Гомоморфизм sym: $\mathfrak{R} \to \mathrm{Sym}\,\mathfrak{R}$, *сопоставляющий произвольному оператору из* $\mathfrak{R}$ *его символ, определяется описанным отображением* $A \mapsto \mathrm{sym}\,A$ *образующих алгебры* $\mathfrak{R}$.

С л е д с т в и е. *Для того чтобы произвольный оператор* A *алгебры* $\mathfrak{R}$ *был* Ф-*оператором, необходимо и достаточно, чтобы его символ был не вырожден, т.е.*

$$\mathrm{sym}\,A \neq 0 \quad \text{на } Y, \qquad \det \mathrm{sym}\,A \neq 0 \quad \text{на } X.$$

Одесский государственный университет им. И.И. Мечникова

Поступило 16 XII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джураев А.* – ДАН, 1979, т. 249, № 1. 2. *Джураев А.* Дифференц. и интегральн. уравнения, краев. задачи, Тбилиси, 1979, с. 89–95. 3. *Комяк И.И.* – Докл. АН БССР, 1979, т. 23, № 1. 4. *Vasilevski N.L.* Institute of Math. Polish Academy of Science. Preprint № 199, 1979. 5. *Симоненко И.Б.* – Изв. АН СССР. Сер. матем., 1965, т. 29, № 3. 6. *Douglas R.G.* Banach algebra techniques in operator theory. Acad. Press, 1972. 7. *Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Кишинев: Штиинца, 1973. 8. *Васильев Н.Б.* – УМН, 1966, т. 21, вып. 1 (127). 9. *Hofmann K.H.* – Bull. Amer. Math. Soc., 1972, vol. 78, № 3.

УДК 513 МАТЕМАТИКА

А.М. ВЕРШИК, П.В. СПОРЫШЕВ

ОЦЕНКА СРЕДНЕГО ЧИСЛА ШАГОВ СИМПЛЕКС-МЕТОДА И ЗАДАЧИ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

(Представлено академиком Л.Д. Фаддеевым 28 III 1983)

1. Под задачами асимптотической интегральной геометрии мы понимаем здесь задачи о вычислении асимптотики средних значений тех или иных функционалов геометрического происхождения по многообразию Грассмана или по другим классическим однородным пространствам относительно инвариантной меры, когда размерность $n \to \infty$. Интересные примеры таких задач дает линейная алгебра, линейное программирование, выпуклая геометрия и др. Редукция, предложенная в 70-х гг. первым из авторов, состоит в отождествлении пространства задач линейного программирования, пространства многогранников или других объектов с многообразием Грассмана, а самих объектов – с проекцией (или сечением), см. п. 2, универсального объекта на данное подпространство (см. [1–3]).

В этой работе мы рассматриваем вопрос о среднем числе шагов уточненного симплекс-метода, когда число ограничений фиксировано, а число переменных растет; при этом число шагов есть функция, определенная (почти всюду) на многообразии Грассмана, а интегрирование ведется по инвариантной мере. Ответ (см. п. 4) состоит в том, что это *среднее асимптотически при* $n \to \infty$ *не превышает* $C_k (\ln n)^{k/2}$, где C_k – константа, k – число ограничений, n – число переменных. Обычными методами можно показать, что эта оценка реализуется на подавляющем (по мере) числе задач. Используемое далее уточнение симплекс-метода, аналогичное предложенному в работе [5], преследует бóльшую геометризацию рассуждений и описано в обычных терминах в п. 3. Недавно появилось сообщение [4] о работе С. Смейла, где анонсируется линейная по n оценка числа шагов, однако точная постановка задачи по Смейлу нам неизвестна.

