ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 26, 1986 № 6

УДК 519.852.61

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА СРЕДНЕГО ЧИСЛА ШАГОВ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СИМПЛЕКС-МЕТОДА

ВЕРШИК А. М., СПОРЫШЕВ П. В.

(Ленинград)

Доказывается анонсированная в [1] оценка среднего числа шагов параметрического варианта симплекс-метода для решения задач линейного программирования относительно некоторого естественного класса статистик на пространстве задач. Если число переменных в задаче равно n, а число ограничений типа равенства равно k, то для среднего числа шагов $s(n, k)$ справедлива оценка

$$s(n, k) \leqslant \frac{(k+1)^{1/2}}{2} (\pi \ln n)^{k/2} + O((\ln n)^{(k-1)/2}), \qquad n \to \infty.$$

Описывается важный сам по себе грассманов подход к подобным проблемам.

§ 1. Введение

Вопрос о том, какова скорость сходимости основного метода решения задач линейного программирования (л.п.) — симплекс-метода и его вариантов,— возникал еще в первых работах по этой проблеме (см. [2], [3]). При этом понималось, что, с одной стороны, метод практичен, но среди всех задач данного размера существуют такие, для которых симплекс-метод сводится к полному перебору допустимых базисных планов. Позже были построены соответствующие примеры (см., в частности, [4]). По-видимому, так же обстоит дело с любой модификацией симплекс-метода. Однако специалисты по вычислениям понимали, что эти явления не характерны и на типичных задачах симплекс-метод работает хорошо. Понадобилось время, и были найдены точные термины для правильной постановки вопроса и оправдания этого тезиса. В последние годы одновременно и независимо появилось несколько работ, в которых приводятся сходные (но не совпадающие) практические результаты. Более подробный анализ и исторические замечания см. в § 6.

Основной результат настоящей статьи базируется на имеющем независимый интерес представлении пространства задач линейного программирования как многообразия Грассмана и на идеях интегральной геометрии. Этот метод («грассманов подход») предложен А. М. Вершиком и состоит в следующем. Рассмотрим совокупность всех k-мерных подпространств n-мерного пространства, т. е. многообразие Грассмана; тогда с каждым из них можно связать задачу линейного программирования, а с его ортогональным дополнением — двойственную (см. § 2, формула (2.5)). Пространство задач превратилось в многообразие Грассмана; на нем имеется выделенная инвариантная мера, и число шагов симплекс-метода есть функционал на нем. Применяя методы интегральной геометрии, можно оценить асимптотику среднего числа шагов. Такова общая схема. Однако предварительно требуется найти точный геометрический смысл числа шагов.

Это — сложная задача: простого описания множества тех допустимых планов, которые встретятся в процедуре обычного симплекс-метода при заданном начальном плане, пока не имеется. Удобно использовать не канонический (или двойственный) симплекс-метод, а так называемый параметрический симплекс-метод (§ 3). Он позволяет описать перебираемые в методе допустимые планы как оптимальные для некоторых значений параметра в однопараметрическом семействе задач. Любопытно, что если воспользоваться геометрической интерпретацией Канторовича — Рубинштейна задач линейного программирования, то число шагов есть число специального вида граней некоторого вспомогательного многогранного множества (§ 5). Похожая задача рассматривалась в выпуклой интегральной геометрии. Но и в таком виде функционал остается громоздким; упрощение достигается, если вместо параметрически оптимальных планов перечислять параметрически двойственно допустимые (п.д.д.) планы. Это дает верхнюю оценку для числа шагов, асимптотика нового функционала выражается через асимптотику сравнительно несложного интеграла (см. § 4), что дает окончательный результат.

Набросок этого доказательства приведен в [1]; ниже он несколько усовершенствован и использован иной параметрический метод. Почти одновременно с [1] появилась оценка Смейла [5]. Хотя в ней высказаны более широкие предположения относительно статистики, но сам метод, как показано в [6], более груб и не может дать той же степени $\ln n$, какая приводится в настоящей статье (см. § 6). В работе [7] оценка лучше, но для другого параметрического метода (параметр входит полиномиально, а не линейно). Задача об оценке числа шагов канонического симплекс-метода остается нерешенной. В то же время в настоящей статье для данного параметрического метода оценка по порядку, по-видимому, близка к точной.

§ 2. Универсальные формулировки двойственных задач. Грассманово пространство задач

Начнем с обычной постановки двойственных задач линейного программирования (л.п.) в канонической форме:

(2.1а) $\max\{\langle c, x\rangle \mid x\in R^m,\ Ax\leqslant b,\ x\geqslant 0\}$,

(2.1б) $\min\{\langle b, p\rangle \mid p\in R^k,\ A^{\mathrm{T}}p\geqslant c,\ p\geqslant 0\}$.

Здесь A — матрица размера $k\times m$, $b\in R^k$, $c\in R^m$, т — знак транспонирования, $\langle\,,\rangle$ — скалярное произведение в R^m и R^k, неравенства понимаются в смысле покоординатного упорядочения. В дальнейшем m и k фиксированы; $n=m+k$.

Перейдем к другой записи задач (2.1), более удобной для дальнейшего. Рассмотрим пространство R^{n+2} с фиксированным базисом $e^0, \ldots, e^{n+1}$, нумеруемым числами $0, 1, \ldots, n+1$; вложим R^k и R^m в R^{n+2} как координатные подпространства, соответственно, с номерами $1, 2, \ldots, k$ и $k+1, \ldots, n$. По тройке (A, b, c) из (2.1) построим матрицу D размера $(k+1)\times(n+2)$:

$$D=D[\{0,1,\ldots,k\},\{0,1,\ldots,n+1\}]=\left\|\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix}1&0&\ldots&0\end{matrix} & -c^{\mathrm{T}} & 0\\ \hline \begin{matrix}0&1&\ldots&0\\ &&\ddots&\\ 0&0&\ldots&1\end{matrix} & A & b\end{array}\right\|, \tag{2.2}$$

и рассмотрим задачи л.п. в R^{n+2}:

(2.3а) $\max\{x_0 | x \in R^{n+2};\ Dx=0;\ x_i \geqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, n;\ x_{n+1}=-1\}$,

(2.3б) $\min\{y_{n+1} | y=D^{\mathrm{T}}z;\ z \in R^{k+1};\ y_i \geqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, n;\ y_0=1\}$.

