Пространства, о которых не принято говорить

О.Я.Виро

26 декабря 2006 г.

Предисловие

Человеческий фактор

Математику делают люди.

Человеческий фактор

Математику делают люди. Они вносят эмоции.

Человеческий фактор

Математику делают люди. Они вносят эмоции. Ни в чём не повинный предмет может показаться недостойным.

Человеческий фактор

Математику делают люди. Они вносят эмоции. Ни в чём не повинный предмет может казаться недостойным.

Человеческий фактор

Математику делают люди. Они вносят эмоции. Ни в чём не повинный предмет может оказаться изгоем, неизвестным почти никому.

Человеческий фактор

Математику делают люди. Они вносят эмоции.
Ни в чём не повинный предмет может оказаться изгоем, неизвестным почти никому.
Параграф "Топологические пространства" в задачнике по топологии

Человеческий фактор

Математику делают люди. Они вносят эмоции.
Ни в чём не повинный предмет может оказаться изгоем, неизвестным почти никому.
Параграф "Топологические пространства"
в задачнике по топологии
должен принадлежать основному материалу?

Человеческий фактор

Математику делают люди. Они вносят эмоции.
Ни в чём не повинный предмет может оказаться изгоем, неизвестным почти никому.
Параграф "Топологические пространства"
в задачнике по топологии
должен принадлежать основному материалу?
или дополнительному?

Человеческий фактор

Математику делают люди. Они вносят эмоции.
Ни в чём не повинный предмет может оказаться изгоем, неизвестным почти никому.
Параграф "Топологические пространства"
в задачнике по топологии
должен принадлежать основному материалу?
или дополнительному?
Рецензент предложил отметить этот параграф как дополнительный.

Человеческий фактор

Математику делают люди. Они вносят эмоции.
Ни в чём не повинный предмет может оказаться изгоем, неизвестным почти никому.
Параграф "Топологические пространства"
в задачнике по топологии
должен принадлежать основному материалу?
или дополнительному?

Виртуальные узлы

Человеческий фактор

Математику делают люди. Они вносят эмоции.
Ни в чём не повинный предмет может оказаться изгоем, неизвестным почти никому.
Параграф "Топологические пространства"
в задачнике по топологии
должен принадлежать основному материалу?
или дополнительному?

Виртуальные узлы – достойный предмет?

Человеческий фактор

Математику делают люди. Они вносят эмоции.
Ни в чём не повинный предмет может оказаться изгоем, неизвестным почти никому.
Параграф "Топологические пространства"
в задачнике по топологии
должен принадлежать основному материалу?
или дополнительному?

Виртуальные узлы. Введены Кауффманом в середине 90-х годов.

Человеческий фактор

Математику делают люди. Они вносят эмоции.
Ни в чём не повинный предмет может оказаться изгоем, неизвестным почти никому.
Параграф "Топологические пространства"
в задачнике по топологии
должен принадлежать основному материалу?
или дополнительному?

Виртуальные узлы. Немедленно пригодились для доказательства того, что инварианты Васильева представляются комбинаторными формулами.

Человеческий фактор

Математику делают люди. Они вносят эмоции.
Ни в чём не повинный предмет может оказаться изгоем, неизвестным почти никому.
Параграф "Топологические пространства"
в задачнике по топологии
должен принадлежать основному материалу?
или дополнительному?

Виртуальные узлы. Стимулировали перенесение диаграмматической техники на узлы в утолщенных поверхностях.

Человеческий фактор

Математику делают люди. Они вносят эмоции.
Ни в чём не повинный предмет может оказаться изгоем, неизвестным почти никому.
Параграф "Топологические пространства"
в задачнике по топологии
должен принадлежать основному материалу?
или дополнительному?

Виртуальные узлы. Одна из двух наиболее активных тем в теории узлов.

Человеческий фактор

Математику делают люди. Они вносят эмоции.
Ни в чём не повинный предмет может оказаться изгоем, неизвестным почти никому.
Параграф "Топологические пространства"
в задачнике по топологии
должен принадлежать основному материалу?
или дополнительному?

Виртуальные узлы. Объявлены в отзыве на автореферат объектами, недостойными быть предметом докторской диссертации.

Человеческий фактор

Математику делают люди. Они вносят эмоции.
Ни в чём не повинный предмет может оказаться изгоем, неизвестным почти никому.
Параграф "Топологические пространства" в задачнике по топологии должен принадлежать основному материалу? или дополнительному?

Виртуальные узлы – не предмет этого доклада.

Человеческий фактор

Математику делают люди. Они вносят эмоции.
Ни в чём не повинный предмет может оказаться изгоем, неизвестным почти никому.
Параграф "Топологические пространства"
в задачнике по топологии
должен принадлежать основному материалу?
или дополнительному?

Виртуальные узлы – не предмет этого доклада.
Рано или поздно, математические объекты за себя постоят.

Человеческий фактор

Математику делают люди. Они вносят эмоции.
Ни в чём не повинный предмет может оказаться изгоем, неизвестным почти никому.
Параграф "Топологические пространства"
в задачнике по топологии
должен принадлежать основному материалу?
или дополнительному?

Виртуальные узлы – не предмет этого доклада.
Рано или поздно, математические объекты за себя постоят. Но выбор определений определяет среду, в которой мы работаем.

Человеческий фактор

Математику делают люди. Они вносят эмоции.
Ни в чём не повинный предмет может оказаться изгоем, неизвестным почти никому.
Параграф "Топологические пространства"
в задачнике по топологии
должен принадлежать основному материалу?
или дополнительному?

Виртуальные узлы – не предмет этого доклада. Рано или поздно, математические объекты за себя постоят. Но выбор определений определяет среду, в которой мы работаем.

Более классический пример: пределы в учебниках анализа.

Дифференцируемые многообразия

Дифференцируемые многообразия

Более свежий пример:

Дифференцируемые многообразия

Более свежий пример:

но не на злобу дня

Дифференцируемые многообразия

Более свежий пример: дифференцируемые многообразия.

Дифференцируемые многообразия

Более свежий пример:
дифференцируемые многообразия.

Современное определение дано Хаслером Уитни в статье Differentiable manifolds, Annals of Math. 37 (1936), 645-680.

Дифференцируемые многообразия

Более свежий пример: дифференцируемые многообразия.

Современное определение дано Хаслером Уитни в статье Differentiable manifolds, Annals of Math. 37 (1936), 645-680.

Вдохновлено книжкой Германа Вейля Die Idee der Riemannschen Fläche 1913.

Чем плохо определение дифференцируемой структуры?

Длинное.

Чем плохо определение дифференцируемой структуры?

Длинное.

Искуственно отдаляет дифференцируемые многообразия от алгебраических многообразий, аналитических пространств, топологический пространств и других.

Чем плохо определение дифференцируемой структуры?

Длинное.

Искуственно отдаляет дифференцируемые многообразия от алгебраических многообразий, аналитических пространств, топологический пространств и других.

Дифференцируемые структуры бывают только на многообразиях!

Чем плохо определение дифференцируемой структуры?

Длинное.

Искуственно отдаляет дифференцируемые многообразия от алгебраических многообразий, аналитических пространств, топологический пространств и других.

Дифференцируемые структуры бывают только на многообразиях!

Что ни сделай с дифференцируемым многообразием – пропадёт!

Чем плохо определение дифференцируемой структуры?

Длинное.

Искуственно отдаляет дифференцируемые многообразия от алгебраических многообразий, аналитических пространств, топологический пространств и других.

Дифференцируемые структуры бывают только на многообразиях!

Что ни сделай с дифференцируемым многообразием – пропадёт!

Никакой свободы!

Политическая корректность в математике

Политическая корректность в математике

Такая терминология не даёт говорить о плохом.

Политическая корректность в математике

Такая терминология не даёт говорить о плохом.
Слова не даст сказать о нехорошем пространстве!

Политическая корректность в математике

Такая терминология не даёт говорить о плохом.
Хорошо ли это?

Политическая корректность в математике

Такая терминология не даёт говорить о плохом.

Хорошо ли это? Допустимо ли?

Политическая корректность в математике

Такая терминология не даёт говорить о плохом.
Хорошо ли это? Допустимо ли?
Знаем ли мы, что очень патологично

Политическая корректность в математике

Такая терминология не даёт говорить о плохом.
Хорошо ли это? Допустимо ли?
Знаем ли мы, что очень патологично,
а что – не очень?

Политическая корректность в математике

Такая терминология не даёт говорить о плохом.
Хорошо ли это? Допустимо ли?
Знаем ли мы, что очень патологично,
а что – не очень?
Хотели бы мы уметь говорить о
дифференциальной структуре
на канторовом множестве?

Политическая корректность в математике

Такая терминология не даёт говорить о плохом.
Хорошо ли это? Допустимо ли?
Знаем ли мы, что очень патологично,
а что – не очень?
Хотели бы мы уметь говорить о
дифференциальной структуре
на канторовом множестве?
а на $\mathbb{C}P^2/\operatorname{conj}$?

Политическая корректность в математике

Такая терминология не даёт говорить о плохом.
Хорошо ли это? Допустимо ли?
Знаем ли мы, что очень патологично,
а что – не очень?
Хотели бы мы уметь говорить о
дифференциальной структуре
на канторовом множестве?
а на $\mathbb{C}P^2/\operatorname{conj}$?
а на фракталях?