2. Пространство задач линейного программирования. Пусть $A \in \mathrm{Hom}(R^m, R^k)$, $c \in R^m$, $b \in R^k$, $v \in \mathbf{R}$, $n = m + k$, $\widetilde{A} = \left(\frac{c \;\; v}{A \;\; b}\right) \in$ $\in \mathrm{Hom}(R^{m+1}, R^{k+1})$. Рассмотрим двойственные задачи линейного программирования (з.л.п.)

$$\text{(1)} \quad \inf \{\langle c, x\rangle - v \mid \; Ax \leqslant b, x \geqslant 0\};$$

$$\text{(2)} \quad \sup \{\langle b, p\rangle - v \mid \; A^* p \leqslant c, p \leqslant 0\}.$$

Рассмотрим пространство R^{n+2} и базис в нем $e_0, e_1, \ldots, e_{n+1}$. Сопоставим задачам (1) и (2), т.е. матрице $\widetilde{A}$, два взаимно ортогональных подпространства: $E = \{ (y, \widetilde{A}^* y) \mid y \in R^{k+1} \} \in G(n+2, k+1)$ и $E^{\perp} = \{ (\widetilde{A}z, -z) \mid z \in R^{m+1}\} \in G(n+2, m+1)$, где $G(p, q)$ – многообразие Грассмана всех линейных подпространств в R^p размерности q. Соответствие $\widetilde{A} \mapsto E$ есть биекция между з.л.п. и точками открытой всюду плотной карты в $G(n+2, k+1)$, состоящей из подпространств E, не содержащих ненулевых векторов, ортогональных e_i, $i = 0, 1, \ldots, k$. Наше соответствие реализует указанную во введении идею:

Предложение 1. *Задачи* (1) *и* (2) *естественным образом эквивалентны следующим задачам* (3) *и* (4) *соответственно:*

$$\text{(3)} \quad \inf \{ -x_0 \mid x \in E^{\perp}; x_i \geqslant 0, i \in 1, 2, \ldots, n;\; x_{n+1} = -1\};$$

$$\text{(4)} \quad \sup \{ x_{n+1} \mid x \in E; x_i \leqslant 0,\; i \in 1, 2, \ldots, n;\; x_0 = -1\},$$

т.е. задачам об экстремуме фиксированной линейной формы на пересечении E ($E^{\perp}$) с фиксированным аффинным конусом.

Аналогично можно спроектировать на E ($E^{\perp}$) конус $C = \{x \mid x_i \geqslant 0,\; i \in 1, 2, \ldots, n;$ $x_0 = x_{n+1} = 0\}$ и получить две задачи (P_E – ортопроектор):

$$\inf \{ \lambda \mid \; P_E C - \lambda P_E(e_0) - P_E(e_{n+1}) \ni 0\},$$

$$\sup \{ \lambda \mid \; -P_{E^{\perp}} C + \lambda P_{E^{\perp}}(e_{n+1}) - P_{E^{\perp}}(e_0) \ni 0\},$$

отвечающие другой известной интерпретации з.л.п. (1), (2). Здесь это задачи о крайней точке пересечения проекции фиксированного конуса с проекцией фиксированной прямой на E ($E^{\perp}$).

На многообразии Грассмана имеется выделенная мера – инвариантная относительно ортогональной группы, и дальнейшие рассмотрения будут связаны с ней. Ее можно считать мерой на матрицах $\widetilde{A}$ в силу отождествления (поскольку мера карты равна 1). Из результатов [6] следует, что при надлежащей нормировке матриц наша мера слабо сходится при $n \to \infty$ к гауссовой мере в пространстве бесконечных матриц с $k + 1$ строкой. Поэтому с асимптотической точки зрения мы изучаем з.л.п. с гауссовски распределенной матрицей. Это обстоятельство не используется далее, но показывает естественность нашей меры.

3. Уточненный симплекс-метод. Опишем вариант симплекс-метода, возникший первоначально из геометрических соображений (см. далее). Мы используем обычную символику и не связываемся с обозначениями п. 2.