Очевидно, что (2.3) и (2.1) идентичны. Однако постановка (2.3) совершенно симметрична: и прямая, и двойственная задачи ставятся в одном и том же пространстве, а ограничения в обеих задачах — типа равенства.

Будем рассматривать матрицу D как матрицу оператора из R^{n+2} в R^{k+1}, обозначаемого той же буквой D, а D^{T} — как матрицу сопряженного оператора D^* из R^{k+1} в R^{n+2} (поскольку базис фиксирован, то R^p отождествляется с сопряженным пространством).

Переформулируем (2.3), обозначив через $\operatorname{Ker} F$ ядро оператора F, через $\operatorname{Im} F$ — образ:

(2.4а) $\max\{x_0 | x \in \operatorname{Ker} D;\ x_i \geqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, n;\ x_{n+1}=-1\}$,

(2.4б) $\min\{y_{n+1} | y \in \operatorname{Im} D^*;\ y_i \geqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, n;\ y_0=1\}$.

Теперь можно отказаться от специального вида (2.2) матрицы D и считать ее совершенно произвольной. В дальнейшем нужно лишь, чтобы определитель подматрицы $\bar{D}=D[\{0, 1, \ldots, k\}, \{0, 1, \ldots, k\}]$ был отличен от нуля. В этом случае умножение D слева на $\bar{D}^{-1}$ даст форму (2.2). *Матричным пространством задач л.п.* вида (2.1) порядка $k \times m$ будем называть множество $\mathscr{D}$ всех матриц D размера $(k+1)\times(n+2)$ с ненулевым минором указанного вида. Такое пространство задач лишь формально отличается от пространства троек (A, b, c), рассматриваемых обычно. Преимущества формы (2.4) будут видны далее, а сейчас сделаем следующий шаг в направлении инвариантной формулировки. Обозначим через $E_D=E=\operatorname{Im} D^*$, $E^D=\operatorname{Ker} D$; и то, и другое есть подпространство в R^{n+2}, причем $E^D=E_D{}^{\perp}=E^{\perp}$, где знак $\perp$ — ортогональное дополнение относительно естественного скалярного произведения в R^{n+2}. Теперь (2.3) можно переписать так, обозначив конус $\{x \in R^{n+2} | x_i \geqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, n\}=Q$:

(2.5а) $\max\{x_0 | x \in E^{\perp} \cap Q,\ x_{n+1}=-1\}$,

(2.5б) $\min\{y_{n+1} | y \in E \cap Q,\ y_0=1\}$.

Здесь E можно считать совершенно произвольным $(k+1)$-мерным подпространством в R^{n+2}. Обе задачи имеют теперь одинаковую форму и симметричны относительно перехода от E к $E^{\perp}$ с заменой $x_0 \to -y_{n+1}$, $x_{n+1} \to -y_0$. Можно сказать, что (2.5) — ограничение на подпространства E, $E^{\perp}$, соответственно, тривиальных универсальных задач

$$\max\{z_0 | z \in Q,\ z_{n+1}=-1\}\quad (=\infty),\ \min\{z_{n+1} | z \in Q,\ z_0=1\}\quad (=-\infty).$$

Напомним, что множество всех q-мерных подпространств p-мерного пространства называется многообразием Грассмана и обозначается $G(p, q)$. Задачи (2.5) назовем грассмановой постановкой двойственных задач л.п. Теперь уже параметр задачи есть подпространство E, т. е. элемент $G(n+2, k+1)$ (или $E^{\perp}$, т. е. элемент $G(n+2, m+1)$). *Грассмановым пространством задач л.п.* будем называть многообразие Грассмана, имея в виду соответствие подпространств и задач л.п. в форме (2.5). При переходе от матричного к грассманову пространству задач отождествляем все матрицы D с одним и тем же ядром (или образом D^*). Это отождествление не является существенным, так как любые две матрицы D с общим ядром отличаются на неособое преобразование в образе. Однако при изучении тех или иных методов и свойств задач л.п. необходимо проверять корректность по отношению к этому отождествлению. В § 3 это будет сделано для параметрического метода. Подчеркнем важность формулировки (2.5) для общей теории задач л.п. Аналогичный подход, при котором задача (например, л.п.) или геометрический объект (например, многогранник) рассматриваются как ограничение (или проекция, см. § 5) универсальной задачи или геометрического объекта, называется *грассмановым подходом.* Он полезен в задачах линейной алгебры, выпуклого анализа и т. п. (ср. [8]).

Обратимся к статистике на пространстве задач. Обычно рассматривают ту или иную статистику в пространстве наборов (A, b, c) (см. (2.1)). Можно перенести ее на матрицы D (см. (2.2)) или прямо вводить на $\mathscr{D}$, имея в виду постановки (2.3) и (2.4). При переходе к грассманову пространству задач можно задавать статистику прямо на $G(n+2, k+1)$. В то же время на $G(p, q)$ имеется некоторая выделенная мера, которая будет использоваться далее. Напомним ее описание.

На многообразии Грассмана $G(p, q)$ транзитивно действует ортогональная группа $O(p)$, и при этом $G(p, q)$ можно представлять как однородное пространство группы $O(p)$. Известно, что на $G(p, q)$ существует единственная $O(p)$-инвариантная нормированная мера, которую будем называть грассмановой и обозначать $\mu_{p,q}$. Единственность вытекает из единственности меры Хаара на $O(p)$. Выражение для меры $\mu_{p,q}$ (правда, с иной нормировкой) можно найти, например, в [9]. Для нас важно следующее простое

Предложение 1. *Пусть φ — отображение пространства матриц размера $q\times p$ ранга q в многообразие Грассмана $G(p, q)$:*

$$\varphi(D)=\operatorname{Im} D^*.$$

Тогда всякая вероятностная мера на пространстве матриц, инвариантная относительно умножения справа на любую ортогональную матрицу порядка p, переходит при отображении φ в грассманову меру.