Политическая корректность в математике

Такая терминология не даёт говорить о плохом.
Хорошо ли это? Допустимо ли?
Знаем ли мы, что очень патологично,
а что – не очень?
Хотели бы мы уметь говорить о
дифференциальной структуре
на канторовом множестве?
а на $\mathbb{C}P^2/\operatorname{conj}$?
а на фракталях?

Понятие дифференциального пространства
выработано в шестидесятые годы

Политическая корректность в математике

Такая терминология не даёт говорить о плохом.
Хорошо ли это? Допустимо ли?
Знаем ли мы, что очень патологично,
а что – не очень?
Хотели бы мы уметь говорить о
дифференциальной структуре
на канторовом множестве?
а на $\mathbb{C}P^2/\operatorname{conj}$?
а на фракталях?

Понятие дифференциального пространства
выработано в шестидесятые годы,
но не пробилось в mainstream Mathematics.

Политическая корректность в математике

Такая терминология не даёт говорить о плохом.
Хорошо ли это? Допустимо ли?
Знаем ли мы, что очень патологично,
а что – не очень?
Хотели бы мы уметь говорить о
дифференциальной структуре
на канторовом множестве?
а на $\mathbb{C}P^2/\operatorname{conj}$?
а на фракталях?

Понятие дифференциального пространства
выработано в шестидесятые годы,
но не пробилось в mainstream Mathematics.
Почему?

Политическая корректность в математике

Такая терминология не даёт говорить о плохом.
Хорошо ли это? Допустимо ли?
Знаем ли мы, что очень патологично,
а что – не очень?
Хотели бы мы уметь говорить о
дифференциальной структуре
на канторовом множестве?
а на $\mathbb{C}P^2/\operatorname{conj}$?
а на фракталях?

Понятие дифференциального пространства
выработано в шестидесятые годы,
но не пробилось в mainstream Mathematics.
Почему? Время было такое?

Политическая корректность в математике

Такая терминология не даёт говорить о плохом.
Хорошо ли это? Допустимо ли?
Знаем ли мы, что очень патологично,
а что – не очень?
Хотели бы мы уметь говорить о
дифференциальной структуре
на канторовом множестве?
а на $\mathbb{C}P^2/\operatorname{conj}$?
а на фракталях?

Понятие дифференциального пространства
выработано в шестидесятые годы,
но не пробилось в mainstream Mathematics.
Почему? Время было такое?Люди?

Дифференциальные пространства

Дифференциальные структуры

Пусть X – множество, $r \in \mathbb{N}$ или $r = \infty$.

Дифференциальные структуры

Пусть X – множество, $r \in \mathbb{N}$ или $r = \infty$.
Дифференциальная структура класса C^r на X

Дифференциальные структуры

Пусть X – множество, $r \in \mathbb{N}$ или $r = \infty$.
Дифференциальная структура класса C^r на X

не дифференцируемая, а дифференциальная,
её нельзя дифференцировать

Дифференциальные структуры

Пусть X – множество, $r \in \mathbb{N}$ или $r = \infty$.
Дифференциальная структура класса C^r на X есть такая алгебра $\mathcal{C}^r(X)$ функций $X \to \mathbb{R}$ что:

Дифференциальные структуры

Пусть X – множество, $r \in \mathbb{N}$ или $r = \infty$.
Дифференциальная структура класса C^r на X есть такая алгебра $\mathcal{C}^r(X)$ функций $X \to \mathbb{R}$ что:

1.

Дифференциальные структуры

Пусть X – множество, $r \in \mathbb{N}$ или $r = \infty$.
Дифференциальная структура класса C^r на X есть такая алгебра $\mathcal{C}^r(X)$ функций $X \to \mathbb{R}$ что:

1. Композиция функций из $\mathcal{C}^r(X)$ с C^r-функциями принадлежит $\mathcal{C}^r(X)$.

Дифференциальные структуры

Пусть X – множество, $r \in \mathbb{N}$ или $r = \infty$.
Дифференциальная структура класса C^r на X есть такая алгебра $\mathcal{C}^r(X)$ функций $X \to \mathbb{R}$ что:

1. Композиция функций из $\mathcal{C}^r(X)$ с C^r-функциями принадлежит $\mathcal{C}^r(X)$.

Другими словами, $(g \circ f : X \to \mathbb{R}) \in \mathcal{C}^r(X)$

Дифференциальные структуры

Пусть X – множество, $r \in \mathbb{N}$ или $r = \infty$. Дифференциальная структура класса C^r на X есть такая алгебра $\mathcal{C}^r(X)$ функций $X \to \mathbb{R}$ что:

1. Композиция функций из $\mathcal{C}^r(X)$ с C^r-функциями принадлежит $\mathcal{C}^r(X)$.

   Другими словами, $(g \circ f : X \to \mathbb{R}) \in \mathcal{C}^r(X)$, если $f : X \to U$ определяется функциями $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}^r(X)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество, и $g : U \to \mathbb{R}$ есть C^r-отображение.

Дифференциальные структуры

Пусть X – множество, $r \in \mathbb{N}$ или $r = \infty$.
Дифференциальная структура класса C^r на X есть такая алгебра $\mathcal{C}^r(X)$ функций $X \to \mathbb{R}$ что:

1. Композиция функций из $\mathcal{C}^r(X)$ с C^r-функциями принадлежит $\mathcal{C}^r(X)$.

   Другими словами, $(g \circ f : X \to \mathbb{R}) \in \mathcal{C}^r(X)$, если $f : X \to U$ определяется функциями $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}^r(X)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество, и $g : U \to \mathbb{R}$ есть C^r-отображение.

2. $f \in \mathcal{C}^r(X)$, если в окрестности каждой точки f совпадает с функцией, принадлежащей $\mathcal{C}^r(X)$.

Дифференциальные структуры

Пусть X – множество, $r \in \mathbb{N}$ или $r = \infty$. Дифференциальная структура класса C^r на X есть такая алгебра $\mathcal{C}^r(X)$ функций $X \to \mathbb{R}$ что:

1. Композиция функций из $\mathcal{C}^r(X)$ с C^r-функциями принадлежит $\mathcal{C}^r(X)$.

   Другими словами, $(g \circ f : X \to \mathbb{R}) \in \mathcal{C}^r(X)$, если $f : X \to U$ определяется функциями $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}^r(X)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество, и $g : U \to \mathbb{R}$ есть C^r-отображение.

2. $f \in \mathcal{C}^r(X)$, если в окрестности каждой точки f совпадает с функцией, принадлежащей $\mathcal{C}^r(X)$.

   Другими словами, $f \in \mathcal{C}^r(X)$, если для каждой $a \in X$ существуют такие $g, h \in \mathcal{C}^r(X)$, что $h(a) > 0$ и $f(x) = g(x)$ для всех x с $h(x) > 0$.

Дифференциальные пространства

Пара, состоящая из множества X и дифференциальной структуры класса C^r на X называется дифференциальным пространством класса C^r

Дифференциальные пространства

Пара, состоящая из множества X и дифференциальной структуры класса C^r на X называется дифференциальным пространством класса C^r, или просто C^r-пространством.

Дифференциальные пространства

Пара, состоящая из множества X и дифференциальной структуры класса C^r на X называется дифференциальным пространством класса C^r, или просто C^r-пространством.

Примеры

Дифференциальные пространства

Пара, состоящая из множества X и дифференциальной структуры класса C^r на X называется дифференциальным пространством класса C^r, или просто C^r-пространством.

Примеры

1. Гладкое многообразие. Любое гладкое многообразие X с алгеброй $\mathcal{C}^r(X)$ C^r-дифференцируемых функций $X \to \mathbb{R}$.

Дифференциальные пространства

Пара, состоящая из множества X и дифференциальной структуры класса C^r на X называется дифференциальным пространством класса C^r, или просто C^r-пространством.

Примеры

1. Гладкое многообразие. Любое гладкое многообразие X с алгеброй $\mathcal{C}^r(X)$ C^r-дифференцируемых функций $X \to \mathbb{R}$.
2. Дискретное пространство. Любое X и все-все функции $X \to \mathbb{R}$.

Дифференциальные пространства

Пара, состоящая из множества X и дифференциальной структуры класса C^r на X называется дифференциальным пространством класса C^r, или просто C^r-пространством.

Примеры

1. Гладкое многообразие. Любое гладкое многообразие X с алгеброй $\mathcal{C}^r(X)$ C^r-дифференцируемых функций $X \to \mathbb{R}$.
2. Дискретное пространство. Любое X и все-все функции $X \to \mathbb{R}$.
3. Антидискретное пространство. Любое X и все постоянные функции $X \to \mathbb{R}$.

Дифференциальные пространства

Пара, состоящая из множества X и дифференциальной структуры класса C^r на X называется дифференциальным пространством класса C^r, или просто C^r-пространством.

Примеры

1. Гладкое многообразие. Любое гладкое многообразие X с алгеброй $\mathcal{C}^r(X)$ C^r-дифференцируемых функций $X \to \mathbb{R}$.
2. Дискретное пространство. Любое X и все-все функции $X \to \mathbb{R}$.
3. Антидискретное пространство. Любое X и все постоянные функции $X \to \mathbb{R}$.
4. Топологическое пространство. Любое топологическое пространство X со всеми непрерывными функциями $X \to \mathbb{R}$.

