

*Памяти Владимира Абрамовича Рохлина (1919–1984)
– нашего учителя*

Предисловие

Предмет книги – элементарная топология

Под элементарностью понимают близость к основам, элементам. Невозможно определить точно раз и навсегда, какая топология элементарна, а какая – не очень. Элементарная часть предмета – это то, с чего знаток предмета начинает обучать новичка.

Мы полагаем, что наш ученик уже готов изучать топологию и не будем пытаться завоевать его внимание и расположение торопливыми невразумительными рассказами о таких таинственных и привлекательных вещах как бутылка Клейна.¹ Всему своё время. Когда дойдёт черёд до бутылки Клейна, будет и бутылка Клейна. Начнём же мы с того, что такое топологическое пространство. То есть начнём с общей топологии.

Общая топология уже давно является частью общематематического языка. Она учит понятно и точно говорить о вещах, связанных с идеей непрерывности. Она нужна не только для того, чтобы объяснить, что же такое бутылка Клейна. Это ещё и способ привести геометрические образы в любую область математики, как бы далека от геометрии эта область ни была на первый взгляд.

Как область активных научных исследований, общая топология практически завершена. Постоянное использование в качестве общего математического языка отполировали систему её определений и теорем. В наши дни её изучение действительно напоминает скорее изучение языка, нежели математики: приходится выучивать много новых слов, тогда как доказательства большинства теорем чрезвычайно просты. Зато теорем этих очень много. Это и не удивительно – они играют роль правил, регулирующих употребление слов.

Книга состоит из двух частей. Общая топология является предметом первой части книги. Вторая часть посвящена введению в алгебраическую топологию через её наиболее классический и элементарный раздел, выстраивающийся вокруг понятий фундаментальной группы и накрывающего пространства.

¹Кто ищет такой элементарной топологии, легко найдёт её во множестве книжек по наглядной топологии с красивыми картинками.

В элементарную топологию мы включили бы ещё и начальные сведения о многообразиях – пространствах, локально устроенных так же, как евклидово пространство. Особенно элементарны одномерные и двумерные многообразия, то есть кривые и поверхности. Но книжка не должна быть слишком толстой, и нам пришлось остановиться.

Несколько особняком стоит глава 5, материал которой связан с различными разделами математики. Хотя он и играет в них существенную роль, он не столь уж важен при изучении общей топологии. Чаще всего его изучение можно отложить до той поры, пока он не появится содержательным образом в других математических курсах (в которых речь пойдет о группах Ли, функциональном анализе и т. д.). В контексте нашей книги он интересен тем, что обеспечивает большой набор разнообразных примеров и упражнений.

Особенности организации текста

Даже при беглом просмотре обнаруживается нестандартность организации текста этой книги. Мы сознательно пошли на несколько нововведений. Надеемся, что читатель быстро освоится с ними и найдёт их полезными.

Мы знаем, что нужды и интересы наших читателей разнообразны, и осознаем, как трудно сделать книжку интересной и полезной для *каждого* читателя. Для решения этой задачи мы разметили текст так, чтобы читатель мог легко определить, чего можно ждать от каждого кусочка текста. Мы надеемся, что это позволит ему организовать изучение материала книги в соответствии со своими вкусами и возможностями. Этой цели служат несколько особенностей организации текста книги.

Прежде всего, мы выделили основную, так сказать, лекционную линию. Это тот материал, который мы считаем основным. Он составляет сравнительно небольшую часть текста.

Часто он перебивается конкретными примерами, иллюстративными и тренировочными задачами и обсуждением понятий, связанных с этими примерами и задачами, но не используемых в дальнейшем. Некоторые из этих понятий играют основополагающую роль в других областях математики, но здесь они второстепенны.

Словом, основная линия при первой же возможности перебивается *вариациями*. Вариации графически ясно отделены от *основной темы*.

Вторая особенность, отличающая эту книгу от большинства других учебников, – отделённость доказательств от формулировок. Она выглядит почти как задачник. При желании эту книгу легко было бы сделать малоотличимой по виду от сотен других учебников математики. Для этого нужно все вариации переместить в концы параграфов так, чтобы

они выглядели бы упражнениями к основному тексту, а доказательства теорем поместить непосредственно после их формулировок.

Для кого эта книжка?

Читатель может смело браться за эту книжку, если в своем образовании он благополучно добрался до университета. Отдельные самоуверенные смельчаки могут попробовать взяться за неё и раньше. Однако сказать, что предварительных знаний не требуется, нельзя. Предполагается знакомство с вещественными числами. Ну и конечно с натуральными, целыми и рациональными. Знакомство с комплексными числами тоже не будет лишним, хотя в первой части книги без них можно и обойтись.

Мы предполагаем, что читатель знаком с наивной теорией множеств, но допускаем, что это знакомство может быть поверхностным. Поэтому там, где владение теорией множеств особенно желательно, сделаны специальные теоретико-множественные отступления.

Мы не опираемся всерьёз на знание анализа, но поскольку большинство наших читателей с ним всё равно хоть чуть-чуть знакомы, мы не стесняемся прибегать к обозначениям и понятиям из анализа.

Во второй части пригодится опыт работы с группами, хотя всё необходимое о группах мы сообщаем.

Одно из самых ценных приобретений, которое может сделать читатель, одолев эту книгу, – новые элементы математической культуры, способность понимать и ценить абстрактную аксиоматическую теорию. Чем в большей степени читатель этим уже обладает, тем легче ему освоить фактический материал этой книги.

Если вы хотите изучать топологию самостоятельно, попробуйте работать с этой книгой. Она может оказаться как раз тем, что вам нужно. Однако вам следует внимательно перечитать это предисловие с тем, чтобы разобраться, как организован материал и как им пользоваться.