Доказательство предложения с очевидностью следует из единственности ортогонально-инвариантной меры.

Следствие 1. Всякая вероятностная мера в пространстве матриц $\mathscr{D}$, для которой строки статистически независимы и распределение каждой из них ортогонально инвариантно, переходит под действием φ в грассманову меру.

В связи с этим основной результат настоящей статьи (см. § 4) справедлив для любой такой меры на пространстве матриц.

§ 3. Геометрия параметрического метода

Для оценки числа шагов любого итеративного процесса нужно сначала обозримым образом описать это число, как функцию от данных задачи и начального приближения. К сожалению, простого описания этой функции для канонического симплекс-метода пока нет. Все имеющиеся сейчас теоретические оценки основываются на так называемых параметрических симплекс-методах. Преимущество их в том, что базисные планы, которые могут встретиться в процессе итераций, допускают простое описание: они являются оптимальными для некоторой вспомогательной задачи с параметром. Здесь используется параметрический метод Лемке, называемый также «самодвойственным алгоритмом Данцига» [3] (подробно см. [10]). В [1] использовался другой, менее удобный параметрический метод.

Введем параметр $t\in\mathbf{R}_+$ в задачу (2.1а):

$$(3.1)\qquad \max\{\langle c-tq_m, x\rangle \mid x\in R^m,\ Ax\leqslant b+tq_k,\ x\geqslant 0\},$$

где $q_m=(1,\dots,1)^{\mathrm{T}}\in R^m$, $q_k=(1,\dots,1)^{\mathrm{T}}\in R^k$. Метод Лемке состоит в последовательном пересмотре оптимальных планов в задаче (3.1) при t, меняющемся от $+\infty$ до 0. При $t=0$ получаем задачу (2.1а): если t достаточно велико, то оптимальный план есть $x=0$ и его можно взять в качестве начального. Процесс перехода по оптимальным планам в (3.1) от одного t к меньшему аналогичен симплекс-процедуре (см. [10]). В конце концов либо получаем при $t=0$ оптимальный план в (2.1а), либо устанавливаем его несуществование, если при некотором $t>0$ оптимального плана нет. Разумеется, параметр можно вводить и более сложным образом (см. [7] и § 6 ниже). Наиболее общий способ в некотором смысле должен быть универсальной деформацией для задач (2.1).

Введение параметра t делает матрицу D из (2.2)—(2.4) зависящей линейно от t:

$$D(t)=D+\bar{D}R(t),\qquad R(t)=\left\|\begin{array}{c|c|c} 0 & \begin{array}{c} tq_m{}^{\mathrm{T}} \\ \hline 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \hline tq_k \end{array}\end{array}\right\|$$

(если D имеет вид (2.2), то $\bar{D}=\mathrm{Id}$). Получено однопараметрическое семейство задач, которое записывается в виде, аналогичном (2.4):

$$(3.2\text{а})\qquad \max\{x_0 \mid x\in\operatorname{Ker}D(t);\ x_i\geqslant 0,\ i=1,2,\dots,n;\ x_{n+1}=-1\},$$

$$(3.2\text{б})\qquad \min\{y_{n+1} \mid y\in\operatorname{Im}D(t)^*;\ y_i\geqslant 0,\ i=1,2,\dots,n;\ y_0=1\}.$$

Введем обозначения $N=\{1,2,\dots,n\}$, $K=\{1,2,\dots,k\}$, $M=N\diagdown K$, $\mathscr{B}=\{J\subset N \mid |J|=k,\ J\neq K\}$.

Ниже приводятся определения, необходимые для работы с параметрическим методом. Определения даны для задачи (2.3а). Переформулировки их для задач (2.1), (2.4), (2.5) очевидны, поэтому при необходимости введенные понятия будут использоваться применительно и к ним.

Набор $J\in\mathscr{B}$ назовем *базисным* для задачи (2.3), если ограничение $\operatorname{Ker}D\,(=E^{\perp})\cap\{x\in R^{n+2} \mid x_i=0,\ i\in\{1,2,\dots,n+1\}\diagdown J\}=\{0\}$. Это определение равносильно обычному.

Базисный набор называется *допустимым* (или *двойственно допустимым*), если существует вектор $x\in R^{n+2}$ (соответственно, $y\in R^{n+2}$), удовлетворяющий ограничениям задачи (2.3а), причем $x_i=0$ для $i\in N\diagdown J$ (соответственно, удовлетворяющий ограничениям (2.3б), причем $y_j=0$ для $j\in J$). Базисный набор, одновременно допустимый и двойственно допустимый, называется оптимальным.

Базисный набор для задачи (2.3а) называется *параметрически допустимым* (п.д.) (соответственно, *параметрически двойственно допустимым* и *параметрически оптимальным* (в [1] — вполне допустимым)), если существует $t\geqslant 0$, при котором он является допустимым для задачи (3.2а) (соответственно, двойственно допустимым и оптимальным).

Аналогичные определения можно дать и для других параметрических методов.

Метод Лемке для исходной задачи (2.3а) состоит в последовательном по t переборе параметрически оптимальных наборов. Эти наборы, являясь базисными, не являются, вообще говоря, ни допустимыми, ни двойственно допустимыми (в чем некоторое неудобство метода). Набор K является параметрически оптимальным (при больших t), его будем брать в качестве начального; оптимальный набор является параметрически оптимальным при $t=0$.