Дифференцируемые отображения

Пусть X и Y — C^r-пространства.

Дифференцируемые отображения

Пусть X и Y — C^r-пространства.

$f : X \to Y$ называется C^r-отображением,

если $f \circ \phi \in \mathcal{C}^r(X)$ для любой функции $\phi \in \mathcal{C}^r(Y)$.

Дифференцируемые отображения

Пусть X и Y — C^r-пространства.

$f : X \to Y$ называется C^r-отображением, если $f \circ \phi \in \mathcal{C}^r(X)$ для любой функции $\phi \in \mathcal{C}^r(Y)$.

C^r-отображение $f : X \to Y$ порождает $f^* : \mathcal{C}^r(Y) \to \mathcal{C}^r(X)$.

Дифференцируемые отображения

Пусть X и Y — C^r-пространства.

$f : X \to Y$ называется C^r-отображением, если $f \circ \phi \in \mathcal{C}^r(X)$ для любой функции $\phi \in \mathcal{C}^r(Y)$.

C^r-отображение $f : X \to Y$ порождает $f^* : \mathcal{C}^r(Y) \to \mathcal{C}^r(X)$.

C^r-пространства и C^r-отображения составляют категорию.

Дифференцируемые отображения

Пусть X и Y — C^r-пространства.

$f : X \to Y$ называется C^r-отображением, если $f \circ \phi \in \mathcal{C}^r(X)$ для любой функции $\phi \in \mathcal{C}^r(Y)$.

C^r-отображение $f : X \to Y$ порождает $f^* : \mathcal{C}^r(Y) \to \mathcal{C}^r(X)$.

C^r-пространства и C^r-отображения составляют категорию.

В ней изоморфизмы называются C^r-диффеоморфизмами.

Порождение, утоньшение, ослабление

Для любого набора $\mathcal{F}$ вещественно-значных функций на множестве X,

Порождение, утоньшение, ослабление

Для любого набора $\mathcal{F}$ вещественно-значных функций на множестве X, существует наименьшая C^r-структура на X, содержащая $\mathcal{F}$.

Порождение, утоньшение, ослабление

Для любого набора $\mathcal{F}$ вещественно-значных функций на множестве X, существует наименьшая C^r-структура на X, содержащая $\mathcal{F}$.
Говорят, что она порождена набором $\mathcal{F}$.

Порождение, утоньшение, ослабление

Для любого набора $\mathcal{F}$ вещественно-значных функций на множестве X, существует наименьшая C^r-структура на X, содержащая $\mathcal{F}$.
Говорят, что она порождена набором $\mathcal{F}$.

Например, координатные проекции $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ порождают стандартную дифференциальную структуру на $\mathbb{R}^n$.

Порождение, утоньшение, ослабление

Для любого набора $\mathcal{F}$ вещественно-значных функций на множестве X, существует наименьшая C^r-структура на X, содержащая $\mathcal{F}$.
Говорят, что она порождена набором $\mathcal{F}$.

C^r-структура, порождаемая C^s-структурой $\mathcal{C}$ с $s < r$, совпадает с $\mathcal{C}$.

Порождение, утоньшение, ослабление

Для любого набора $\mathcal{F}$ вещественно-значных функций на множестве X, существует наименьшая C^r-структура на X, содержащая $\mathcal{F}$.
Говорят, что она порождена набором $\mathcal{F}$.

C^r-структура, порождаемая C^s-структурой $\mathcal{C}$ с $s < r$, совпадает с $\mathcal{C}$.

Например, C^0-структура

Порождение, утоньшение, ослабление

Для любого набора $\mathcal{F}$ вещественно-значных функций на множестве X, существует наименьшая C^r-структура на X, содержащая $\mathcal{F}$.
Говорят, что она порождена набором $\mathcal{F}$.

C^r-структура, порождаемая C^s-структурой $\mathcal{C}$ с $s < r$, совпадает с $\mathcal{C}$.

Например, C^0-структура

т.е. топологическая структура

Порождение, утоньшение, ослабление

Для любого набора $\mathcal{F}$ вещественно-значных функций на множестве X, существует наименьшая C^r-структура на X, содержащая $\mathcal{F}$. Говорят, что она порождена набором $\mathcal{F}$.

C^r-структура, порождаемая C^s-структурой $\mathcal{C}$ с $s < r$, совпадает с $\mathcal{C}$.

Например, C^0-структура является C^r-структурой для любого r.

Порождение, утоньшение, ослабление

Для любого набора $\mathcal{F}$ вещественно-значных функций на множестве X, существует наименьшая C^r-структура на X, содержащая $\mathcal{F}$.
Говорят, что она порождена набором $\mathcal{F}$.

C^r-структура, порождаемая C^s-структурой $\mathcal{C}$ с $s < r$, совпадает с $\mathcal{C}$.

Например, C^0-структура является C^r-структурой для любого r.
С другой стороны, уменьшая r,
мы должны добавить новые функции.

Порождение, утоньшение, ослабление

Для любого набора $\mathcal{F}$ вещественно-значных функций на множестве X, существует наименьшая C^r-структура на X, содержащая $\mathcal{F}$. Говорят, что она порождена набором $\mathcal{F}$.

C^r-структура, порождаемая C^s-структурой $\mathcal{C}$ с $s < r$, совпадает с $\mathcal{C}$.

Например, C^0-структура является C^r-структурой для любого r.
С другой стороны, уменьшая r,
мы должны добавить новые функции.

C^r-структура $\mathcal{A}$, порождённая как C^r-структура C^s-структурой $\mathcal{B}$ с $s > r$ называется ослаблением структуры $\mathcal{B}$.

Порождение, утоньшение, ослабление

Для любого набора $\mathcal{F}$ вещественно-значных функций на множестве X, существует наименьшая C^r-структура на X, содержащая $\mathcal{F}$.
Говорят, что она порождена набором $\mathcal{F}$.

C^r-структура, порождаемая C^s-структурой $\mathcal{C}$ с $s < r$, совпадает с $\mathcal{C}$.

Например, C^0-структура является C^r-структурой для любого r.
С другой стороны, уменьшая r,
мы должны добавить новые функции.

C^r-структура $\mathcal{A}$, порождённая как C^r-структура C^s-структурой $\mathcal{B}$ с $s > r$ называется ослаблением структуры $\mathcal{B}$.
При этом $\mathcal{B}$ называется утоньшением структуры $\mathcal{A}$.

Подпространства

Пусть X – дифференциальное пространство и $A \subset X$.

Подпространства

Пусть X – дифференциальное пространство и $A \subset X$.
Сужения на A функций, дифференцируемых на X,

Подпространства

Пусть X – дифференциальное пространство и $A \subset X$.

Сужения на A функций, дифференцируемых на X, не обязательно составляют дифференциальную структуру на A.

Подпространства

Пусть X – дифференциальное пространство и $A \subset X$.

Сужения на A функций, дифференцируемых на X, не обязательно составляют дифференциальную структуру на A.

Например, если $X = \mathbb{R}$ и $A = \mathbb{R}_{>0} = \{x \mid x > 0\}$,

Подпространства

Пусть X – дифференциальное пространство и $A \subset X$.
Сужения на A функций, дифференцируемых на X, не обязательно составляют дифференциальную структуру на A.

Например, если $X = \mathbb{R}$ и $A = \mathbb{R}_{>0} = \{x \mid x > 0\}$, то $A \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ не есть сужение какой бы то ни было функции, непрерывной на $\mathbb{R}$,

Подпространства

Пусть X – дифференциальное пространство и $A \subset X$.
Сужения на A функций, дифференцируемых на X, не обязательно составляют дифференциальную структуру на A.

Например, если $X = \mathbb{R}$ и $A = \mathbb{R}_{>0} = \{x \mid x > 0\}$, то $A \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ не есть сужение какой бы то ни было функции, непрерывной на $\mathbb{R}$,

но в окрестности каждой точки она является сужением функции, дифференцируемой на $\mathbb{R}$.

Подпространства

Пусть X – дифференциальное пространство и $A \subset X$.
Сужения на A функций, дифференцируемых на X, не обязательно составляют дифференциальную структуру на A.

Сужения на A функций, дифференцируемых на X, порождают дифференциальную структуру.

Подпространства

Пусть X – дифференциальное пространство и $A \subset X$.
Сужения на A функций, дифференцируемых на X, не обязательно составляют дифференциальную структуру на A.

Сужения на A функций, дифференцируемых на X, порождают дифференциальную структуру.

Говорят, что эта структура индуцирована на A структурой объемлющего дифференциального пространства X

Подпространства

Пусть X – дифференциальное пространство и $A \subset X$.

Сужения на A функций, дифференцируемых на X, не обязательно составляют дифференциальную структуру на A.

Сужения на A функций, дифференцируемых на X, порождают дифференциальную структуру.

Говорят, что эта структура индуцирована на A структурой объемлющего дифференциального пространства X,

а A, с этой структурой, называется (дифференциальным) подпространством дифференциального пространства X.

Подпространства

Пусть X – дифференциальное пространство и $A \subset X$.

Сужения на A функций, дифференцируемых на X, не обязательно составляют дифференциальную структуру на A.

