ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2007, том 412, № 1, с. 1–4

МАТЕМАТИКА

УДК 512.547

ИНДУЦИРОВАННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ И ИХ СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ

© 2007 г. А. М. Вершик, Н. В. Цилевич

Представлено академиком Л.Д. Фаддеевым 11.05.2006 г.

Поступило 05.09.2006 г.

Формулируются основные факты о представлениях бесконечной симметрической группы, индуцированных с единичных представлений подгрупп Юнга, их неприводимости, факторности и спектральных мерах.

В классической теории представлений симметрических групп представления, индуцированные с подгрупп Юнга (т.е. с подгрупп, оставляющих неподвижным некоторое разбиение), играют едва ли не основную роль (см. [5]). В их разложениях на неприводимые компоненты каноническим образом встречаются все неприводимые представления группы, и с их помощью традиционно устанавливается связь диаграмм Юнга и неприводимых представлений (соответствие Фробениуса–Юнга). В настоящее время появился альтернативный подход к установлению этого соответствия, основанный на диагонализации групповой алгебры и ее представлений относительно подалгебры Гельфанда–Цетлина [5, 3]. Тем не менее анализ индуцированных представлений как для конечных, так и для бесконечной симметрических групп важен сам по себе. Здесь мы приводим краткий перечень свойств представлений бесконечной симметрической группы, индуцированных с бесконечных подгрупп Юнга. Как это уже неоднократно наблюдалось, по сравнению с конечным случаем ряд аналогичных свойств бесконечной симметрической группы становится проще и естественнее, но, конечно, появляются и совершенно новые эффекты, отсутствующие в конечном случае.

Следует отметить еще одно важное обстоятельство. Считается, что теория представлений бесконечных дискретных некоммутативных (точнее, не виртуально коммутативных) групп, т.е. групп не типа I, является необозримой (дикой), и поэтому ни классификация, ни единообразные модели представлений невозможны. Бесконечная симметрическая группа $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ как раз является одним из основных нетривиальных примеров групп не типа I. Но по отношению к ней такая точка зрения совершенно неоправданна; в действительности, структура этой группы позволяет свести ее "дикость" к стандартной для теории динамических систем модели, после чего изучение ее представлений становится вполне обозримой задачей.

Мы имеем в виду тот важный факт, что групповая алгебра группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ (как и любой индуктивный предел полупростых алгебр с простым ветвлением) обладает естественной структурой скрещенного произведения: канонической коммутативной подалгеброй является так называемая алгебра Гельфанда–Цетлина – алгебра функций на бесконечных таблицах Юнга, а аналогом ее нормализаторной группы – группа элементов алгебры, сохраняющих разбиение пространства бесконечных таблиц Юнга на классы по отношению к финальной или хвостовой эквивалентности (две таблицы эквивалентны, если они отличаются лишь конечным началом). Поэтому всякое унитарное представление группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ описывается борелевской мерой на пространстве бесконечных таблиц Юнга, которую естественно назвать спектральной мерой представления, и коциклом со значениями в группе унитарных операторов некоторого вспомогательного гильбертова пространства. Эта мера квазиинвариантна по отношению к преобразованиям, сохраняющим эквивалентность, а ее эргодичность вместе с неразложимостью коцикла равносильна неприводимости представления. Анализ спектральной меры представления как меры на бесконечных таблицах Юнга является наиболее трудной и интересной частью этой теории, и ее естественно назвать теорией Фурье для бесконечной симметрической группы (см. [3, 6]). В работе [4] и последующих работах относительно подробно были изучены лишь так называемые центральные меры, т.е. спектральные меры представлений с характерами или, в наших терминах, преобразования Фурье характеров, например мера Планшереля. Реализация этой программы

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук

для других представлений $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ не была проведена до сих пор даже для таких естественных представлений, как индуцированные представления.