Не всякий параметрически оптимальный набор обязательно встретится на некотором шаге метода Лемке; именно так будет в случае вырождений. Однако имеет место следующее

Предложение 2. *Для открытого всюду плотного множества в пространстве данных задачи* (2.3а) *параметрическая оптимальность набора эквивалентна появлению его на некотором шаге метода Лемке.*

Доказательство. Достаточно заметить, что для открытого, всюду плотного множества в пространстве данных задач (2.3а) параметрическое семейство задач (3.2а) таково, что оптимальный план единствен на всем промежутке изменения параметра t, за исключением конечного числа точек, а в этих точках оптимальных базисных планов ровно два: оптимальный при меньших значениях t и оптимальный при больших.

Следствие 2. Для почти всех задач (2.3а) относительно меры Лебега на пространстве матриц $\mathcal{D}$ число шагов в методе Лемке равно числу параметрически оптимальных наборов.

Опишем теперь п.д.- и п.д.д.-наборы явно.

Предложение 3. *Пусть $J\in\mathcal{B}$ — базисный набор. Набор J допустим в* (3.2а) *тогда и только тогда, когда*

$$\text{(3.3)}\qquad \operatorname{Ker} D\cap\{x\in R^{n+2}\,|\,x_i=0,\ i\in M\setminus J;\ x_i=-t,\ i\in K\setminus J;$$
$$x_i\geqslant 0,\ i\in M\cap J;\ x_i\geqslant -t,\ i\in K\cap J;\ x_{n+1}=-1\}\neq\varnothing.$$

Набор J двойственно допустим в (3.2а) *тогда и только тогда, когда*

$$\text{(3.4)}\qquad \operatorname{Im} D^*\cap\{y\in R^{n+2}\,|\,y_i=0,\ i\in K\cap J;\ y_i=-t,\ i\in M\cap J;\ y_i\geqslant 0,$$
$$i\in K\setminus J;\ y_i\geqslant -t,\ i\in M\setminus J;\ y_0=1\}\neq\varnothing.$$

Одновременное выполнение условий (3.3) и (3.4) при одном и том же $t\geqslant 0$ равносильно параметрической оптимальности.

Доказательство сводится к проверке определения, примененной к задаче (3.2а).

Следствие 3. Свойство набора быть п.д. или п.д.д. зависит лишь от ядра D. Поэтому такие свойства корректны относительно перехода к грассмановой постановке задачи (2.5).

Дадим прямую геометрическую интерпретацию п.д.д.-наборов. Заметим, что аналогичное условие можно дать для п.д.-наборов. Однако интерпретация одновременного выполнения этих условий (т. е. параметрической оптимальности) довольно громоздка из-за связующего параметра t. Удобно ввести следующие обозначения. Каждому набору индексов $I\subset\{0, 1, \ldots, n\}$ такому, что $M\cap I\neq\varnothing$, сопоставим следующее подпространство в R^{n+2}:

$$L(I)=\{z\in R^{n+2}\,|\,z_i=0,\quad i\in\{0, 1, \ldots, k\}\cap I;\quad z_i=z_j,\ i, j\in M\cap I\}.$$

В подпространстве $L(I)$ фиксируем ортонормированный базис, состоящий из ортов стандартного базиса e^i, $i\in\{0, 1, \dots, n+1\}\setminus I$, и вектора

$$\bar e(I\cap M)=r^{-1/2}\sum_{i\in I\cap M} e^i, \text{ где } r=|I\cap M|.$$

Координаты вектора $z\in L(I)$ в указанном базисе будем, соответственно, обозначать z_i, $i\in\{0, 1, \dots, n+1\}\setminus I$, и $\bar z$. Введем конус в $L(I)$:

$$C(I)=\{z\in L(I)\,|\,z_i>0,\quad i\in\{0, 1, \dots, k\}\setminus I;\quad z_i>r^{-1/2}\bar z,$$
$$i\in M\setminus I;\ \bar z<0\}.$$

Из предложения 3 получаем

Предложение 4. *Пусть* $J\in\mathscr{B}$. *Тогда для почти всех задач* (2.3а) *относительно меры Лебега на пространстве матриц* $\mathscr{D}$ *следующие утверждения равносильны:*

а) *набор J есть п. д. д.-набор;*

б) $\operatorname{Im} D^*\cap C(J)\neq\varnothing$.

Итак, параметрическая двойственная допустимость набора J эквивалентна непустоте пересечения подпространства $\operatorname{Im} D^*$ и конуса $C(J)$.

Из предложения 4 сразу получаем

Следствие 4. Пусть $J\in\mathscr{B}$. Тогда для почти всех $E\in G(n+2, k+1)$ (по грассмановой мере) следующие утверждения равносильны:

а) набор J есть п. д. д.-набор в задаче (2.5а);

б) $E\cap C(J)\neq\varnothing$.

Подытожим результаты этого параграфа в следующей теореме. Обозначим число шагов в методе Лемке для задачи (2.3а), или, что то же самое, в задачах (2.4) или (2.5) (в первых двух случаях $E=\operatorname{Im} D^*$), через $s(E)$.

Теорема 1. *Для почти всех* $E\in G(n+2, k+1)$ *(по грассмановой мере)*

$$s(E)\leqslant|\{J\in\mathscr{B}\,|\,E\cap C(J)\neq\varnothing\}|.$$

Доказательство. Число шагов для почти всех E — это число параметрически оптимальных наборов (следствие 2). Но всякий такой набор является п. д. д.-набором по определению. Применяя следствие 4, получаем нужный результат для задачи (2.5). Но, по следствию 3, число шагов в задачах (2.3) и (2.4) такое же, как в (2.5).