Пусть $K = 1, 2, \ldots, k$, $N = 1, 2, \ldots, n$. Рассмотрим з.л.п.

$$\inf \{ c[N] \times x[N] \mid A[K, N] \times x[N] = b[K], x[N] \geqslant 0\}.$$

Будем считать, что K – допустимый базис, а $d[N]$ – характерристическая функция $N\setminus K$. Допустимый базис $J \subset N$ будем называть вполне допустимым, если существует такое $\alpha \geqslant 0$ и вектор $p([K], \alpha)$, что

$$A^*[J,K] \times p([K],\alpha) = c\,[J] + \alpha d\,[J],$$

$$A^*[N\setminus J,K] \times p([K],\alpha) \leqslant c\,[N\setminus J] + \alpha d\,[N\setminus J].$$

Начальный и оптимальный базисы вполне допустимы (первый – при большом α, второй – при $\alpha = 0$). Определение полной допустимости зависит от начального базиса через вектор d. Пусть J вполне допустим. Найдем векторы $p[K]$ и $t[K]$, обращая, как обычно, матрицу $A^*[J,K]$:

$$A^*[J,K] \times p\,[K] = c\,[J],\quad A^*[J,K] \times t\,[K] = d\,[J],$$

а затем векторы невязок

$$\Delta\,[N] = A^*[N,K] \times p\,[K] - c\,[N],$$

$$h\,[N] = A^*[N,K] \times t\,[K] - d\,[N].$$

Если $\Delta[N] \leqslant 0$, то базис J оптимален, в противном случае ищем минимальное $\alpha \geqslant 0$, при котором

$$\Delta\,[N\setminus J] + \alpha h\,[N\setminus J] \leqslant 0.$$

Индекс j, на котором реализуется равенство, вводится в базис; выводимый индекс ищется обычным образом. Очевидно, новый базис вполне допустим.

Предложение 2. *Описанная процедура определяет однозначно для почти всех з.л.п. алгорифм, осуществляющий перебор по вполне допустимым базисам от начального до оптимального (или последнего из возможных базисов, если значение задачи бесконечно).*

Следствие. *Число шагов уточненного симплекс-метода не превышает числа всех вполне допустимых базисов и почти всюду с ним совпадает.*

Как мы увидим, число вполне допустимых базисов в среднем много меньше числа всех допустимых базисов.

С геометрической точки зрения этот метод состоит в движении по тем вершинам множества допустимых планов, проекции которых на двумерную плоскость, определяемую парой функционалов $\langle c, x\rangle$, $\langle d, x\rangle$, являются вершинами проекции множества допустимых планов. Сходным образом описывается двойственная геометрическая формулировка. Фактически в п. 4 подсчитывается среднее число вершин этого многоугольника.

Вернемся к обозначениям п. 2 и обозначим через $G_+(K) \subset G(n+2, k+1)$ множество тех E, для которых $K = 1, 2, \ldots, k$ – допустимый базис в задаче (3) (или (1)), а через d – характеристическую функцию множества $N\setminus K$.

Предложение 3. Пусть $E \in G_+(K)$. *Для того чтобы $J \subset N$ был вполне допустим в задаче* (3), *необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

(5) $\quad E^\perp \cap \{x \mid x_i = 0, i \in J \cup \{0\}\} = 0;$

(6) $\quad E^\perp \cap \{x \mid x_i = 0, i \in N\setminus J;\ x_i \geqslant 0,\ i \in J;\ x_{n+1} = -1\} \neq \phi;$

(7) $\quad E \cap \{x \mid \exists \alpha \geqslant 0 : x_i = \alpha d_i,\ i \in J;\ x_i \leqslant \alpha d_i,\ i \in N\setminus J;\ x_0 = -1\} \neq \phi.$

Первое условие означает невырожденность сужения матриц, второе – допустимость J, третье – полную допустимость.

4. Основная теорема. Обозначим число всех вполне допустимых базисов задачи $E \in G_+(K)$ через $s(E)$. По следствию оно почти всюду равно числу шагов уточненного симплекс-метода.