РАЗБИЕНИЯ, ПОДГРУППЫ ЮНГА, ИНДУЦИРОВАНИЕ

Группа $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ есть счетная группа финитных подстановок натурального ряда; мы рассматриваем ее как индуктивный предел возрастающего семейства конечных групп $\mathfrak{S}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, с естественными вложениями. Рассмотрим разбиения натурального ряда $\mathbb{N}$ и отвечающие им подгруппы Юнга. Пусть $\Pi = (A_1, A_2, \ldots)$ – произвольное разбиение множества натуральных чисел. Обозначим множество всех разбиений натурального ряда через $\mathcal{P}$. Будем характеризовать разбиение его типом – вектором кратностей мощностей его элементов (блоков). Таким образом, тип разбиения – это последовательность

$$\mathbf{r} = (r_0, r_1, r_2, \ldots),$$

состоящая из неотрицательных целых чисел или ∞, где r_0 – это число бесконечных блоков, r_1 – число блоков, состоящих из одного элемента, и т.д.; r_m есть число блоков мощности m, $m = 1, 2, \ldots$.

Подгруппа Юнга $\mathfrak{S}_\Pi$, отвечающая разбиению $\Pi = (A_1, A_2, \ldots)$, состоит из всех элементов группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, которые оставляют неподвижными блоки A_1, A_2, …. Представление группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ правыми сдвигами аргумента в пространстве $l^2(\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}/\mathfrak{S}_\Pi)$ функций на пространстве левых классов смежности по этой подгруппе есть индуцированное представление с единичного представления подгруппы $\mathfrak{S}_\Pi$, обозначаемое $\mathrm{ind}_{\mathfrak{S}_\Pi}^{\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}}\mathbf{1}$ или, коротко, ind_Π. Заметим, что группа $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ естественно действует на множестве всех разбиений $\mathcal{P}$ и орбиты этого действия в точности отвечают классам сопряженных подгрупп Юнга: $\mathfrak{S}_{g\Pi} = g\mathfrak{S}_\Pi g^{-1}$. Очевидно, что индуцирование с сопряженных подгрупп Юнга порождает эквивалентные представления. Имеет место и обращение этого факта:

Т е о р е м а 1. *Индуцированные представления с двух подгрупп Юнга, не являющихся сопряженными в* $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, *неэквивалентны.*

Полезно разделить все разбиения на два класса – класс $\mathcal{P}_l$ больших разбиений, которые содержат конечное число конечных блоков $\left(\sum_{i>0} r_i < \infty\right)$ и тем самым хотя бы один бесконечный блок ($r_0 > 0$), и класс $\mathcal{P}_s$ малых разбиений, которые содержат бесконечное число конечных блоков и произвольное (возможно нулевое) число бесконечных блоков $\left(\sum_{i>0} r_i < \infty\right)$; очевидно, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_l \cup \mathcal{P}_s$.

Мы будем называть подгруппу Юнга, ассоциированную с разбиением, большой или малой в зависимости от того, каково это разбиение. Если число конечных блоков конечно, то они образуют диаграмму Юнга (возможно, пустую); обозначим ее $\lambda(\Pi)$.

Т е о р е м а 2. *Представления, индуцированные с больших подгрупп Юнга, суть представления типа* I (*см.* [8]) (*т.е. однозначно разлагаются в прямой интеграл неприводимых представлений*). *Если разбиение* Π *содержит не более одного конечного блока* $\left(\sum_{i>0} r_i \le 1\right)$, *то представление неприводимо, в остальных случаях оно есть конечная сумма неприводимых представлений, занумерованных диаграммами Юнга с числом клеток, равным* $|\lambda(\Pi)| = \sum_{i>0} r_i$, *и мажорирующими в смысле доминантного порядка диаграмму* $\lambda(\Pi)$; *эти представления, вообще говоря, уже не являются индуцированными с каких-либо подгрупп Юнга.*

Указанное разложение на неприводимые представления можно описать явно. Оно в определенном смысле повторяет разложение на неприводимые индуцированного представления конечной симметрической группы с подгруппы Юнга, соответствующей диаграмме $\lambda(\Pi)$. Утверждение этой теоремы, касающееся неприводимости, было доказано в работе [1].

Перейдем к малым подгруппам Юнга, здесь совсем иная картина. Напомним, что индуцирование с единичной подгруппы (т.е. с подгруппы Юнга, отвечающей разбиению на отдельные точки: $r_1 = \infty$, $r_i = 0$ при $i \ne 1$) есть фактор-представление типа II_1. Поэтому неудивительно, что подобное утверждение верно и для других малых подгрупп. Выделим в малом разбиении Π конечные блоки, имеющие конечную кратность ($\{i > 0: r_i < \infty\}$), и образуем из них диаграмму Юнга $\nu(\Pi)$.