§ 4. Основная теорема

Найдем асимптотику среднего по ортоинвариантной (грассмановой) мере на многообразии Грассмана числа п. д. д.-наборов, что, по теореме 1, даст оценку числа шагов метода Лемке. Обозначим число п. д. д.-наборов, отличных от K, для E в задаче (2.5а) через $s_1(E)$. Интегрирование по грассмановой мере обозначается через

$$\int\limits_{G(p,\,q)}\dots d\theta,\qquad s_1(n, k)\equiv\int\limits_{G(n+2,\,k+1)} s_1(E)\,dE.$$

Теорема 2. *При фиксированном k и $n\to\infty$ имеем*

$$s_1(n, k)=\frac{(k+1)^{1/2}}{2}(\pi\ln n)^{k/2}+O((\ln n)^{(k-1)/2}).$$

Доказательство. Пусть $J \in \mathscr{B}$. Введем в R^{n+2} подпространство

$$L^0(J) = \{z \in R^{n+2} \mid z_i = 0, \quad i \in J\}$$

и конус

$$C^0(J) = \{z \in L^0(J) \mid z_i > 0, \quad i \in \{0, 1, \dots, n\} \setminus J\}.$$

Пусть χ — функция множеств: $\chi(\alpha) = 1$, если $\alpha \neq \varnothing$, и $\chi(\varnothing) = 0$. Приведем удобную формулу для функции s_1.

Лемма 1. *Для почти всех подпространств $E \in G(n+2, k+1)$ относительно меры $\mu_{n+2, k+1}$ верно соотношение*

$$s_1(E) = \sum_{J \in \mathscr{B}} \chi(E \cap C(J)) =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{J \in \mathscr{B}} \Big(\sum_{j \in \{0, 1, \dots, n\} \setminus J} \chi(E \cap C(J \cup \{j\})) + \chi(E \cap C^0(J)) \Big).$$

Доказательство. Первое равенство в лемме 1 прямо получается из следствия 4. Фиксируем набор $J \in \mathscr{B}$ и покажем, что для почти всех E

$$\chi(E \cap C(J)) = \frac{1}{2} \Big[\sum_{j \in \{0, 1, \dots, n\} \setminus J} \chi(E \cap C(J \cup \{j\})) + \chi(E \cap C^0(J)) \Big], \tag{4.1}$$

откуда и будет вытекать справедливость второго равенства в лемме 1. Для почти всех E (по грассмановой мере)

$$\dim(E \cap L(J)) = \dim E + \dim L(J) - (n+2) = 2.$$

Следовательно, конус $E \cap C(J)$ двумерен. Очевидно, что у него почти всегда ровно две одномерные грани, являющиеся пересечениями E с гранями старшей размерности конуса $C(J)$. Гранями старшей размерности конуса $C(J)$ являются конусы $C(J \cup \{j\})$, $j \in \{0, 1, \dots, n\} \setminus J$, и конус $C^0(J)$. Итак, формула (4.1) доказана.

По лемме 1,

$$s_1(n, k) = \frac{1}{2} \sum_{J \in \mathscr{B}} \Big[\sum_{j \in \{0, 1, \dots, n\} \setminus J} P(J \cup \{j\}) + P^0(J) \Big], \tag{4.2}$$

где

$$P(I) = \int_{G(n+2, k+1)} \chi(E \cap C(I))\, dE, \quad I \subset \{0, \dots, n\}, \quad M \cap I \neq \varnothing,$$
$$P^0(J) = \int_{G(n+2, k+1)} \chi(E \cap C^0(J))\, dE, \qquad J \in \mathscr{B}.$$

Фиксируем набор индексов $J \in \mathscr{B}$ и индекс $j \in \{0, 1, \dots, n\} \setminus J$. Пусть $I = J \cup \{j\}$. Вычислим интегралы $P(I)$ и $P^0(J)$. Заметим, что функция $\chi(E \cap C(I))$ зависит только от прямой $E \cap L(I)$ (а не от самого подпространства E). Применяя формулу Чженя (см. [9, с. 207]), имеем

$$P(I) = \int_{\mathrm{RP}(L(I))} \chi(\theta \cap C(I))\, d\theta,$$

где $\mathrm{RP}(L)$ — проективное пространство, ассоциированное с подпространством L, т. е. пространство прямых в L (для $L = R^p$ стандартное обозначение RP_p), а интегрирование ведется по соответствующей ортоинвариантной мере. Аналогично,

$$P^0(J) = \int\limits_{\mathrm{RP}(L^0(J))} \chi(\theta \cap C^0(J))\, d\theta.$$

Далее воспользуемся следующей леммой.

Лемма 2. *Пусть C — открытый выпуклый конус в R^p, $C \neq R^p$, μ — любая вероятностная мера на R^p, инвариантная относительно действия ортогональной группы, причем* $\mu(\{0\})=0$. *Тогда*

$$\int\limits_{\mathrm{RP}_p} \chi(\theta \cap C)\, d\theta = 2\mu(C),$$

где интегрирование ведется по ортоинвариантной нормированной мере μ_p.

Доказательство. Эта лемма является очевидным следствием ортоинвариантности мер μ и μ_p.

Применим лемму 2 для вычисления $P(I)$. В качестве меры μ возьмем гауссову меру в $L(I)$, т. е. меру с плотностью

$$g(z) = [(2\pi)^{-1/2}]^{m+2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\sum_{i \in \{0, 1, \dots, n+1\} \setminus I} z_i^2 + \bar{z}^2\right)\right],$$

где $z_i (i \in \{0, 1, \dots, n+1\} \setminus I)$, $\bar{z}$ — координаты вектора z в фиксированном в $L(I)$ ортонормированном базисе (см. конец § 3). Тогда

$$P(I) = 2 \int\limits_{C(I)} g(z)\, dz, \tag{4.3}$$

где интегрирование ведется по мере Лебега в $L(I)$.

Пусть

$$P_r = 2\,[(2\pi)^{-1/2}]^{m+2} \int\limits_{\Omega} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m+2} x_i^2\right) dx,$$

где $1 \leq r \leq m+1$, $\Omega = \{x \in R^{m+2} \mid x_1 < 0;\ x_i > 0,\ i=2, \dots, r+1;\ x_i > r^{-1/2} x_1,\ i = r+2, \dots, m+1\}$. Из определения конуса $C(I)$ и из формулы (4.3) следует

Лемма 3. *Верно соотношение* $P(I) = P_r$, *где* $r = |I \cap M|$.