Т е о р е м а. *Среднее число шагов уточненного симплекс-метода по грассмановой мере $\mu_{n,k}$ при условии, что данный (начальный) базис допустим, имеет оценку*

$$\mu_{n,k}(G_+(K))^{-1} \int\limits_{G_+(K)} s(E)\,d\mu_{n,k}(E) \leqslant C_k(\ln n)^{k/2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для простоты будем обозначать многообразие $G(n+2,\ k+1)$ и меру на нем $\mu_{n,k}$ соответственно через G и μ. Нормировка зависит лишь от k, поэтому оценим

$$M = \int\limits_{G_+(K)} s(E)\,d\mu(E) = \sum_J \int\limits_G \chi_1(E,K)\chi_1(E,J)\chi_2(E,J,K)\,d\mu(E), \tag{8}$$

где суммирование распространено на все $J \subset N$, $|J| = k$, а χ_1, χ_2 – характеристические функции (х.ф.) условий (6) и (7) соответственно (условие (5) выполнено почти всюду). Фиксируем J и обозначим символом $M(J)$ слагаемое в (8), отвечающее J. Тогда

$$M(J) \leqslant \int\limits_G \chi_3(E,J,K)\,d\mu(E),$$

где χ_3 – х.ф. условия, вытекающего из (7):

$$E \cap \{x \mid \exists\alpha\colon\ x_i = 0,\ i \in J\cap K;\ x_i = \alpha,\ i \in J\setminus K;$$
$$x_i \leqslant \alpha,\ i \in N\setminus(K\cup J)\} \equiv E\cap\Gamma \neq 0.$$

Пусть $j \in N\setminus(K\cup J) \equiv I$, Γ_j – грань конуса Γ такая, что на ней $x_j = \alpha$, $F_j = \operatorname{Lin}\Gamma_j$. Тогда

$$M(J) \leqslant \sum_j \int\limits_G \chi(E\cap\Gamma_j)\,d\mu(E),$$

где χ – х.ф. дополнения к множеству $\{0\}$, а суммирование ведется по всем $j \in I$. Так как $\dim(E\cap F_j) = 1$ почти всюду, то

$$\int\limits_G \chi(E\cap\Gamma_j)\,d\mu(E) = 2\tilde\mu(S(F_j)\cap\{y \mid y_i \leqslant \frac{1}{\sqrt{r+1}}\,\bar y,\ i\in I\setminus\{j\}\}),$$

где $S(F_j)$ – единичная сфера в F_j, $\tilde\mu$ – нормированная лебегова мера на ней, а y_i, $\bar y$ – координаты y в базисе в F_j, состоящем из ортов e_i при $i \in J\cup\{j\}$ и вектора $\bar e$ – нормированного вектора с равными координатами при $i \in (J\setminus K)\ \{j\}$ и нулевыми остальными, $r = |J\setminus K|$. Поскольку сферическая мера пересечения сферы с конусом равна стандартной гауссовой мере этого конуса, окончательно имеем

$$M(J) \leqslant \frac{2p}{(\sqrt{2\pi})^p}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\left(\int\limits_{-\infty}^{x/\sqrt{r+1}} e^{-y^2/2}dy\right)^{p-1}dx,$$

где $p = |I| = n-k-r$. Используя стандартные асимптотики функции ошибок* и формулы преобразования Лапласа, получим для последнего интеграла оценку

$$C_{k,r}\,p^{-r}(\ln p)^{r/2}.$$

Отсюда (сумма по J, $|J| = k$)

$$M \leqslant \sum_{|J\setminus K| = r} C_{k,r}\frac{(\ln p)^{r/2}}{p^r} \leqslant \sum_{r=0}^{k} C^1_{k,r}\binom{n-k}{r}\frac{(\ln n)^{r/2}}{n^r} \leqslant C_k(\ln n)^{k/2},$$

где $C_{k,r}$, $C^1_{k,r}$, C_k – константы, зависящие только от k и r.

---

* Авторы благодарят И.А. Ибрагимова, указавшего, что вспомогательная задача о гауссовских величинах, которая нам не понадобилась, сводится к указанному интегралу.

5. Замечания. 1) Ограничение классом задач с выбранным начальным планом отвечает обычной практике. Само нахождение начального плана, если он существует, есть снова з.л.п., это изменяет лишь константу в окончательной оценке.