Т е о р е м а 3. *Представление, индуцированное с подгруппы Юнга* $\mathfrak{S}_\Pi$, *где* Π *есть малое разбиение, у которого хотя бы одно число* r_i, $i > 0$, *бесконечно, а диаграмма* $\nu(\Pi)$ *конечна, есть представление типа* II. *Оно является фактором, если диаграмма* $\nu(\Pi)$ *либо пуста, либо имеет одну строку; в остальных случаях представление разлагается в конечную сумму фактор-представлений, и это разложение параметризуется так же, как в предыдущем случае.*

Наиболее интересным явлением здесь оказывается появление спаренных факторов разного типа: II_1 и II_∞.

Теорема 4 (о бесконечном крюке). *Рассмотрим малые разбиения* Π *одного из типов* $r_0 = 1, r_1 = n, r_i = 0, i > 1$, *где* n *может быть любым натуральным числом большим единицы или бесконечностью.*

Тогда алгебра, порожденная операторами представления ind_Π, *есть фактор типа* II_∞, *а ее коммутант есть фактор типа* II_1.

Напомним, что известны естественные примеры фактор-представлений бесконечной симметрической группы с нееденичной спаривающей константой (см.[2]). В данном случае эта константа равна бесконечности, т.е. естественно спарены факторы типа II_1 и II_∞. Это означает, в частности, что представление группы имеет циклический вектор, а его коммутант не имеет. Заметим, что в этом примере коммутант также порожден регулярным представлением подгруппы исходной группы, которая изоморфна $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$. Открытым остается вопрос о типе представления ind_Π, где Π – разбиение, у которого нет бесконечных блоков и все конечные блоки имеют конечную кратность, т.е. $r_0 = 0, r_i < \infty, i > 0$.

Известно, что естественно классифицировать фактор-представления с точностью до квазиэквивалентности [8], а не до обычной (пространственной) эквивалентности. Для фактор-представлений квазиэквивалентность сводится к алгебраической эквивалентности представлений. Вопрос о квазиэквивалентности индуцированных представлений более сложен. Во всяком случае можно с уверенностью предположить, что для индуцированных представлений квазиэквивалентность намного грубее, чем сопряженность соответствующих подгрупп.

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ

Особый интерес представляет спектральная теория индуцированных представлений. Мы имеем в виду разложение операторов представления в пространствах функций на бесконечных таблицах Юнга, интегрируемых по некоторой (спектральной) мере, квазиинвариантной относительно хвостового разбиения, иначе говоря, имеется в виду диагонализация операторов представления относительно алгебры Гельфанда–Цетлина. В работах [6, 11] мы называем эту проблематику теорией Фурье для $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$.

Определим несколько классов представлений группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$. Заметим, что пространство T таблиц Юнга, т.е. бесконечных путей в графе Юнга, есть вполне несвязный (нестационарный) марковский компакт, так что на нем стандартным образом определено понятие марковской меры. Представление группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$ с простым спектром называется марковским, если в пространстве представления существует циклический вектор, спектральная мера которого относительно алгебры Гельфанда–Цетлина марковская. Пусть теперь f – состояние на группе $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$, т.е. положительно-определенная комплексная функция, нормированная условием $f(e) = 1$ (в дальнейшем это будут характеристические функции подгрупп Юнга). Ограничения f на подгруппы $\mathfrak{S}_n$ задают согласованную систему состояний на $\mathfrak{S}_n$ и монотонный предел циклических представлений. Если эти состояния определяют неприводимые представления (соответственно представления с простым спектром) групп $\mathfrak{S}_n$, начиная с некоторого n, то циклическое представление, определяемое состоянием f, называется элементарным (соответственно простым). В этих случаях спектр представления $\mathfrak{S}_\infty$, определяемого этим состоянием, простой.

Для больших разбиений типа $r_0 = 1, \sum_{i>0} r_i < \infty$ (т.е. для разбиений с одним бесконечным блоком и конечным числом конечных) спектральная мера, очевидно, дискретна и сосредоточена на одном классе или конечном числе классов эквивалентности (по хвостовому отношению эквивалентности) таблиц Юнга; в частности, если это представление неприводимо, то оно элементарно.

Первый неочевидный результат относительно спектральных мер индуцированных представлений (см. [7]) состоит в следующем.