Для $P^0(J)$ вычисления проводятся аналогично. Из леммы 2 с гауссовой мерой в качестве меры μ и из формулы

$$(2\pi)^{-1/2} \int\limits_0^\infty e^{-t^2/2}\, dt = 1/2 \tag{4.4}$$

вытекает

Лемма 4. *Имеет место формула* $P^0(J) = 2^{-m}$.

Фиксируем r такое, что $1 \leq r \leq k+1$, и вычислим асимптотику P_r. Проинтегрировав по всем переменным, кроме x_1, и воспользовавшись формулой (4.4), получим

$$P_r = 2^{-r+1} (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^0 e^{-t^2/2} [\Phi(r^{-1/2} t)]^{m-r}\, dt, \tag{4.5}$$

где

$$\Phi(v) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_v^\infty e^{-t^2/2}\, dt.$$

Лемма 5. *При фиксированном $r\geqslant 1$ и $n\to\infty$ для интеграла*

$$I(r,n)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{0}e^{-t^2/2}[\Phi(r^{-1/2}t)]^n\,dt$$

справедлива следующая асимптотическая формула:

$$I(r,n)=r^{1/2}(r-1)!\,n^{-r}(4\pi\ln n)^{(r-1)/2}[1+O(\ln n)^{-1})].$$

Замечание 1. Асимптотика интеграла $I(r,n)$ уже вычислялась по сходному поводу в работе [11, § 5], но вычисления проводились иначе.

Доказательство. Сделав замену переменной $v=r^{-1/2}t$, получим

$$I(r,n)=\left(\frac{r}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{0}e^{-rv^2/2}[\Phi(v)]^n\,dv.$$

Этот интеграл является интегралом Лапласа. Функция $\Phi(v)$ меньше 1 и $\Phi(v)\to 1$ при $v\to-\infty$. Сделаем замену переменной так, чтобы поместить в 0 точку максимума функции, возводимой в степень n. Полагая $u=1-\Phi(v)$, имеем

$$I(r,n)=r^{1/2}\int_{0}^{1/2}e^{-(r-1)v^2/2}(1-u)^n\,du, \tag{4.6}$$

где $v=v(u)$ — функция, определяемая из уравнения $u=1-\Phi(v)$. Заметим, что $v(u)\to-\infty$ при $u\to 0$. Асимптотическое разложение для функции ошибок при $v\to-\infty$ дает (см. [12, с. 119])

$$u=1-\Phi(v)=(2\pi)^{-1/2}\frac{e^{-v^2/2}}{-v}[1+O(v^{-2})].$$

Прологарифмировав это равенство, получим

$$\ln u=-\frac{v^2}{2}-\ln(-v)-\ln[(2\pi)^{1/2}]+\ln[1+O(v^{-2})],$$

откуда следуют выражения для v^2 и v, и подставим их в (4.6). Имеем

$$I(r,n)=r^{1/2}(4\pi)^{(r-1)/2}\int_{0}^{1/2}u^{r-1}(-\ln u)^{(r-1)/2}(1-u)^n[1+O(v^{-1})]\,du.$$

Сделав замену переменной $t=-\ln(1-u)$ и заметив, что $u=1-e^{-t}=t+O(t^2)$, $t\to 0$, получим

$$I(r,n)=r^{1/2}(4\pi)^{(r-1)/2}\int_{0}^{-\ln 1/2}t^{r-1}(-\ln t)^{(r-1)/2}e^{-t(n+1)}\times$$
$$\times[1+O(t^2)][1+O(v^{-1})]\,dt.$$

Для выяснения асимптотики последнего интеграла воспользуемся леммой Ватсона для логарифмической особенности.

Лемма 6 (см. [13, с. 46]). *Пусть $\gamma,\lambda\in\mathbf{R}$, $\beta>0$, функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема при малых $x\geqslant 0$ и непрерывна при $0\leqslant x\leqslant a<\infty$. Тогда при $\lambda\to\infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$\int_0^a x^{\beta-1}|\ln x|^{\gamma}e^{-\lambda x}f(x)\,dx=\lambda^{-\beta}(\ln\lambda)^{\gamma}\Gamma(\beta)f(0)[1+O((\ln\lambda)^{-1})].$$

Применив эту лемму, получим утверждение леммы 5. Воспользовавшись леммами 3, 4, 5 и формулами (4.2), (4.5), получим утверждение теоремы 2. Прямо из теоремы 2 следует

Теорема 3. *Среднее число $s(n, k)$ шагов в методе Лемке для задачи* (2.5а) *по ортоинвариантной мере $\mu_{n+2,k+1}$ на многообразии $G(n+2, k+1)$ при фиксированном k и $n\to\infty$ имеет асимптотическую оценку*

$$(4.7)\qquad s(n, k)\leqslant{}^1/_2(k+1)^{1/2}(\pi\ln n)^{k/2}+O((\ln n)^{(k-1)/2}).$$

Из теоремы 2 и предложения 1 может быть получена

Теорема 4. *Пусть на пространстве матриц размера $(k+1)\times(n+2)$ ранга $k+1$ задана вероятностная мера μ, инвариантная относительно умножения справа на любую ортогональную матрицу порядка $n+2$. Тогда среднее число $s(n, k)$ шагов в методе Лемке для задачи* (2.3а) *по мере μ на указанном пространстве матриц при фиксированном k и $n\to\infty$ имеет асимптотическую оценку* (4.7).

Замечание 2. Задача, решенная в этом параграфе, имеет несколько любопытных переформулировок, из которых приведем две:

1) вероятностная: если $\xi_1,\ldots,\xi_n$ — независимые случайные (0, 1)-гауссовские величины, то какой должна быть последовательность β_n, чтобы

$$\mathbb{P}\left\{n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\geqslant\frac{1}{\beta_n}\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i|\right\}\neq o(1);$$

ответ: $\beta_n\sim c(\ln n)^{1/2}$.

