \subset s$ и $|s| = k+1$, E - $(k+1)$ -мерное подпространство в R^{n+2} . Набор s мы будем называть допустимым базисом задачи (2), рассматриваемой в E , если выполнены следующие условия:

$$E^{\perp} \cap \{x \mid x_i = 0,\ i \in \bar{s} \cup \{n+2\}\} = \mathbb{O}, \tag{3}$$

$$E^{\perp} \cap \{x \mid x_i = 0,\ i \in \bar{s};\ x_i \geq 0,\ i \in s \cap 1:m;\ x_{n+2} = 1\} \neq \varnothing . \tag{4}$$

Естественность этого определения будет обсуждаться в пункте 4.

Обозначим bas функцию на $G(n+2, k+1)$, равную в каждой точке числу допустимых базисов задачи (2), отвечающей этой точке.

ТЕОРЕМА I. Пусть на борелевских множествах многообразия $G(n+2, k+1)$ задана вероятностная мера P такая, что на множестве полной меры подпространство находится в общем положении, и инвариантная относительно замен знаков координат. Тогда

$$P\{val > -\infty\} = 2^{-m} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{m}{i},$$

$$P\{val=+\infty\}=2^{-m}\sum_{i=0}^{n-k-1}\binom{m}{i},$$

$$P\{-\infty< val<+\infty\}=2^{-m}\binom{m}{n-k},$$

$$M_p\, bas=2^{n-k-m}\binom{m}{k+m-n}.\ ^{*)}$$

3. Свойства подпространств в общем положении

Для доказательства теоремы нам потребуется несколько свойств подпространств в общем положении, но перед тем, как их сформулировать, удобно ввести некоторые обозначения.

Пусть s и t – два дизъюнктных набора индексов из $1:n$. Через $\varepsilon(s)$ обозначается множество чисел $\varepsilon(s)=\{\varepsilon_i \mid \varepsilon_i=\pm 1, i\in s\}$, которое в дальнейшем мы будем называть набором знаков. Через $R^n_+(s,t)$, $R^n_+(s,\varepsilon(s),t)$, $R^n(t)$ обозначаются конуса в R^n $R^n_+(s,t)=\{x \mid x_i>0,\ i\in s;\ x_i=0,\ i\in t\}$, $R^n_-(s,\varepsilon(s),t)=\{x \mid \varepsilon_i x_i>0, i\in s;\ x_i=0,\ i\in t\}$ и подпространство в R^n $R^n(t)=\{x \mid x_i=0,\ i\in t\}$. В каждом подпространстве $R^n(t)$ фиксирован базис, состоящий из векторов стандартного базиса e, принадлежащих этому подпространству. Мы будем говорить о подпространствах в общем положении в $R^n(t)$, имея в виду этот базис. χ– функция множества такая, что $\chi(C)=0$, если C пусто, и $\chi(C)=1$ в противном случае.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть E – k-мерное линейное пространство $(k\geq 1)$. Семейство гиперплоскостей $E_1,E_2,\dots,E_n$ в E называется семейством гиперплоскостей в общем положении, если пересечение каждых k из этих гиперплоскостей равно нулю.

Теперь мы можем сформулировать основные свойства подпространств в общем положении.

СВОЙСТВО I. Пусть E – подпространство в R^n. Тогда следующие утверждения равносильны:

1. E – k-мерное подпространство в общем положении в R^n,
2. $E^{\perp}$–$(n-k)$-мерное подпространство в общем положении в R^n,
3. для любого набора индексов s из $1:n$ такого, что $|s|=m$ и $k\geq m\geq 0$, подпространство $E\cap R^n(s)$ является $(k-m)$-мерным подпространством в общем положении в $R^n(s)$, и если $k-m\geq 1$, то семейство подпространств $E\cap R^n(s)\cap R^n(\{i\})$ при $i\in\bar{s}$ является семейством гиперплоскостей в общем положении в $E\cap R^n(s)$.

*) Знак M_p – математическое ожидание по мере p.