Теорема 5. *Пусть* Π – *разбиение натурального ряда* $\mathbb{N}$ *на два бесконечных блока* ($r_0 = 2, r_i = 0, i > 0$) *и* $\mathfrak{S}_\Pi$ – *соответствующая подгруппа Юнга. Спектральная мера индуцированного представления* ind_Π *является марковской мерой, а само представление – простым и неприводимым.*

Неприводимость уже была отмечена выше, а простота вытекает из следующего факта, который важен сам по себе и который связывает два a priori далеких понятия:

Теорема 6. *Представление бесконечной симметрической группы является марковским тогда и только тогда, когда оно простое.*

В частности, для индуцированного представления, ассоциированного с двублочным разбиением $\Pi = (A_1, A_2)$, переходные вероятности спектральной меры задаются следующей формулой. Пусть $m(n) = |A_1 \cap \{1, 2, \ldots, n\}|$. Если $n + 1 \notin A_1$, то

$$\mathrm{Prob}((n-k, k), (n+1-k, k)) = \frac{n - m(n) - k + 1}{n - 2k + 1},$$

$$\mathrm{Prob}((n-k, k), (n-k, k+1)) = \frac{m(n) - k}{n - 2k + 1}.$$

Если $n+1 \in A_1$, то

$$\mathrm{Prob}((n-k,k),(n+1-k,k)) = \frac{m(n)-k+1}{n-2k+1},$$

$$\mathrm{Prob}((n-k,k),(n-k,k+1)) = \frac{n-m(n)-k}{n-2k+1}.$$

Другой нетривиальный пример спектрального анализа – вычисление спектральной меры индуцированного представления ind_Π, где малое разбиение Π имеет тип $r_0 = 0$, $r_1 = \infty$, $\sum_{i \geq 2} r_i < \infty$. Пусть $\nu = \nu(\Pi) = (\nu_1, \nu_2, \ldots)$. Обозначим через P меру Планшереля (= спектральную меру регулярного представления) на пространстве T бесконечных таблиц Юнга $t = (t_1, t_2, \ldots)$ и через $K_{\nu,\mu}$ числа Костки.

Теорема 7. *Спектральная мера представления* ind_Π *для указанного разбиения* Π *является выпуклой комбинацией условных мер Планшереля*:

$$M = \sum_{\mu \trianglerighteq \nu} c_\mu \cdot \mathrm{P}(\cdot|t_n = \mu),$$

где $c_\mu = \frac{K_{\nu,\mu}\dim\mu\prod\nu_i!}{n!}$, *а* $\mathrm{P}(\cdot|t_n = \mu)$ *есть условное распределение меры Планшереля при условии, что на* n*-м этаже путь проходит через вершину* μ. *В частности, спектральная мера абсолютно непрерывна относительно меры Планшереля и имеет кусочно-постоянную* (*цилиндрическую*) *плотность*.

Подробное изложение этих и других результатов об индуцированных представлениях бесконечной симметрической группы будет опубликовано в журнале “Pure and Appl. Math. Quart”.

Работа поддержана грантами CRDF RUM1-2622-ST-04, РФФИ 05-01-00899, НШ-4329.2006.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Binder M.W., Math.* Ann. 1992. V. 294. P. 37–47.
2. *Vershik A.M., Moscow Math.* J. 2003. V. 3. P. 1141–1157.
3. *Vershik A.M.* The Unity of Mathematics. Boston: Birkhauser, 2006. P. 619–631.
4. *Вершик А.М., Керов С.В.* // Функцион. анал. и прил. 1981. Т. 15. С. 15–27.
5. *Вершик А.М., Окуньков А.Ю.* // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2004. Т. 307. С. 57–98.
6. *Вершик А.М., Цилевич Н.В.* // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2005. Т. 325. С. 61–82.
7. *Вершик А.М., Цилевич Н.В.* // Теория вероятностей и ее применения. 2006. Т. 51. С. 47–63.
8. *Диксмье Ж.* С*-алгебры и их представления. М.: Наука, 1974. 399 с.
9. *Mackey G.* The Theory of Unitary Group Representations. Chicago Press, 1976. 373 p.
10. *Fulton W.* Young Tableaux: ɥith Applications to Representation Theory and Geometry. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. 260 p.
11. *Tsilevich N.V., Vershik A.M.* // Adv. Appl. Math. 2006. In press.