2) из сферической геометрии: при какой последовательности γ_n сферический объем конуса, натянутого на векторы $x_i=e_i-\gamma_n\mathbf{1}$, $\mathbf{1}=(1,\ldots,1)$, e_i — орты в R^n, $i=1, 2,\ldots, n$, имеет отличный от нуля предел при $n\to\infty$; ответ: $\gamma_n\sim c(n^3\ln n)^{-1/2}$.

Оба ответа вытекают из теорем, полученных выше.

§ 5. Дуальная геометрическая интерпретация

Наиболее плодотворная геометрическая интерпретация задачи л.п. введена Л. В. Канторовичем и подробно рассматривалась Г. Ш. Рубинштейном в [14]; она реализована в пространстве «правых частей» и сводит задачу л.п. к задаче о крайней точке пересечения луча и выпуклого конуса. Ее преимущество — в возможности одновременной интерпретации прямой и двойственной задач. В обычной форме и в обозначениях задачи (2.1а) и (2.2) она выглядит так:

$$(5.1)\qquad \max\left\{\lambda\,\Big|\,\sum_{i=1}^{n}x_id^i=d^{n+1}-\lambda d^0,\ x_i\geqslant0,\ i=1, 2,\ldots, n\right\},$$

где d^i — образ орта e^i при отображении D: $R^{n+2}\to R^{k+1}$. Если ввести конус $C=\operatorname{Con}\{d^i, i=1, 2,\ldots, n\}\subset R^{k+1}$ и прямую $\Pi=\{-\lambda d^0+d^{n+1}|\lambda\in\mathbb{R}\}\subset R^{k+1}$, то задача (5.1) состоит в нахождении крайней точки (с минимальной нулевой координатой) пересечения $\Pi\cap C$.

Запишем задачу (5.1) в духе грассмановой интерпретации. Для этого рассмотрим универсальный конус $Q=\operatorname{Con}\{e^i, i=1, 2,\ldots,n\}\subset R^{n+2}$ и прямую $L=\{-\lambda e^0+e^{n+1}|\lambda\in\mathbb{R}\}\subset R^{n+2}$. Тогда тривиальная универсальная задача состоит в нахождении крайней точки (с минимальной нулевой координатой) пересечения $L\cap Q$ $(=\varnothing)$. Рассмотрим D: $R^{n+2}\to R^{k+1}\approx R^{n+2}/\operatorname{Ker}D$. Пусть, как и в § 2, $E=\operatorname{Im}D^*$, $E^\perp=\operatorname{Ker}D$. Отождествляя $R^{n+2}/E^\perp$ с E с помощью D^*, можем считать, что конус $C\approx D^*DQ$ и прямая $\Pi\approx D^*DL$ лежат в E; тогда получаем задачу

(5.1а) $\max\{\lambda | D^*DQ \ni D^*De^{n+1} - \lambda D^*De^0\}$.

Поскольку условия задачи (5.1а) зависят только от ядра оператора D^*D, возникает эквивалентная задача

(5.2а) $\max\{\lambda | PQ \ni Pe^{n+1} - \lambda Pe^0\}$,

где P — ортопроектор на E. Теперь естественно добавить такую же задачу для подпространства $E^\perp$ с заменой (как и в § 2) e^0, e^{n+1} на $-e^{n+1}$, $-e^0$:

(5.2б) $\min\{\mu | P_\perp Q \ni -P_\perp e^0 - \mu P_\perp e^{n+1}\}$,

где $P_\perp$ — ортопроектор на $E^\perp$.

При переходе от (5.1) к (5.2а) снова отождествляем задачи, у которых матрицы имеют одинаковые ядра, и получаем новый способ превращения многообразия Грассмана в пространство задач л. п., при котором (5.2а) и (5.2б) совершенно идентичны с точностью до замены E на $E^\perp$ и e^0, e^{n+1} на $-e^{n+1}$, $-e^0$. В отличие от (2.5), задачи (5.2) суть проекции (а не сечения) на E или $E^\perp$ универсальной тривиальной задачи.

Приведем без подробностей новую интерпретацию параметрической двойственной допустимости набора $J \in \mathcal{B}$ (см. § 3). При этом понадобится еще одно универсальное множество, возникающее из-за того, что зафиксирован набор K, являющийся начальным.

Пусть $T = \mathrm{Con}\{e^i, i=0, 1, \ldots, k\} + \mathrm{co}\{0, e^i, i \in M\}$ (сумма конуса и симплекса), $S(J) = \mathrm{Con}\{e^i, i \in J\}$, $T(J) = \mathrm{Con}\{e^i, i \in K \cap J\} + \mathrm{co}\{e^i, i \in M \cap J\}$,

$$\Pi(t) = \left\{-\lambda e^0 + e^{n+1} + t\sum_{i=1}^{k} e^i \,\middle|\, \lambda \in \mathbf{R}\right\},$$

$H(t) = \mathrm{Aff}\{T(J), -te^0\}$ ($\mathrm{Con}\{\cdot\}$ — коническая, $\mathrm{co}\{\cdot\}$ — выпуклая, $\mathrm{Aff}\{\cdot\}$ — аффинная оболочки множеств векторов в скобках).

Предложение 5. *Базисный набор $J \in \mathcal{B}$ является параметрически оптимальным в задаче* (2.3а) *и др. тогда и только тогда, когда существует такое $t \geqslant 0$, что выполнены условия*:

а) $PS(J) \cap P\Pi(t) \neq \varnothing$ (*параметрическая прямая допустимость*);

б) *гиперплоскость $PH(t)$ в E является опорной к PT* (*параметрическая двойственная допустимость*).

Следствие 5. Базисный набор $J \in \mathcal{B}$ есть п. д. д.-набор тогда и только тогда, когда $PT(J)$ есть $(k-1)$-мерная грань многогранного множества PT.

Следствие 6. Число шагов в методе Лемке не превосходит числа граней коразмерности 2 многогранного множества PT для почти всех $E \in G(n+2, k+1)$.