Сужения на A функций, дифференцируемых на X, порождают дифференциальную структуру.

Говорят, что эта структура индуцирована на A структурой объемлющего дифференциального пространства X,

а A, с этой структурой, называется (дифференциальным) подпространством дифференциального пространства X.

Проблема Уитни: Описать дифференциальную структуру, индуцированную на замкнутом $X \subset \mathbb{R}^n$.

Вложения

Пусть X и Y — дифференциальные пространства (класса C^r).

Вложения

Пусть X и Y — дифференциальные пространства (класса C^r).
Отображение $f : X \to Y$ называется **дифференциальным вложением**,
если оно определяет диффеоморфизм $X \to f(X)$.

Вложения

Пусть X и Y — дифференциальные пространства (класса C^r).
Отображение $f : X \to Y$ называется дифференциальным вложением,
если оно определяет диффеоморфизм $X \to f(X)$.
(Здесь $f(X)$ рассматривается как подпространство пространства Y).

Вложения

Пусть X и Y — дифференциальные пространства (класса C^r).
Отображение $f : X \to Y$ называется **дифференциальным вложением**,
если оно определяет диффеоморфизм $X \to f(X)$.
(Здесь $f(X)$ рассматривается как подпространство пространства Y).

Функции $f_1, \ldots, f_n$ определяют дифференциальное вложение $f : X \to \mathbb{R}^n : x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x))$

Вложения

Пусть X и Y — дифференциальные пространства (класса C^r).
Отображение $f : X \to Y$ называется **дифференциальным вложением**,
если оно определяет диффеоморфизм $X \to f(X)$.
(Здесь $f(X)$ рассматривается как подпространство пространства Y).

Функции $f_1, \ldots, f_n$ определяют дифференциальное вложение $f : X \to \mathbb{R}^n : x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ тогда и только тогда, когда $f_1, \ldots, f_n$ порождают $\mathcal{C}^r(X)$ и f инъективно.

Примеры

Первое упражнение

Рассмотрим множество $\mathcal{C}$ всех дифференцируемых функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с $f'(0) = 0$.

Первое упражнение

Рассмотрим множество $\mathcal{C}$ всех дифференцируемых функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с $f'(0) = 0$. Это — дифференциальная структура.

Первое упражнение

Рассмотрим множество $\mathcal{C}$ всех дифференцируемых функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с $f'(0) = 0$. Это — дифференциальная структура.

Как дифференциальное пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$ выглядит? Вложимо ли оно в $\mathbb{R}^2$?

Первое упражнение

Рассмотрим множество $\mathcal{C}$ всех дифференцируемых функций $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ с $f'(0)=0$. Это — дифференциальная структура.
Как дифференциальное пространство $(\mathbb{R},\mathcal{C})$ выглядит? Вложимо ли оно в $\mathbb{R}^2$?

Требуются функции $u,v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ с $u'(0)=v'(0)=0$ такие, что любая дифференцируемая функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ с $f'(0)=0$ была бы композицией $F\circ(u\times v)$ для некоторого дифференцируемого $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

Первое упражнение

Рассмотрим множество $\mathcal{C}$ всех дифференцируемых функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с $f'(0) = 0$. Это — дифференциальная структура.
Как дифференциальное пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$ выглядит? Вложимо ли оно в $\mathbb{R}^2$?

Требуются функции $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с $u'(0) = v'(0) = 0$ такие, что любая дифференцируемая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с $f'(0) = 0$ была бы композицией $F \circ (u \times v)$ для некоторого дифференцируемого $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Ответ: $u(x) = x^2$, $v(x) = x^3$.

Первое упражнение

Рассмотрим множество $\mathcal{C}$ всех дифференцируемых функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с $f'(0) = 0$. Это — дифференциальная структура.

Как дифференциальное пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$ выглядит? Вложимо ли оно в $\mathbb{R}^2$?

Итак, вложение определяется формулами:

$u(x) = x^2$, $v(x) = x^3$.

Первое упражнение

Рассмотрим множество $\mathcal{C}$ всех дифференцируемых функций $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ с $f'(0)=0$. Это — дифференциальная структура.
Как дифференциальное пространство $(\mathbb{R},\mathcal{C})$ выглядит? Вложимо ли оно в $\mathbb{R}^2$?

Итак, вложение определяется формулами:
$u(x)=x^2$, $v(x)=x^3$.

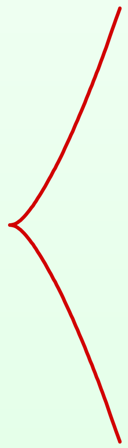
Это параметризация полукубической параболы:

Первое упражнение

Рассмотрим множество $\mathcal{C}$ всех дифференцируемых функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с $f'(0) = 0$. Это — дифференциальная структура.
Как дифференциальное пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$ выглядит? Вложимо ли оно в $\mathbb{R}^2$?

Итак, вложение определяется формулами:
$u(x) = x^2$, $v(x) = x^3$.

Это параметризация полукубической параболы:



Конструкции

Умножение. Пусть X и Y — C^r-пространства.

Конструкции

Умножение. Пусть X и Y — C^r-пространства. C^r-структура в $X \times Y$

Конструкции

Умножение. Пусть X и Y — C^r-пространства. C^r-структура в $X \times Y$ порождается множеством $\{f \circ pr_X \mid f \in \mathcal{C}^r(X)\} \cup \{g \circ pr_Y \mid g \in \mathcal{C}^r(Y)\}$.

Конструкции

Умножение. Пусть X и Y — C^r-пространства. C^r-структура в $X \times Y$ порождается множеством $\{f \circ pr_X \mid f \in \mathcal{C}^r(X)\} \cup \{g \circ pr_Y \mid g \in \mathcal{C}^r(Y)\}$.

Факторизация. Пусть X — C^r-пространство и $\sim$ — отношение эквивалентности в X.

Конструкции

Умножение. Пусть X и Y — C^r-пространства. C^r-структура в $X \times Y$ порождается множеством $\{f \circ pr_X \mid f \in \mathcal{C}^r(X)\} \cup \{g \circ pr_Y \mid g \in \mathcal{C}^r(Y)\}$.

Факторизация. Пусть X — C^r-пространство и $\sim$ — отношение эквивалентности в X. C^r-структура в фактормножестве $X/\sim$, канонически определяемая структурой $\mathcal{C}^r(X)$,

Конструкции

Умножение. Пусть X и Y — C^r-пространства. C^r-структура в $X \times Y$ порождается множеством $\{f \circ pr_X \mid f \in \mathcal{C}^r(X)\} \cup \{g \circ pr_Y \mid g \in \mathcal{C}^r(Y)\}$.

Факторизация. Пусть X — C^r-пространство и $\sim$ — отношение эквивалентности в X. C^r-структура в факторномножестве $X/{\sim}$, канонически определяемая структурой $\mathcal{C}^r(X)$, состоит из таких $f : X/{\sim} \to \mathbb{R}$, что $(f \circ pr : X \to \mathbb{R}) \in \mathcal{C}^r(X)$.

Примеры факторпространств

1. Какое дифференциальное пространство получается в результате отождествления концов сегмента $[0, 1]$?

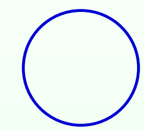
Примеры факторпространств

1. Какое дифференциальное пространство получается в результате отождествления концов сегмента $[0,1]$? Вложимо ли оно в $\mathbb{R}^2$?

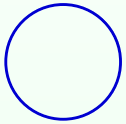
Примеры факторпространств

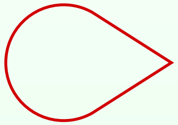
1. Какое дифференциальное пространство получается в результате отождествления концов сегмента $[0, 1]$? Вложимо ли оно в $\mathbb{R}^2$? и если да, то как выглядит образ?

Примеры факторпространств

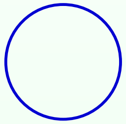
1. Какое дифференциальное пространство получается в результате отождествления концов сегмента $[0, 1]$? Вложимо ли оно в $\mathbb{R}^2$? и если да, то как выглядит образ? Вот так:  ?

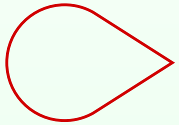
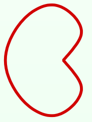
Примеры факторпространств

1. Какое дифференциальное пространство получается в результате отождествления концов сегмента $[0,1]$? Вложимо ли оно в $\mathbb{R}^2$? и если да, то как выглядит образ? Вот так:  ?

Нет, вот так:  !

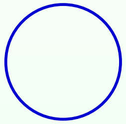
Примеры факторпространств

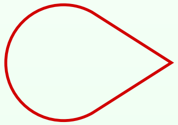
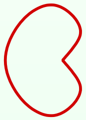
1. Какое дифференциальное пространство получается в результате отождествления концов сегмента $[0,1]$? Вложимо ли оно в $\mathbb{R}^2$? и если да, то как выглядит образ? Вот так:  ?

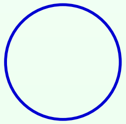
Нет, вот так:  ! Или так:  !

Примеры факторпространств

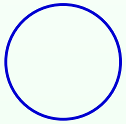
1. Какое дифференциальное пространство получается в результате отождествления концов сегмента $[0,1]$? Вложимо ли оно в $\mathbb{R}^2$?