4. $\dim E = k$ и для любых двух дизъюнктных наборо индексов s и t из $1:n$ таких, что $|s| \geqslant 1$, и любого набора знаков $\varepsilon(s)$ следующие утверждения равносильны:

а) $E \cap \{x \mid \varepsilon_i x_i \geqslant 0,\ i \in s;\ x_i = 0,\ i \in t\} \neq \emptyset$,

б) $E \cap R^n_+(s, \varepsilon(s), t) \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность I и 2. Пусть выполнено I, фиксируем произвольный набор индексов s из $1:k$, $|s| = k$. По определению общего положения $E \cap R^n(s) = \mathbb{O}$, поэтому

$$R^n = (E \cap R^n(s))^{\perp} = E^{\perp} + R^n(s)^{\perp} = E^{\perp} + R^n(\bar{s}).$$

Используя это равенство, имеем $\dim(E^{\perp} \cap R^n(\bar{s})) =$

$$= \dim E^{\perp} + \dim R^n(\bar{s}) - \dim(E^{\perp} + R^n(\bar{s})) = (n-k) + k - n = 0.$$

$\dim E^{\perp} = n - k$ и $\bar{s}$ – произвольный набор индексов из $1:n$ с числом элементов равным $n-k$, поэтому $E^{\perp}$ является $(n-k)$-мерным подпространством в общем положении в R^n. Используя равенство $(E^{\perp})^{\perp} = E$, получаем обратное утверждение.

Эквивалентность I и 3. Из 3 следует I, достаточно взять в качестве s пустое множество. Наоборот, пусть выполнено I. Фиксируем произвольный набор индексов s из $1:n$, $|s| = m$, $k \geqslant m \geqslant 0$. Достаточно доказать, что $\dim(E \cap R^n(s)) = k - m$, остальная часть утверждения 3 является очевидным следствием определения общего положения

$$\dim(E \cap R^n(s)) = \dim E + \dim R^n(s) - \dim(E + R^n(s)) \geqslant k - m.$$

Пусть $L = E \cap R^n(s)$, если $\dim L > k - m$, то для любого набора индексов t из $1:n$ такого, что s и t дизъюнктны и $|t \cup s| = k$, имеем

$$0 = \dim(L \cap R^n(t)) = \dim L + \dim(R^n(t)) - \dim(L + R^n(t)) >$$

$$> (k - m) + (n - k + m) - \dim(L + R^n(t)).$$

Откуда получаем, что $\dim(L + R^n(t)) > n$, чего быть не может.

Следовательно, $\dim(E \cap R^n(s)) = k - m$.

Эквивалентность I и 4. Покажем, что из 3 следует 4. Пусть выполнено 3, фиксируем два дизъюнктных набора индексов s и t из $1:n$ таких, что $|s| \geqslant 1$, и набор знаков $\varepsilon(s)$. Очевидно, что из б) следует а). Докажем обратное. Доказательство проводим индукцией по размерности пространства $\mathbb{R}^n$. Ясно, что для $n=1$ утверждение верно. Пусть для пространств размерности меньшей n утверждение верно, докажем его для размерности n. По условию существует вектор y такой, что $y \in E \cap \{x \mid \varepsilon_i x_i \geqslant 0,\ i \in s;\ x_i = 0,\ i \in t\}$ и $y \neq \mathbb{0}$. Если $\varepsilon_i y_i > 0$ при всех $i \in s$, то утверждение верно. В противном случае найдется индекс $j \in s$ такой, что $y \in E \cap \mathbb{R}^n(t \cup \{j\})$.

$$\dim(E \cap \mathbb{R}^n(t \cup \{j\})) = \dim(E \cap \mathbb{R}^n(t)) - 1,$$

поэтому в $E \cap \mathbb{R}^n(t)$ существует вектор z такой, что $\varepsilon_j z_j = 1$. Если $\varepsilon_i y_i > 0$ при всех $i \in s \setminus \{j\}$, то отрезок прямой, соединяющий y и z, пересекает конус $\mathbb{R}^n_+(s, \varepsilon(s), t)$, и следовательно, $E \cap \mathbb{R}^n_+(s, \varepsilon(s), t) \neq \varnothing$. Осталось показать, что можноподобрать вектор y так, чтобы это условие было бы выполнено. Если $|s| = 1$, то такой вектор уже есть, в противном случае возможность его нахождения следует из применения индукционного предположения к $(n-1)$-мерному пространству $\mathbb{R}^n(\{j\})$ и подпространству в нем $E \cap \mathbb{R}^n(\{j\})$.

