

## Программа экзамена по спецкурсу «Теория представлений симметрических групп»

1. Симметрическая группа и образующие Кокстера; кокстеровская длина.
2. Граф Юнга, стандартные таблицы Юнга, допустимые транспозиции, теорема о приведении произвольной таблицы к старшей.
3. Диаграммы Браттели и базисы Гельфанда–Цетлина. Алгебра Гельфанда–Цетлина.
4. Представления ассоциативных алгебр. Лемма Шура.
5. Полупростые представления. Теорема о подпредставлениях полупростого представления.
6. Теорема плотности с леммой.
7. Теорема о представлениях прямых сумм матричных алгебр.
8. Фильтрации. Лемма о фильтрациях.
9. Радикал. Теорема о неприводимых представлениях конечномерной алгебры.
10. Полупростые алгебры. Теорема об эквивалентных условиях полупростоты.
11. Теорема о двойном централизаторе.
12. Теорема об эквивалентности простоты ветвления и коммутативности централизатора.
13. Алгебры с инволюцией. Лемма о достаточном условии коммутативности.
14. Теорема о коммутативности централизатора  $Z(\mathbb{C}[S_n], \mathbb{C}[S_{n-1}])$ .
15. Лемма о порождающих элементах централизатора  $Z(\mathbb{C}[S_n], \mathbb{C}[S_{n-1}])$  и центра  $Z(\mathbb{C}[S_n])$ .
16. Элементы Юнга–Юциса–Мэрфи. Теорема о порождении алгебры Гельфанда–Цетлина.
17. Базис Юнга. Множество весов  $\text{Spec}(n)$ . Локальность действия кокстеровских образующих.
18. Коммутационные соотношения между кокстеровскими образующими и элементами Юнга–Юциса–Мэрфи. Вырожденная аффинная алгебра Гекке  $H(2)$ , её представления и вложения в  $\mathbb{C}[S_n]$ .
19. Описание множества  $\text{Spec}(n)$  и действие кокстеровских образующих в базисе Юнга.
20. Множество векторов содержания  $\text{Cont}(n)$ . Теорема о том, что  $\text{Spec}(n) \subset \text{Cont}(n)$ .
21. Содержание клетки диаграммы Юнга. Биекция между стандартными таблицами Юнга и векторами содержания. Следствие.
22. Основная теорема. Следствия и выводы. Описание 2-интервалов в графе Юнга.
23. Полунормальная форма Юнга (с леммой).
24. Осевое расстояние. Ортогональная форма Юнга.
25. Теорема о значении неприводимых характеров на одноцикловых перестановках. Косые диаграммы и косые таблицы.
26. Косые представления симметрической группы. Теорема о косых представлениях. Следствие.
27. Лемма об ограничении косого представления на подгруппу Юнга. Лемма о цикличности векторов Юнга.
28. Лемма о несвязных строках. Следствие о горизонтальной полосе. Лемма о кратности единичного представления в косом. Правило Пиери.
29. Косые крюки. Теорема о крюковых представлениях.

30. Теорема о значениях косых характеров на одноцикловых перестановках. Правило Мурнагана–Накаямы.
31. Лемма Макки.
32. Лемма Макки для перестановочных представлений. Теорема о числе сплетения.
33. Порядки на разбиениях. Модули Юнга.
34. Лемма о кратности ограничения модуля Юнга на  $S_{n-1}$ . Теорема о числе сплетения  $M_\lambda$  и  $\widetilde{M}_{\lambda'}$ .
35. Теорема о треугольности матрицы из чисел Костки.
36. Лемма о неприводимом представлении, соответствующем сопряжённой диаграмме Юнга. Лемма о разложении модуля  $\widetilde{M}_{\lambda'}$  на неприводимые. Соответствие Фробениуса–Юнга.
37. Полустандартные таблицы Юнга. Редуцированный граф Юнга. Диаграммы Браттели для перестановочных представлений. Теорема о диаграмме Браттели цепочки подгрупп Юнга. Правило Юнга.
38. Формула для характеров модулей Юнга.
39. Формула Фробениуса для характеров неприводимых представлений симметрических групп.
40. Двойственность Шура–Вейля для  $\mathfrak{gl}(V)$ .
41. Двойственность Шура–Вейля для  $\mathrm{GL}(V)$ .
42. Функции Шура. Теорема о разложении степенных сумм по функциям Шура. Теорема о специальных значениях функций Шура.
43. Теорема о характерах неприводимых представлений  $\mathrm{GL}(V)$ . Формула Вейля. Окончательная форма двойственности Шура–Вейля.
44. Формула крюков.