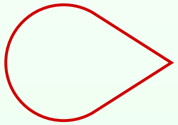
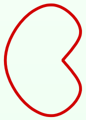
и если да, то как выглядит образ? Вот так:  ?

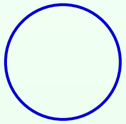
Нет, вот так:  ! Или так:  !

Но только не так:  !

Примеры факторпространств

1. Какое дифференциальное пространство получается в результате отождествления концов сегмента $[0,1]$? Вложимо ли оно в $\mathbb{R}^2$? и если да, то как выглядит образ? Вот так:  ?

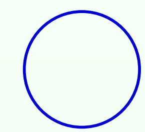
Нет, вот так:  ! Или так:  !

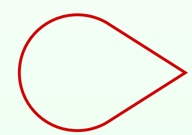
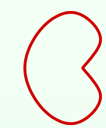
Но только не так:  !

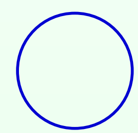
2. А что если взять $[0,1.5]$ и отождествить каждую точку $x \in [0,0.5]$ с $x+1$?

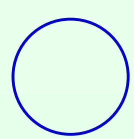
Примеры факторпространств

1. Какое дифференциальное пространство получается в результате отождествления концов сегмента $[0, 1]$? Вложимо ли оно в $\mathbb{R}^2$?

и если да, то как выглядит образ? Вот так:  ?

Нет, вот так:  ! Или так:  !

Но только не так:  !

2. А что если взять $[0, 1.5]$ и отождествить каждую точку $x \in [0, 0.5]$ с $x + 1$?
Вот тогда результат действительно диффеоморфен  .

Новая факторизация

Отождествляя концы сегмента $[0,1]$, отождествим также и касательные векторы!

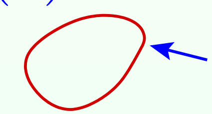
Новая факторизация

Отождествляя концы сегмента $[0,1]$, отождествим также и касательные векторы!
То есть рассмотрим функции $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ с $f(0)=f(1)$ и $f'(0)=-f'(1)$.

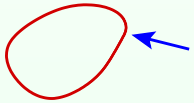
Новая факторизация

Отождествляя концы сегмента $[0,1]$, отождествим также и касательные векторы!

То есть рассмотрим функции $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ с $f(0) = f(1)$ и $f'(0) = -f'(1)$.

Получится пространство:  .

Новая факторизация

Отождествляя концы сегмента $[0, 1]$, отождествим также и касательные векторы!
То есть рассмотрим функции $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ с $f(0) = f(1)$ и $f'(0) = -f'(1)$.
Получится пространство:  . Гладкое, но с разрывной кривизной.

Касательные векторы

Касательные векторы

Пусть X — дифференциальное пространство и $p \in X$.

Касательные векторы

Пусть X — дифференциальное пространство и $p \in X$. Функции, обращающиеся в ноль в p, составляют максимальный идеал m_p $\mathbb{R}$-алгебры $\mathcal{C}^r(X)$.

Касательные векторы

Пусть X — дифференциальное пространство и $p \in X$. Функции, обращающиеся в ноль в p, составляют максимальный идеал m_p $\mathbb{R}$-алгебры $\mathcal{C}^r(X)$. Кокасательное пространство $T_p^*(X)$ определяется как m_p/m_p^2.

Касательные векторы

Пусть X — дифференциальное пространство и $p \in X$. Функции, обращающиеся в ноль в p, составляют максимальный идеал m_p $\mathbb{R}$-алгебры $\mathcal{C}^r(X)$. Кокасательное пространство $T_p^*(X)$ определяется как m_p/m_p^2.

Касательное пространство $T_p(X)$ двойственно к $T_p^*(X)$.

Касательные векторы

Пусть X — дифференциальное пространство и $p \in X$. Функции, обращающиеся в ноль в p, составляют максимальный идеал m_p $\mathbb{R}$-алгебры $\mathcal{C}^r(X)$. Кокасательное пространство $T_p^*(X)$ определяется как m_p/m_p^2.

Касательное пространство $T_p(X)$ двойственно к $T_p^*(X)$.
Его можно определить как пространство дифференцирований дифференцируемых функций на X в p.

Касательные векторы

Пусть X — дифференциальное пространство и $p \in X$. Функции, обращающиеся в ноль в p, составляют максимальный идеал m_p $\mathbb{R}$-алгебры $\mathcal{C}^r(X)$. Кокасательное пространство $T_p^*(X)$ определяется как m_p/m_p^2.

Касательное пространство $T_p(X)$ двойственно к $T_p^*(X)$.
Его можно определить как пространство дифференцирований дифференцируемых функций на X в p. Как обычно.

Касательные векторы

Пусть X — дифференциальное пространство и $p \in X$. Функции, обращающиеся в ноль в p, составляют максимальный идеал m_p $\mathbb{R}$-алгебры $\mathcal{C}^r(X)$. Кокасательное пространство $T_p^*(X)$ определяется как m_p/m_p^2.

Касательное пространство $T_p(X)$ двойственно к $T_p^*(X)$.
Его можно определить как пространство дифференцирований дифференцируемых функций на X в p. Как обычно.

Другое определение касательных векторов (через эквивалентность гладких путей)

Касательные векторы

Пусть X — дифференциальное пространство и $p \in X$. Функции, обращающиеся в ноль в p, составляют максимальный идеал m_p $\mathbb{R}$-алгебры $\mathcal{C}^r(X)$. Кокасательное пространство $T_p^*(X)$ определяется как m_p/m_p^2.

Касательное пространство $T_p(X)$ двойственно к $T_p^*(X)$.
Его можно определить как пространство дифференцирований дифференцируемых функций на X в p. Как обычно.

Другое определение касательных векторов (через эквивалентность гладких путей) даёт другой результат

Касательные векторы

Пусть X — дифференциальное пространство и $p \in X$. Функции, обращающиеся в ноль в p, составляют максимальный идеал m_p $\mathbb{R}$-алгебры $\mathcal{C}^r(X)$. Кокасательное пространство $T_p^*(X)$ определяется как m_p/m_p^2.

Касательное пространство $T_p(X)$ двойственно к $T_p^*(X)$.
Его можно определить как пространство дифференцирований дифференцируемых функций на X в p. Как обычно.

Другое определение касательных векторов (через эквивалентность гладких путей) даёт другой результат и не даёт векторного пространства.

Размерности

$\dim T_p^*(X)$ может отличаться от топологической размерности пространства X в p.

Размерности

$\dim T_p^*(X)$ может отличаться от топологической размерности пространства X в p.
Например, $\dim_0[0,1]/(0 \sim 1) = 2$.

Размерности

$\dim T_p^*(X)$ может отличаться от топологической размерности пространства X в p.
Например, $\dim_0[0,1]/(0 \sim 1) = 2$.

Если $\mathcal{C}^r(X)$ — множество всех непрерывных функций на топологическом пространстве X, то $\dim T_p^*(X) = 0$.

Размерности

$\dim T_p^*(X)$ может отличаться от топологической размерности пространства X в p.
Например, $\dim_0 [0,1]/(0 \sim 1) = 2$.

Если $\mathcal{C}^r(X)$ — множество всех непрерывных функций на топологическом пространстве X, то $\dim T_p^*(X) = 0$.

Факторпространство $D^2/\partial D^2$ круга D^2 гомеоморфно сфере S^2.

Размерности

$\dim T^*_p(X)$ может отличаться от топологической размерности пространства X в p.
Например, $\dim_0[0,1]/(0 \sim 1) = 2$.

Если $\mathcal{C}^r(X)$ — множество всех непрерывных функций на топологическом пространстве X, то $\dim T^*_p(X) = 0$.

Факторпространство $D^2/\partial D^2$ круга D^2 гомеоморфно сфере S^2.
Какова $\dim_{\partial D^2/\partial D^2}(D^2/\partial D^2)$?

Размерности

$\dim T_p^*(X)$ может отличаться от топологической размерности пространства X в p.
Например, $\dim_0 [0,1]/(0 \sim 1) = 2$.

Если $\mathcal{C}^r(X)$ — множество всех непрерывных функций на топологическом пространстве X, то $\dim T_p^*(X) = 0$.

Факторпространство $D^2/\partial D^2$ круга D^2 гомеоморфно сфере S^2.
Какова $\dim_{\partial D^2/\partial D^2}(D^2/\partial D^2)$?
Бесконечность!

Метрические пространства

Каждое метрическое пространство дифференциально!

Метрические пространства

Каждое метрическое пространство дифференциально!

Метрика даёт много функций:

Метрические пространства

Каждое метрическое пространство дифференциально!
Метрика даёт много функций:
расстояния до фиксированнных точек.

Метрические пространства

Каждое метрическое пространство дифференциально!
Метрика даёт много функций:
расстояния до фиксированнных точек.
Но на римановом многообразии они не дифференцируемы.

Метрические пространства

Каждое метрическое пространство дифференциально!
Метрика даёт много функций:
расстояния до фиксированнных точек.
Но на римановом многообразии они не дифференцируемы.

В достаточно малой окрестности точки расстояния до нескольких других точек составляют локальную систему координат.