Покажем, что из 4 следует I. Пусть выполнено 4, фиксируем произвольный набор индексов s из $1:n$, $|s| = k$. Если $E \cap \mathbb{R}^n(s) \neq \mathbb{0}$, то рассмотрим систему векторов в E y, y^i при $i \in s$ таких, что $y \in E \cap \mathbb{R}^n(s)$, $y^i \in E \cap \mathbb{R}^n_+(\{i\}, s \setminus \{i\})$ при $i \in s$. По условию такие вектора существуют, но они линейнонезависимы, следовательно, $\dim E \geqslant k+1$. Получили противоречие с тем, что $\dim E = k$. Итак, $E \cap \mathbb{R}^n(s) = \mathbb{0}$.

СВОЙСТВО 2. Пусть E – k-мерное подпространство в общем положении в $\mathbb{R}^n (n \geqslant k \geqslant 1)$, фиксируем два дизъюнктных набора индексов s и t из $1:n$, причем $|s| = p$, $|t| = m$, $p \geqslant 1$, $m < k$. Тогда

$$\sum_{\varepsilon(s)} \chi(E \cap \mathbb{R}^n_+(s, \varepsilon(s), t)) = 2 \sum_{i=0}^{k-m-1} \binom{p-1}{i},$$

где суммирование ведется по всевозможным различным наборам знаков $\varepsilon(s)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. При доказательстве этого свойства будет использоваться формула Штейнера-Шлефли о том, что семейство из n $(n \geqslant 1)$ гиперплоскостей в общем положении в k-мерном линейном пространстве $(k \geqslant 1)$ разбивает пространство на $2 \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n-1}{i}$ открытых частей. Доказательство этой формулы легко получается индукцией по размерности пространства, кроме того оно есть в работах

[4,8] .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L = E \cap R^n(t)$. По свойству I L есть $(k-m)$-мерное пространство и семейство подпространств $L \cap R^n(\{i\})$ при $i \in s$ является семейством гиперплоскостей в общем положении в L. Следовательно эти гиперплоскости разбивают L на $2\sum_{i=0}^{k-m-1}\binom{p-1}{i}$ открытых частей. Очевидно, что каждая из таких частей есть пересечение E с одним из конусов $R_+^n(s, \varepsilon(s), t)$, а с остальными конусами E не пересекается.

4. Доказательство теоремы

ЛЕММА I. Пусть на борелевских множествах многообразия $G(n,k)$ $(n \geq k \geq 1)$ задана нормированная мера μ такая, что на множестве полной меры подпространство находится в общем положении, и инвариантная относительно замен знаков координат. Фиксируем два дизъюнктных набора индексов s и t из $1:n$, причем $|s| = p$, $|t| = m$, $p \geq 1$, $m < k$. Тогда для любого фиксированного набора знаков $\varepsilon^1(s)$

$$\int_{G(n,k)} \chi(E \cap R_+^n(s, \varepsilon^1(s), t))\, d\mu = 2^{1-p} \sum_{i=0}^{k-m-1} \binom{p-1}{i} .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что подынтегральная функция измерима, следовательно интегрирование возможно. Используя то, что на множестве полной меры подпространство находится в общем положении, и свойство 2, имеем

$$\int_{G(n,k)} \sum_{\varepsilon(s)} \chi(E \cap R_+^n(s, \varepsilon(s), t))\, d\mu = 2 \sum_{i=0}^{k-m-1} \binom{p-1}{i} , \tag{5}$$

где суммирование ведется по всевозможным различным наборам знаков $\varepsilon(s)$. Рассмотрим 2^p конусов $R_+^n(s, \varepsilon(s), t)$, все они получаются из $R_+^n(s, t)$ заменами знаков координат, а мера инвариантна относительно таких замен. Следовательно, меры подпространств, пересекающихся с этими конусами равны. Отсюда и равенства (5) получаем ответ.