Таким образом, новая интерпретация функционала $s_1(E)$ из § 3, 4 — число граней коразмерности 2 некоторого многогранного множества в E. Меняя E, получаем случайные многогранные множества и приходим к следующей известной в случайной выпуклой геометрии [8] задаче:

найти среднее число граней случайного многогранного множества.

Тем самым наш основной результат (теорема 2) дает ответ на этот вопрос для некоторой статистики, а также способы построения множества, приведенного выше (проекция T на случайное подпространство E). Этот результат согласуется с фактами, полученными в [9].

§ 6. Комментарии

Грассманов подход к решению задач л. п. и выпуклой геометрии предлагался А. М. Вершиком в [8], [15], [16]. Следует ожидать, что в задачах выпуклой геометрии с его помощью можно ответить на старый вопрос о типичных свойствах выпуклых многогранников в больших размерностях. Отметим сходство грассманова подхода с идеей диаграмм Гейла [17]. Имеются четыре модели: сечение или проекция стандартного объекта с подпространством и его ортогональным дополнением. Это — задачи (2.5) и (5.2). Идея привлечения параметрического метода к задаче об оценке числа шагов симплекс-метода независимо предлагалась в [6], а также в [18], [19] и в [5]. Впоследствии оказалось, что методы и результаты нашей статьи и работы [5] различаются: в [5] использовался более грубый способ оценки, пригодный, однако, для более широкого класса статистик. Кроме того, там рассматривался параметрический метод Лемке, а в [1] — более простой параметрический метод. В настоящей статье, в отличие от [1], дается точная константа в оценке, а порядок вхождения $\ln n$ один и тот же ($k/2$). Как показано в [6], методом [5] нельзя получить нашу оценку, а оценку из [5] можно способом автора [5] чуть-чуть улучшить ($(\ln n)^{k^2/2}$ вместо $(\ln n)^{k(k+1)/2}$). Грассманов подход в [5] не применяется (см. также обзор [20]).

Следует отметить, что в работах [11] и др. изучалась безотносительно к линейному программированию задача о среднем числе граней старшей размерности у случайного многогранника. Результаты [11] также приводят к близким оценкам.

Уже после работ [5], [18], [19] появилось несколько интересных анонсов. Один из них [7] содержит оценку числа шагов, квадратичную по $\min(m, k)$. При этом используется более мощный параметрический метод — полиномиальное возмущение, аналогичное версальной деформации в теории особенностей и методу Чарнса борьбы с вырождением в задачах л. п.

В заключение упомянем, что в [21] и в [22] авторы подходят к задаче л. п. совсем с другой стороны: они дают, вообще говоря, бесконечный полиномиальный алгоритм решения задачи л.п. Но вопрос о соотношении между такими методами и симплекс-методами пока не решен в чью-либо пользу. Для выяснения этого необходим целенаправленный вычислительный эксперимент.

Литература

1. *Вершик А. М., Спорышев П. В.* Оценки среднего числа шагов симплекс-метода и задачи асимптотической интегральной геометрии.– Докл. АН СССР, 1983, т. 271, № 5, с. 1044–1048.
2. *Канторович Л. В.* Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М.: Наука, 1959.
3. *Данциг Дж. Б.* Линейное программирование, его приложения и обобщения. М.: Прогресс, 1966.
4. *Klee V., Minty G.* How good is the simplex algorithm? – In: Inequalities III. N. Y.: Acad. Press, 1972, p. 159–175.
5. *Smale S.* On the average number of steps of the simplex method of linear programming.– Math. Program., 1983, v. 27, № 3, p. 241–262.
6. *Спорышев П. В.* Применение интегральной геометрии к линейному программированию: Дис. . . . канд. физ.-матем. н. Л.: ЛГУ, 1984.
7. *Adler I., Meggido N., Todd M. J.* New results on the average behavior of symplex algorithms.– Bull. Amer. Math. Soc., 1984, v. 11, № 2, p. 378–382.

8. *Вершик А. М., Черняков А. Г.* Критические точки полей выпуклых многогранников и оптимум по Парето – Смейлу относительно выпуклого конуса.– Докл. АН СССР, 1982, т. 263, № 3, с. 529–532.
9. *Сантало Л. А.* Интегральная геометрия и геометрические вероятности. М.: Наука, 1983.
10. *Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б.* Новые направления в линейном программировании. М.: Сов. радио, 1966.
11. *Reynaud H.* Sur l'envelope des nuages des points aleatoires dans R_n. I.– J. Appl. Probability, 1970, v. 7, p. 35–48.
12. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1977.
13. *Федорюк М. В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977.
14. *Рубинштейн Г. Ш.* Задача о крайней точке пересечения оси с многогранником и некоторые ее приложения.– Успехи матем. наук, 1955, т. 10, № 4, с. 206–207.
15. *Вершик А. М.* Несколько замечаний о бесконечномерной задаче линейного программирования.– Успехи матем. наук, 1970, т. 25, № 5, с. 117–124.
16. *Вершик А. М.* Описание инвариантных мер для действия некоторых бесконечномерных групп.– Докл. АН СССР, 1974, т. 213, № 4, с. 749–752.
17. *Grunbaum B.* Convex polytopes. N. Y.: Intersci., 1967.
18. *Borgwardt K.-H.* Some distribution-independent results about the asymptotic order of the average number of pivot steps of the simplex method.– Math. Operat. Res., 1982, v. 7, p. 441–462.
19. *Borgwardt K.-H.* The average number of steps required by the simplex method is polynomial.– J. Operat. Res. A-B, 1982, v. 26, p. 157–177.
20. *Smale S.* On the efficiency of algorithms of analysis.– Bull. Amer. Math. Soc., 1985, v. 13, № 2, p. 87–121.
21. *Хачиян Л. Г.* Полиномиальные алгоритмы в линейном программировании.– Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1980, т. 20, № 1, с. 51–68.
22. *Karmarkar N.* A new polynomial-time algorithm for linear programming.– Combinatorica, 1984, v. 4, № 4, p. 373–395.

Поступила в редакцию 6.V.1985