Дифференцируемость в метрическом пространстве

Пусть X — метрическое пространство. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ дифференцируема в $p \in X$, если для любой окрестности U точки p существуют такие точки $q_1, \ldots, q_n \in U$ и вещественные числа $a_1, \ldots, a_n$, что

$$\frac{|f(x) - f(p) - \sum a_i(\operatorname{dist}(q_i, x) - \operatorname{dist}(q_i, p))|}{\operatorname{dist}(x, p)} \to 0$$

при $x \to p$.

Дифференцируемость в метрическом пространстве

Пусть X — метрическое пространство. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ дифференцируема в $p \in X$, если для любой окрестности U точки p существуют такие точки $q_1, \ldots, q_n \in U$ и вещественные числа $a_1, \ldots, a_n$, что

$$\frac{|f(x) - f(p) - \sum a_i(\operatorname{dist}(q_i, x) - \operatorname{dist}(q_i, p))|}{\operatorname{dist}(x, p)} \to 0$$

при $x \to p$.

Хорошо ли это определение?

Дифференцируемость в метрическом пространстве

Пусть X — метрическое пространство. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ дифференцируема в $p \in X$, если для любой окрестности U точки p существуют такие точки $q_1, \dots, q_n \in U$ и вещественные числа a_1, …, a_n, что

$$\frac{|f(x) - f(p) - \sum a_i(\operatorname{dist}(q_i, x) - \operatorname{dist}(q_i, p))|}{\operatorname{dist}(x, p)} \to 0$$

при $x \to p$.

Хорошо ли это определение?

На римановом многообразии оно даёт изначальную дифференциальную структуру.

Конечные топологические пространства

Неуважение к конечным пространствам

Неуважение к конечным пространствам

Топология – наверно единственная область математики, стесняющаяся своих конечных объектов.

Неуважение к конечным пространствам

Топология – наверно единственная область математики, стесняющаяся своих конечных объектов.

Конечные множества, конечномерные векторные пространства, конечные поля, конечные проективные пространства и т.п. занимают почётные места в своих областях.

Неуважение к конечным пространствам

Топология – наверно единственная область математики, стесняющаяся своих конечных объектов.

Кто виноват?

Неуважение к конечным пространствам

Топология – наверно единственная область математики, стесняющаяся своих конечных объектов.
Кто виноват? Интерес к анализу?

Неуважение к конечным пространствам

Топология – наверно единственная область математики, стесняющаяся своих конечных объектов.

Кто виноват? Интерес к анализу?Аксиома Хаусдорфа?

Неуважение к конечным пространствам

Топология – наверно единственная область математики, стесняющаяся своих конечных объектов.

Кто виноват? Интерес к анализу?Аксиома Хаусдорфа? Учебники топологии?

Неуважение к конечным пространствам

Топология – наверно единственная область математики, стесняющаяся своих конечных объектов.
Кто виноват? Интерес к анализу?Аксиома Хаусдорфа? Учебники топологии?

Первый попавшийся математик знает в лучшем случае о конечных топологических пространствах двух сортов:

Неуважение к конечным пространствам

Топология – наверно единственная область математики, стесняющаяся своих конечных объектов.
Кто виноват? Интерес к анализу?Аксиома Хаусдорфа? Учебники топологии?

Первый попавшийся математик знает в лучшем случае о конечных топологических пространствах двух сортов: дискретных и антидискретных.

Неуважение к конечным пространствам

Топология – наверно единственная область математики, стесняющаяся своих конечных объектов.
Кто виноват? Интерес к анализу?Аксиома Хаусдорфа? Учебники топологии?

Первый попавшийся математик знает в лучшем случае о конечных топологических пространствах двух сортов: дискретных и антидискретных.

Давайте посмотрим на прочие конечные топологические пространства.

Неуважение к конечным пространствам

Топология – наверно единственная область математики, стесняющаяся своих конечных объектов.
Кто виноват? Интерес к анализу?Аксиома Хаусдорфа? Учебники топологии?

Первый попавшийся математик знает в лучшем случае о конечных топологических пространствах двух сортов: дискретных и антидискретных.

Давайте посмотрим на прочие конечные топологические пространства.
Так ли уж они отвратительны?

Неуважение к конечным пространствам

Топология – наверно единственная область математики, стесняющаяся своих конечных объектов.
Кто виноват? Интерес к анализу?Аксиома Хаусдорфа? Учебники топологии?

Первый попавшийся математик знает в лучшем случае о конечных топологических пространствах двух сортов: дискретных и антидискретных.

Давайте посмотрим на прочие конечные топологические пространства.
Так ли уж они отвратительны?
На заре топологии они были главными объектами исследования

Неуважение к конечным пространствам

Топология – наверно единственная область математики, стесняющаяся своих конечных объектов.
Кто виноват? Интерес к анализу?Аксиома Хаусдорфа? Учебники топологии?

Первый попавшийся математик знает в лучшем случае о конечных топологических пространствах двух сортов: дискретных и антидискретных.

Давайте посмотрим на прочие конечные топологические пространства.
Так ли уж они отвратительны?
На заре топологии они были главными объектами исследования комбинаторной топологии.

Фундаментальная группа

Фундаментальная группа

Каково наименьшее число точек пространства с нетривиальной фундаментальной группой?

Фундаментальная группа

Каково наименьшее число точек пространства с нетривиальной фундаментальной группой?

Какова группа?

Фундаментальная группа

Каково наименьшее число точек пространства с нетривиальной фундаментальной группой?

Какова группа?

Следующая группа?

Пространства клеток

Пусть P – компактный полиэдр.

Пространства клеток

Пусть P – компактный полиэдр, представленный в виде объединения замкнутых выпуклых полиэдров, любые два из которых пересекаются по общей грани.

Пространства клеток

Пусть P – компактный полиэдр, представленный в виде объединения замкнутых выпуклых полиэдров, любые два из которых пересекаются по общей грани.

P разбивается на открытые грани этих выпуклых полиэдров.

Пространства клеток

Пусть P – компактный полиэдр, представленный в виде объединения замкнутых выпуклых полиэдров, любые два из которых пересекаются по общей грани. P разбивается на открытые грани этих выпуклых полиэдров.

Факторпространство Q по этому разбиению – конечное топологическое пространство.

Пространства клеток

Пусть P – компактный полиэдр, представленный в виде объединения замкнутых выпуклых полиэдров, любые два из которых пересекаются по общей грани. P разбивается на открытые грани этих выпуклых полиэдров.

Факторпространство Q по этому разбиению – конечное топологическое пространство.
Q знает всё о P.

Пространства клеток

Пусть P – компактный полиэдр, представленный в виде объединения замкнутых выпуклых полиэдров, любые два из которых пересекаются по общей грани.

P разбивается на открытые грани этих выпуклых полиэдров.

Факторпространство Q по этому разбиению – конечное топологическое пространство.

Q знает всё о P.

Совсем всё в случае триангуляции.

Пространства клеток

Пусть P – компактный полиэдр, представленный в виде объединения замкнутых выпуклых полиэдров, любые два из которых пересекаются по общей грани. P разбивается на открытые грани этих выпуклых полиэдров.

Факторпространство Q по этому разбиению – конечное топологическое пространство.

Q знает всё о P.
Совсем всё в случае триангуляции.
Всегда всё о топологии пространства P.

Пространства клеток

Точки пространства Q представляют клетки полиэдра P.

Пространства клеток

Точки пространства Q представляют клетки полиэдра P.
Точки, представляющие вершины, замкнуты.

Пространства клеток

Точки пространства Q представляют клетки полиэдра P.
Замыкание точки $x \in Q$ состоит из точек, отвечающих граням соответствующей клетки полиэдра P.

Пространства клеток

Точки пространства Q представляют клетки полиэдра P.
Замыкание точки $x \in Q$ состоит из точек, отвечающих граням соответствующей клетки полиэдра P.
У точки в конечном пространстве имеется наименьшая окрестность.

Пространства клеток

Точки пространства Q представляют клетки полиэдра P.
Замыкание точки $x \in Q$ состоит из точек, отвечающих граням соответствующей клетки полиэдра P.
У точки в конечном пространстве имеется наименьшая окрестность,
пересечение всех её окрестностей.

Пространства клеток

Точки пространства Q представляют клетки полиэдра P.
Замыкание точки $x \in Q$ состоит из точек, отвечающих граням соответствующей клетки полиэдра P.
В Q наименьшая окрестность точки отвечает звезде соответствующей клетки.

Пространства клеток

Точки пространства Q представляют клетки полиэдра P.
Замыкание точки $x \in Q$ состоит из точек, отвечающих граням соответствующей клетки полиэдра P.
В Q наименьшая окрестность точки отвечает звезде соответствующей клетки.
Звезда $St(\sigma)$ клетки σ есть объединение всех клеток Σ, таких что $\partial\Sigma \supset \sigma$.

Пространства клеток

Точки пространства Q представляют клетки полиэдра P.
Замыкание точки $x \in Q$ состоит из точек, отвечающих граням соответствующей клетки полиэдра P.
В Q наименьшая окрестность точки отвечает звезде соответствующей клетки.
Клетки в P частично упорядочены по примыканию: $\Sigma > \sigma$ согда $\mathrm{Cl}(\Sigma) \supset \sigma$.