ЛЕММА 2. Пусть $A = \{a_j^i\}$ - вещественная матрица размерности $n \times k$ ранга k $(n \geq k \geq 1)$, подпространство $E = Sub(A)$, s - набор индексов из $1:n$, $|s| = k$. Тогда k векторов a_i при $i \in s$ линейно независимы в R^k, если и только если $E^\perp \cap R^n(\bar{s}) = \mathbf{0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение является очевидным следствием того, что однородная система линейных уравнений

$$\sum_{i\in s} x_i a_i^j = 0 \qquad \text{при } j\in 1:k$$

имеет лишь нулевое решение в том и только том случае, когда

$$E^{\perp}\cap R^n(\bar{s}) = \mathbb{0}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Фиксируем произвольное $(k+1)$ -мерное подпространство E в R^{n+2} и вещественную матрицу A размерности $(n+2)\times(k+1)$ ранга $k+1$ такую, что $Sub(A)=E$. Рассмотрим задачи (I) и (2) и покажем, что определение допустимого базиса в задаче (2) естественно в том смысле, что каждый допустимый базис задачи (I) является допустимым базисом в задаче (2) и наоборот. Действительно, понятие допустимого базиса в задаче (I) хорошо известно. Набор индексов s из $1:(n+1)$ такой, что $(m+1):(n+1)\subset s$ и $|s|=k+1$ называется допустимым базисом в задаче (I), если вектора a_i при $i\in s$ линейно независимы в R^k и соответствующее базисное решение допустимо. Первое из этих условий по лемме 2 эквивалентно (3), а второе совпадает с (4). Если E – подпространство в общем положении, то по свойству I условие (3) выполнено всегда, а условие (4) эквивалентно следующему:

$$E^{\perp}\cap R_+^{n+2}((s\cap 1:m)\cup\{n+2\},\bar{s}) \neq \emptyset . \tag{6}$$

Значение функции val в E больше $-\infty$ в том и только том случае, когда в задаче (2) существует допустимый вектор, то есть, если $E^{\perp}\cap\{x \mid x_i\geq 0,\ i\in 1:m;\ x_{n+2}=1\}\neq\emptyset$, что для подпространств в общем положении по свойству I эквивалентно условию:

$$E^{\perp}\cap R_+^{n+2}(1:m\cup\{n+2\},\ \emptyset)\neq\emptyset . \tag{7}$$

Известно (см. [I]), что супремум в задаче (I) равен $+\infty$ в том и только том случае, когда существует вектор y такой, что

$$yA=\mathbb{0},\ y_i\geq 0 \qquad \text{при } i\in 1:m,\ y_{n+2}=0,\ y_{n+1}>0 \qquad ,\text{ и}$$

в задаче есть допустимый вектор. Переформулируем эти условия для задачи (2). Существование вектора y с нужными свойствами эквивалентно условию: $E^{\perp}\cap\{x \mid x_i\geq 0,\ i\in 1:m;\ x_{n+2}=0;\ x_{n+1}>0\}\neq\emptyset$.

Если E – подпространство в общем положении, то это условие по свойству I равносильно следующему:

$$E^{\perp}\cap R_+^{n+2}(1:m\cup\{n+1\},\{n+2\})=\emptyset . \tag{8}$$

Опять по свойству I для подпространств в общем положении из выполнения условия (8) следует выполнение условия (7), и, значит, $val(E) = +\infty$ тогда и только тогда, когда выполнено (8). Теперь мы можем перейти к вычислению интересующих нас вероятностей. Заметим, что переход к ортогональным дополнениям подпространств стандартным образом (мера множества равна мере его прообраза) переносит меру с борелевских множеств многообразия $G(n+2, k+1)$ на борелевские множества $G(n+2, n-k+1)$, полученная мера μ инвариантна относительно замен знаков координат, и на множестве полной меры подпространство находится в общем положении. Вычислим математическое ожидание bas. Поскольку на множестве полной меры подпространство находится в общем положении, можно использовать условие (6) и лемму I. Имеем

$$M_p bas = \int\limits_{G(n+2,k+1)} bas(E)\,dP = \int\limits_{G(n+2,k+1)} \sum_{s} \chi(E^{\perp} \cap R_{+}^{n+2}((s \cap 1:m) \cup$$

$$\{n+2\},\bar{s}))\,dP = \int\limits_{G(n+2,n-k+1)} \sum_{s} \chi(E \cap R_{+}^{n+2}((s \cap 1:m) \cup \{n+2\},\bar{s}))\,d\mu =$$

$$= 2^{n-k-m} \binom{m}{k+m-n},$$

где суммирование ведется по всевозможным различным наборам индексов s из $1:(n+1)$ таким, что $(m+1):(n+1) \subset s$ и $|s| = k+1$. Аналогично, используя условия (7),(8) и лемму I, получаем

$$P\{val > -\infty\} = 2^{-m} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{m}{i},$$

$$P\{val = +\infty\} = 2^{-m} \sum_{i=0}^{n-k-1} \binom{m}{i},$$

$$P\{-\infty < val < +\infty\} = P\{val > -\infty\} - P\{val = +\infty\} = 2^{-m} \binom{m}{n-k}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства теоремы видно, что от меры достаточно требовать инвариантности относительно замен знаков координат только по координатам с номерами из набора $1:m \cup \{n+1\} \cup \{n+2\}$.