2) Возможно, наш метод дает завышенную оценку по сравнению с обычным симплекс-методом; кроме того, более реальную оценку может дать рассмотрение задач с конечным решением. Специальные классы задач также предположительно приводят к иным оценкам (см. [7], стр. 162). Напомним, что равномерная по всем задачам оценка числа шагов тривиальна, т.е. совпадает с числом всех допустимых базисов.

3) Пространство выпуклых многогранников размерности k с не более чем n вершинами также отождествляется с $G(n, k)$, см. [2]. Это позволяет говорить в том же смысле о средних характеристиках (числе вершин, соседстве, комбинаторных свойствах и др.). Топология соответствующего разбиения $G(n, k)$ и оценка мер элементов представляет интерес для выпуклой геометрии.

Ленинградский государственный университет
им. А.А. Жданова

Поступило
4 IV 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вершик А.М.* – УМН, 1970, т. 25, № 5, с. 117–124. 2. *Вершик А.М., Черняков А.Г.* – ДАН, 1982, т. 263, № 3, с. 529–532. 3. *Спорышев П.В.* – Зап. науч. сем. ЛОМИ, 1983, т. 123, с. 208–220. 4. Nature, 1982, vol. 217, p. 39. 5. *Borgwardt K.H.* – Oper. Res. – Verfahren, 1978, Bd. 31, s. 83–97. 6. *Вершик А.М.* – ДАН, 1974, т. 218, № 4, с. 749–752. 7. *Данциг Дж.Б.* Линейное программирование, его приложения и обобщения. М., 1966.

УДК 513.6 МАТЕМАТИКА

М.Г. ЗАЙДЕНБЕРГ, В.Я. ЛИН

НЕПРИВОДИМАЯ ОДНОСВЯЗНАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ КРИВАЯ В $\mathbf{C}^2$ ЭКВИВАЛЕНТНА КВАЗИОДНОРОДНОЙ

(*Представлено академиком С.П. Новиковым 1 XII 1982*)

Пусть $p(x, y)$ – неприводимый полином на $\mathbf{C}^2$. Для $\zeta \in \mathbf{C}$ положим $\Gamma_\zeta = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 : p(x, y) = 0\}$. Через $\operatorname{Aut} \mathbf{C}^2$ обозначим группу всех полиномиальных автоморфизмов пространства $\mathbf{C}^2$. Известно (теорема Абъянкара – Моха – Сузуки [1–3]), что если кривая Γ_0 изоморфна $\mathbf{C}$, то $p(\alpha(x, y)) = x$ для некоторого $\alpha \in \operatorname{Aut} \mathbf{C}^2$. Естественно возникает вопрос: что можно сказать о неприводимом полиноме p, если кривая Γ_0 гомеоморфна $\mathbf{C}$ (или, что то же, односвязна)? Например, может ли такая кривая Γ_0 в $\mathbf{C}^2$ иметь более одной особенности? (Одну особенность имеют квазиоднородные кривые $x^k - y^l = 0$, $(k, l) = 1$, $k, l \geqslant 2$; в $\mathbf{C}^3$ существуют гомеоморфные $\mathbf{C}$ алгебраические кривые с любым числом особенностей.) Ранее нами было установлено [4], что если полином p неприводим и для некоторого $r > 0$ область $\{\,|p(x, y)| < r\,\}$ стягиваема по себе в точку с помощью голоморфных отображений, то существуют такой $\alpha \in \operatorname{Aut} \mathbf{C}^2$ и такое $c \in \mathbf{C}$, $|c| < r$, что полином $p(\alpha(x, y)) - c$ квазиоднороден. Это навело нас на мысль, что справедлива следующая теорема (анонсирована нами в [5]).

Теорема А. *Если полином p неприводим и кривая $\Gamma_0 = \{p(x, y) = 0\}$ односвязна, то существуют такой автоморфизм $\alpha \in \operatorname{Aut} \mathbf{C}^2$ и такие взаимно простые*