Пространства клеток

Точки пространства Q представляют клетки полиэдра P.
Замыкание точки $x \in Q$ состоит из точек, отвечающих граням соответствующей клетки полиэдра P.
В Q наименьшая окрестность точки отвечает звезде соответствующей клетки.
Клетки в P частично упорядочены по примыканию: $\Sigma > \sigma$ согда $\mathrm{Cl}(\Sigma) \supset \sigma$.

Частичный порядок определяет топологию пространства Q.

Пространства клеток

Точки пространства Q представляют клетки полиэдра P.
Замыкание точки $x \in Q$ состоит из точек, отвечающих граням соответствующей клетки полиэдра P.
В Q наименьшая окрестность точки отвечает звезде соответствующей клетки.
Клетки в P частично упорядочены по примыканию: $\Sigma > \sigma$ когда $\mathrm{Cl}(\Sigma) \supset \sigma$.

Частичный порядок определяет топологию пространства Q.

Топологическое пространство P восстанавливается по Q.

Гомотопии

Пусть P – триангулированный полиэдр

Гомотопии

Пусть P – триангулированный полиэдр,
Q – пространство его симплексов

Гомотопии

Пусть P – триангулированный полиэдр,
Q – пространство его симплексов
(факторпространство полиэдра P)

Гомотопии

Пусть P – триангулированный полиэдр,
Q – пространство его симплексов,
$pr : P \to Q$ – естественная проекция.

Гомотопии

Пусть P – триангулированный полиэдр,
Q – пространство его симплексов,
$pr : P \to Q$ – естественная проекция.

Для топологических пространств X и Y обозначим через $\pi(X, Y)$ множество гомотопических классов непрерывных отображений $X \to Y$.

Гомотопии

Пусть P – триангулированный полиэдр,
Q – пространство его симплексов,
$pr : P \to Q$ – естественная проекция.

Для топологических пространств X и Y обозначим через $\pi(X, Y)$ множество гомотопических классов непрерывных отображений $X \to Y$.

Теорема. Для любого топологического пространства X композиция с pr определяет биекцию $\pi(X, P) \to \pi(X, Q)$.

Гомотопии

Пусть P – триангулированный полиэдр,
Q – пространство его симплексов,
$pr : P \to Q$ – естественная проекция.

Теорема. Для любого топологического пространства X композиция с pr определяет биекцию $\pi(X, P) \to \pi(X, Q)$.

Следствие. Все гомотопические и (сингулярные) гомологические группы пространств P и Q канонически изоморфны.

Гомотопии

Пусть P – триангулированный полиэдр,
Q – пространство его симплексов,
$pr : P \to Q$ – естественная проекция.

Теорема. Для любого топологического пространства X композиция с pr определяет биекцию $\pi(X, P) \to \pi(X, Q)$.

Следствие. Все гомотопические и (сингулярные) гомологические группы пространств P и Q канонически изоморфны.

Следствие. Всякий компактный полиэдр слабо гомотопически эквивалентеи конечному топологическому пространству.

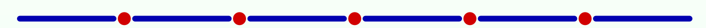
Цифровые плоскость и теорема Жордана

Цифровые плоскость и теорема Жордана

Цифровая прямая $\mathcal{D}$ есть факторпространство прямой $\mathbb{R}$ по разбиению на точки множества $\mathbb{Z}$ и интервалы $(n, n+1)$.

Цифровые плоскость и теорема Жордана

Цифровая прямая $\mathcal{D}$ есть факторпространство прямой $\mathbb{R}$ по разбиению на точки множества $\mathbb{Z}$ и интервалы $(n, n+1)$.



Цифровые плоскость и теорема Жордана

Цифровая прямая $\mathcal{D}$ есть факторпространство прямой $\mathbb{R}$ по разбиению на точки множества $\mathbb{Z}$ и интервалы $(n, n+1)$.

Цифровая плоскость $= \mathcal{D}^2$

Цифровые плоскость и теорема Жордана

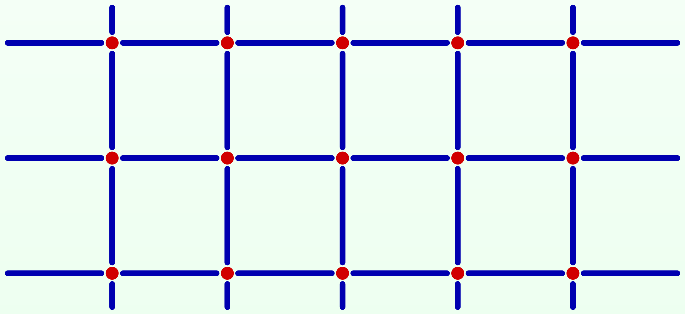
Цифровая прямая $\mathcal{D}$ есть факторпространство прямой $\mathbb{R}$ по разбиению на точки множества $\mathbb{Z}$ и интервалы $(n, n+1)$.

Цифровая плоскость $= \mathcal{D}^2$ $=$ факторпространство плоскости $\mathbb{R}^2$ по разбиению на точки с целыми координатами, открытые единичные интервалы и открытые единичные квадраты.

Цифровые плоскость и теорема Жордана

Цифровая прямая $\mathcal{D}$ есть факторпространство прямой $\mathbb{R}$ по разбиению на точки множества $\mathbb{Z}$ и интервалы $(n, n+1)$.

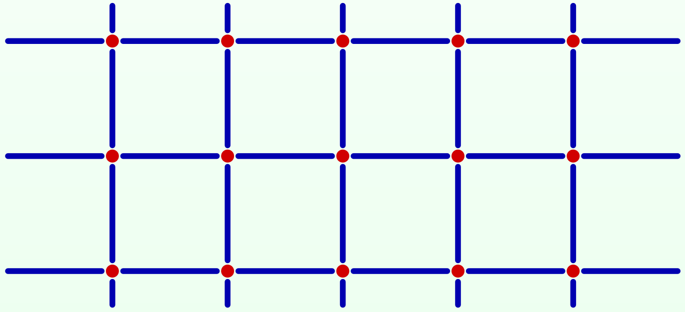
Цифровая плоскость $= \mathcal{D}^2$



Цифровые плоскость и теорема Жордана

Цифровая прямая $\mathcal{D}$ есть факторпространство прямой $\mathbb{R}$ по разбиению на точки множества $\mathbb{Z}$ и интервалы $(n, n+1)$.

Цифровая плоскость $= \mathcal{D}^2$

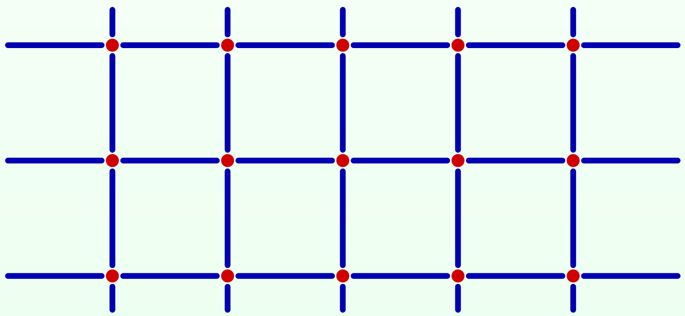


Цифровая окружность длины d – факторпространство окружности $S^1 \subset \mathbb{C}$ по разбиению, составленному из корней степени d из единицй и открытых дуг, соединяющих соседние корни из единицы.

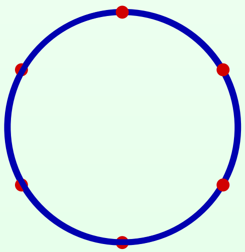
Цифровые плоскость и теорема Жордана

Цифровая прямая $\mathcal{D}$ есть факторпространство прямой $\mathbb{R}$ по разбиению на точки множества $\mathbb{Z}$ и интервалы $(n, n+1)$.

Цифровая плоскость $= \mathcal{D}^2$



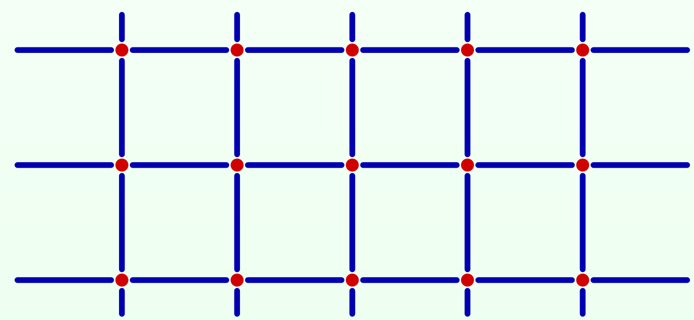
Цифровая окружность длины d –



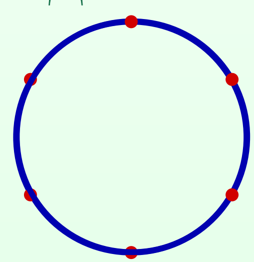
Цифровые плоскость и теорема Жордана

Цифровая прямая $\mathcal{D}$ есть факторпространство прямой $\mathbb{R}$ по разбиению на точки множества $\mathbb{Z}$ и интервалы $(n, n+1)$.

Цифровая плоскость $= \mathcal{D}^2$



Цифровая окружность длины d –



Цифровая теорема Жордана. Цифровая окружность, вложенная в цифровую плоскость, разбивает её на два связных множества.

Произвольное конечное пространство

T_0-эквивалентность в произвольном топологическом пространстве:

$x \sim y$, если x и y имеют одинаковые окрестности.