5. Основной пример

Мы будем рассматривать вещественные матрицы размерности $(k \geq 1,\ n \geq 1)$ вида $U = \{u_i^j \mid i \in 0:(n-1);\ j \in 0:(k-1);\ u_0^0 = 0\}$.

Обозначим $M(n, k)$ пространство таких матриц с естественной топологией.

Фиксируем целые неотрицательные числа n, m, k, p такие, что $n \geq m \geq p$, $n \geq k \geq p$, $m+k \geq n$, и рассмотрим задачу линейного программирования общего вида:

найти супремум функции $\sum_{i=1}^{n-p} x_i u_i^0$ (9а)

на векторах из R^{n-p}, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{i=1}^{n-p} x_i u_i^j \leq u_0^j \quad \text{при } j \in 1:p, \tag{9б}$$

$$\sum_{i=1}^{n-p} x_i u_i^j = u_0^j \quad \text{при } j \in (p+1):k, \tag{9в}$$

$$x_i \geq 0 \quad \text{при } i \in 1:(m-p), \tag{9г}$$

где $\mathcal{U} = \{u_i^j\}$ - матрица из $M(n-p+1, k+1)$. Приведем эту задачу к виду (I). Для этого введем новые переменные $x_{n-p+1}, \ldots, x_{n+2}$ и рассмотрим задачу эквивалентную исходной: найти супремум функции x_{n+1} на векторах из R^{n+2}, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{i=1}^{n-p} x_i u_i^0 - x_{n+1} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n-p} x_i u_i^j + x_{n-j+1} - u_0^j x_{n+2} = 0$$

при $j \in 1:p$,

$$\sum_{i=1}^{n-p} x_i u_i^j - u_0^j x_{n+2} = 0 \quad \text{при } j \in (p+1):k,$$

$$x_i \geq 0 \quad \text{при } i \in 1:(m-p) \cup (n-p+1):n, \quad x_{n+2} = 1.$$

Эта задача уже имеет вид (I) с точностью до нумерации координат.

Перенумеруем координаты так, чтобы координаты с номерами $m-p+1, \ldots, n-p$ имели бы соответственно номера $m+1, \ldots, n$, а координаты с номерами $n-p+1, \ldots, n$ соответственно номера $m-p+1, \ldots, m$, нумерацию остальных координат оставим без изменения. Матрицу полученной задачи обозначим $M_s(\mathcal{U})$. Итак, мы имеем задачу эквивалентную исходной:

$$\sup\{x_{n+1} \mid x \cdot M_s(\mathcal{U}) = \mathbb{0};\ x_i \geq 0,\ i \in 1:m;\ x_{n+2} = 1\}. \tag{I0}$$

Существуют различные определения допустимых базисов в задаче (9). Рассмотрим одно из них (см. [I]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Допустимой базисной парой в задаче (9) называются два набора индексов $\mathfrak{s}$ из $1:(n-p)$ и $\mathfrak{t}$ из $1:k$ такие, что выполнены следующие условия:

$$\bar{s}\subset 1:(m-p),\ \bar{t}\subset 1:p\ ,\ |s|=|t|,$$

система уравнений

$$\sum_{i\in s} x_i u_i^j = u_0^j \qquad \text{при} \quad j\in t,$$

$x_i = 0$ при $i\in\bar{s}$ имеет единственное решение y , и y является допустимым вектором.

Легко видеть, что допустимым парам в задаче (9) взаимнооднозначно соответствуют допустимые базисы в задаче (10). Соответствие задается сопоставлением паре s, t набора индексов

$$\{m-i+1 \mid i\in\bar{t}\}\ \cup (s\cap 1:(m-p))\cup (m+1):n\cup\{n+1\}\ .$$

Пусть в каждой точке u пространства $M(n-p+1, k+1)$ рассматривается задача (9). Обозначим $value$ функцию на $M(n-p+1, k+1)$ со значениями в расширенной вещественной прямой, равную в каждой точке супремуму задачи, рассматриваемой в ней.