Произвольное конечное пространство

T_0-эквивалентность в произвольном топологическом пространстве:

$x \sim y$, если x и y имеют одинаковые окрестности.

Факторпространство по T_0-эквивалентности удовлетворяет колмогоровской аксиоме T_0:

Произвольное конечное пространство

T_0-эквивалентность в произвольном топологическом пространстве:

$x \sim y$, если x и y имеют одинаковые окрестности.

Факторпространство по T_0-эквивалентности удовлетворяет колмогоровской аксиоме T_0:

для любых точек x, y по меньшей мере одна имеет окрестность не содержащую другую.

Произвольное конечное пространство

T_0-эквивалентность в произвольном топологическом пространстве:

$x \sim y$, если x и y имеют одинаковые окрестности.
Факторпространство по T_0-эквивалентности удовлетворяет колмогоровской аксиоме T_0.
В T_0-пространстве $x \in \operatorname{Cl} y$ – частичный порядок.

Произвольное конечное пространство

T_0-эквивалентность в произвольном топологическом пространстве:

$x \sim y$, если x и y имеют одинаковые окрестности.

Факторпространство по T_0-эквивалентности удовлетворяет колмогоровской аксиоме T_0.

В T_0-пространстве $x \in \operatorname{Cl} y$ – частичный порядок.

Без T_0 это лишь предпорядок, т.е. транзитивность и рефлексивность есть, а антисимметричности нет.

Произвольное конечное пространство

T_0-эквивалентность в произвольном топологическом пространстве:

$x \sim y$, если x и y имеют одинаковые окрестности. Факторпространство по T_0-эквивалентности удовлетворяет колмогоровской аксиоме T_0.
В T_0-пространстве $x \in \operatorname{Cl} y$ – частичный порядок.
Без T_0 это лишь предпорядок, т.е. транзитивность и рефлексивность есть, а антисимметричности нет (если x и y T_0-эквивалентны, то $x \in \operatorname{Cl} y$ и $y \in \operatorname{Cl} x$).

Произвольное конечное пространство

T_0-эквивалентность в произвольном топологическом пространстве:

$x \sim y$, если x и y имеют одинаковые окрестности. Факторпространство по T_0-эквивалентности удовлетворяет колмогоровской аксиоме T_0.
В T_0-пространстве $x \in \mathrm{Cl}\, y$ – частичный порядок.

Любой частичный порядок определяет poset топологию, порождаемую множествами $\{x \mid a \prec x\}$.

Произвольное конечное пространство

T_0-эквивалентность в произвольном топологическом пространстве:

$x \sim y$, если x и y имеют одинаковые окрестности.
Факторпространство по T_0-эквивалентности удовлетворяет колмогоровской аксиоме T_0.
В T_0-пространстве $x \in \operatorname{Cl} y$ – частичный порядок.

Любой частичный порядок определяет чум(?) топологию, порождаемую множествами $\{x \mid a \prec x\}$.

Произвольное конечное пространство

T_0-эквивалентность в произвольном топологическом пространстве:

$x \sim y$, если x и y имеют одинаковые окрестности.
Факторпространство по T_0-эквивалентности удовлетворяет колмогоровской аксиоме T_0.
В T_0-пространстве $x \in \mathrm{Cl}\, y$ – частичный порядок.

Любой частичный порядок определяет чум(?) топологию, порождаемую множествами $\{x \mid a \prec x\}$.

Топология порождается частичным порядком $\Longleftrightarrow$ T_0 и каждая точка обладает наименьшей окрестностью.

Произвольное конечное пространство

T_0-эквивалентность в произвольном топологическом пространстве:

$x \sim y$, если x и y имеют одинаковые окрестности.
Факторпространство по T_0-эквивалентности удовлетворяет колмогоровской аксиоме T_0.
В T_0-пространстве $x \in \mathrm{Cl}\, y$ – частичный порядок.

Любой частичный порядок определяет чум(?) топологию, порождаемую множествами $\{x \mid a \prec x\}$.

Топология порождается частичным порядком $\iff$ T_0 и каждая точка обладает наименьшей окрестностью.

В частности, топология конечного пространства порождается частичным порядком $\iff$ T_0.

Произвольное конечное пространство

T_0-эквивалентность в произвольном топологическом пространстве:

$x \sim y$, если x и y имеют одинаковые окрестности.
Факторпространство по T_0-эквивалентности удовлетворяет колмогоровской аксиоме T_0.
В T_0-пространстве $x \in \mathrm{Cl}\, y$ – частичный порядок.

Любой частичный порядок определяет чум(?) топологию, порождаемую множествами $\{x \mid a \prec x\}$.

Топология порождается частичным порядком $\Longleftrightarrow$ T_0 и каждая точка обладает наименьшей окрестностью.

Произвольное конечное топологическое пространство составлено из кластеров T_0-эквивалентных точек.

Произвольное конечное пространство

T_0-эквивалентность в произвольном топологическом пространстве:

$x \sim y$, если x и y имеют одинаковые окрестности. Факторпространство по T_0-эквивалентности удовлетворяет колмогоровской аксиоме T_0.
В T_0-пространстве $x \in \operatorname{Cl} y$ – частичный порядок.

Любой частичный порядок определяет чум(?) топологию, порождаемую множествами $\{x \mid a \prec x\}$.

Топология порождается частичным порядком $\iff$ T_0 и каждая точка обладает наименьшей окрестностью.

Произвольное конечное топологическое пространство составлено из кластеров T_0-эквивалентных точек. Кластеры частично упорядочены и порядок порождает топологию.

Барицентрическое подразделение

Насколько топология частичного порядка далека от топологии пространства клеток полиэдра?

Барицентрическое подразделение

Насколько топология частичного порядка далека от топологии пространства клеток полиэдра?
Не очень, всего один шаг.

Барицентрическое подразделение

Насколько топология частичного порядка далека от топологии пространства клеток полиэдра?
Пусть $(X, \prec)$ – частично упорядоченное множество.

Барицентрическое подразделение

Насколько топология частичного порядка далека от топологии пространства клеток полиэдра?
Пусть $(X, \prec)$ – чум.

Барицентрическое подразделение

Насколько топология частичного порядка далека от топологии пространства клеток полиэдра?
Пусть $(X, \prec)$ – чум. Рассмотрим
$X' = \{a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_n \mid a_i \in X\}$.

Барицентрическое подразделение

Насколько топология частичного порядка далека от топологии пространства клеток полиэдра?
Пусть $(X, \prec)$ – чум. Рассмотрим $X' = \{a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_n \mid a_i \in X\}$, множество его непустых конечных подмножеств, в которых $\prec$ определяет линейный порядок.

Барицентрическое подразделение

Насколько топология частичного порядка далека от топологии пространства клеток полиэдра?
Пусть $(X, \prec)$ – чум. Рассмотрим $X' = \{a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_n \mid a_i \in X\}$, множество его непустых конечных подмножеств, в которых $\prec$ определяет линейный порядок. X' частично упорядочено по включению.

Барицентрическое подразделение

Насколько топология частичного порядка далека от топологии пространства клеток полиэдра?

Пусть $(X, \prec)$ – чум. Рассмотрим $X' = \{a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_n \mid a_i \in X\}$, множество его непустых конечных подмножеств, в которых $\prec$ определяет линейный порядок. X' частично упорядочено по включению.

Чум $(X', \subset)$ называется барицентрическим подразделением чума $(X, \prec)$.

Барицентрическое подразделение

Насколько топология частичного порядка далека от топологии пространства клеток полиэдра?
Пусть $(X, \prec)$ – чум. Рассмотрим $X' = \{a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_n \mid a_i \in X\}$, множество его непустых конечных подмножеств, в которых $\prec$ определяет линейный порядок. X' частично упорядочено по включению.
Чум $(X', \subset)$ называется барицентрическим подразделением чума $(X, \prec)$. Барицентрическое подразделение любого конечного чума – пространство симплексов некоторого компактного триангулированного полиэдра.

Барицентрическое подразделение

Насколько топология частичного порядка далека от топологии пространства клеток полиэдра?
Пусть $(X, \prec)$ – чум. Рассмотрим
$X' = \{a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_n \mid a_i \in X\}$, множество его непустых конечных подмножеств, в которых $\prec$ определяет линейный порядок. X' частично упорядочено по включению.
Чум $(X', \subset)$ называется барицентрическим подразделением чума $(X, \prec)$. Барицентрическое подразделение любого конечного чума – пространство симплексов некоторого компактного триангулированного полиэдра.
Эта конструкция используется в комбинаторике для того, чтобы определить гомологии чума.

Барицентрическое подразделение

Насколько топология частичного порядка далека от топологии пространства клеток полиэдра?
Пусть $(X, \prec)$ – чум. Рассмотрим $X' = \{a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_n \mid a_i \in X\}$, множество его непустых конечных подмножеств, в которых $\prec$ определяет линейный порядок. X' частично упорядочено по включению.
Чум $(X', \subset)$ называется барицентрическим подразделением чума $(X, \prec)$. Барицентрическое подразделение любого конечного чума – пространство симплексов некоторого компактного триангулированного полиэдра.

Теорема. Любое конечное топологическое пространство слабо гомотопически эквивалентно компактному полиэдру.