Обозначим $basis$ функцию на $M(n-p+1, k+1)$, равную в каждой точке числу допустимых базисных пар задачи, рассматриваемой в ней.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть на борелевских множествах пространства $M(n+1, k+1)$ $(n\geqslant 0,\ k\geqslant 0)$ задана мера μ . Мы будем говорить, что μ инвариантна относительно замен знаков координат по столбцам, если для любого преобразования пространства φ_ε , соответствующего замене столбцов матриц с $\{u^i\}$ на $\{\varepsilon_i u^i\}$, где $\varepsilon_i=\pm 1$, $u^i=(u_0^i, u_1^i,\ldots, u_n^i)$ при $i=0,1,\ldots,k$, и любого измеримого множества c $\mu(c)=\mu(\varphi_\varepsilon(c))$. Аналогично определяется инвариантность относительно замен знаков координат по строкам.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть на борелевских множествах пространства $M(n-p+1, k+1)$ задана вероятностная мера P , инвариантная относительно замен знаков координат по столбцам и строкам, и мера множества матриц u таких, что каждые $k+1$ строк матрицы $M_s(u)$ линейно независимы, равна единице. Тогда

$$P\{value>-\infty\} = 2^{-m}\sum_{i=0}^{n-k}\binom{m}{i},$$

$$P\{value=+\infty\} = 2^{-m}\sum_{i=0}^{n-k-1}\binom{m}{i},$$

$$P\{-\infty < value < +\infty\} = 2^{-m}\binom{m}{n-k},$$

$$M_p\, basis = 2^{n-k-m}\binom{m}{k+m-n}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M^0 - множество матриц u в $M(n-p+1,\ k+1)$ таких, что каждые $k+1$ строк матрицы $M_s(u)$ линейно независимы. M^0 открыто и имеет полную меру. Поэтому достаточно рассматривать задачи на множестве M^0. Для любой матрицы $u \in M^0$ подпространство в $\mathbb{R}^{n+2}$ $E = Sub(M_s(u))$ по лемме 2 и свойству I является подпространством в общем положении. Число допустимых базисных пар в задаче (9) совпадает с числом допустимых базисов в задаче (2), и значения супремума у этих задач равны. Перенесем стандартным образом меру с борелевских множеств M^0 на борелевские множества $G(n+2,\ k+1)$. Легко видеть, что инвариантность меры на M^0 относительно замен знаков координат по столбцам и строкам гарантирует инвариантность полученной меры на $G(n+2,\ k+1)$ относительно замен знаков координат в $\mathbb{R}^{n+2}$. Применяя теорему, получаем ответ.

ЗАМЕЧАНИЕ. Достаточно требовать инвариантности меры на $M(n-p+1,\ k+1)$ относительно замен знаков координат только по строкам с номерами из набора $0:(m-p)$ и по столбцам с номерами из набора $0:p$. Так, что для задач с $p=0,\ m=n$ достаточно только инвариантности относительно замен знаков координат по строкам, а для задач с $p=k,\ m=p$ по столбцам.

Автор приносит глубокую благодарность А.М.Вершику за постановку задачи, постоянный интерес и помощь в работе.

Литература

I. Булавский В.А., Звягина Р.А., Яковлева М.А. Численные методы линейного программирования, М., 1977.

2. Вершик А.М. Несколько замечаний о бесконечномерных задачах линейного программирования. - УМН, 1970, т.XXУ, № 5, с.II7-I24.

3. Иванов Л.Д. Вариации множеств и функций., М., 1975.

4. Cover T., Efron B. Geometrical probability and random points in a hypersphere. - Ann.Math.Statist.,1967, v.38, p.213-220.

5. Wendel J.G. A problem in geometric probability. - Math. Scand., 1962, v.11, p.109-111.

6. L i e b l i n g T h o m a s M. On the number of iterations of the simplex method. Oper.Res.-Verfahren, 1973, v.17, p.248-264.
7. B o r g w a r d t K a r l - H e i n z. Zum Rechenaufwand von Simplexverfahren. - Oper.Res-Verfahren, 1978, v.3, p.83-97.
8. S c h l ä f l i L. Gesammelte Mathematiscne Abhaudlugen I.- Verlag Birkhauser, Basel, 1950.