Основная тема

Стержнем книги является материал курса топологии для студентов математиков Санкт-Петербургского (Ленинградского) государственного университета. Этот материал сравнительно невелик и почти не содержит сложных рассуждений.

Пусть читатель не думает, что выделяя основную тему авторы просто пытаются навязывать ему свои вкусы. Мы не стесняемся при случае свои вкусы навязывать, но здесь мы стремимся прежде всего организовать изучение предмета.

Основная тема составляет законченное целое. Читатель, её освоивший, предмет выучил. Заглядывал он в вариации или нет – его дело. Но вариации для того и включены, чтобы помочь в освоении основного материала. Они не сосланы на заключительные страницы параграфов для того, чтобы быть под рукой именно тогда, когда они нужнее всего. Заодно из вариаций можно узнать много интересного. Однако чрезмерно буквальное и тщательное следование вариациям может неоправданно затянуть изучение предмета.

Мы считаем, что материал, представленный в основной теме, – это тот минимум топологии, который должен освоить каждый студент, решившим стать профессиональным математиком.

Студенту, чьи интересы окажутся связаны с топологией и другими геометрическими предметами, конечно, придётся изучить гораздо больше, чем мы включили в основную тему. Но и ему этот материал может послужить хорошей основой.

Студенту, не рассчитывающему стать профессиональным математиком, даже частичное знакомство с основной темой может оказаться полезным. Кому-то – для подготовки к экзамену, кому-то – для того, чтобы почувствовать вкус абстрактной математики, роль определений и ценность точных формулировок. . .

Где доказательства?

Книга рассчитана на читателя, готового работать активно.

Доказательства теорем отделены от их формулировок и помещены в конец текущей главы.

По нашему убеждению, первой реакцией на формулировку любого утверждения, коль скоро вам кажется, что вы её поняли, должна быть попытка доказать её. Или опровергнуть, если доказать не удаётся. Попытка опровергнуть может быть полезна и для достижения лучшего понимания формулировки и для поиска доказательства.

Отдаляя доказательства от формулировок, мы хотим поощрить читателя к продумыванию каждой формулировки, одновременно сделав книгу неудобной для легкомысленного скольжения по диагонали. Впрочем, читатель, предпочитающий более традиционный стиль и не желающий по каким-либо причинам работать чересчур активно, сможет либо найти доказательство в конце главы, либо и вовсе пропустить его (правда, рискуя и формулировку понять превратно).

Такой стиль может угодить и искущённому читателю, предпочитающему формулировки, не омрачённые доказательствами. Доказательства в большинстве своём легкие, придумывать их легко и приятно.

Структура книги

Основными структурными единицами книги являются параграфы, которые разделены на пронумерованные и озаглавленные пункты. Каждый пункт посвящен отдельному сюжету и состоит из определений, комментариев, теорем, упражнений, задач и загадок.

Под *загадкой* мы понимаем задачу, решение (а часто и условие) которой следует скорее угадать, чем вычислить или вывести из формулировки.

Теоремы, упражнения, задачи и загадки, относящиеся к основному материалу, нумеруются парами, состоящими из номера параграфа и латинской буквы, отделенных друг от друга точкой.

2.В. Загадка. Принимая во внимание её номер, определите, каком параграфе должна находиться эта загадка? Да и загадка ли это?

Буквы присваиваются в алфавитном порядке и нумеруют утверждения в пределах параграфа.

Часто после трудной задачи (теоремы) сформулирована последовательность утверждений, являющихся леммами к этой задаче. Такая цепочка нередко завершается задачей, в которой предлагается вернуться к исходной задаче (теореме), вооружившись только что доказанными леммами.

Вариации

Основной материал подаётся в окружении многочисленных тренировочных задач и дополнительных определений, теорем и утверждений. Несмотря на свои связи с основным материалом, они обычно остаются за рамками стандартного лекционного курса.

Этот дополнительный материал в книге легко распознаётся по более мелкому шрифту и широким полям, таким, как здесь. Упражнения, задачи и загадки, не включенные в основной материал, но тесно связанные с ним, нумеруются парами, состоящими из номера параграфа и номера этого утверждения в пределах параграфа.

2.5. Найдите в основном тексте книги задачу с тем же номером 2.5.

Решения всех задач помещены в конце книги.

Задачи, которые авторам показались наиболее трудными, помечены, как водится, звёздочкой. Они включены с разными целями: наметить связи с другими областями математики, указать возможные направления развития предмета, или просто доставить удовольствие амбициозному читателю.

Дополнительные темы

Мы решили сделать доступными для заинтересованных студентов некоторые теоретические сюжеты, дополняющие основной материал. Их было бы естественно включать в лекционные курсы, предназначенные для старшекурсников (или аспирантов). Однако, как правило, этого не случается, поскольку сюжеты эти плохо вписываются в традиционные специальные курсы. Более того, их изучение кажется более естественным именно при первых контактах с топологией.

В книжке такие сюжеты выделены в отдельные пункты, в номера которых включен символ x , что означает *extra* (иногда таким образом помечен и весь параграф, а в одном случае и целая глава).

Отношение к этому материалу как к дополнительному зависит, конечно, от точки зрения. Относя какой-то сюжет к таковому, мы руководствуемся своими представлениями о том, что должно входить в первоначальное изучение топологии. Мы понимаем, что кто-то из коллег может не одобрить наш выбор, но надеемся, что наша разметка не мешает им пользоваться книжкой.

Советы читателю

Этой книгой можно пользоваться при подготовке к экзамену по топологии (особенно если он состоит в решении задач). Однако если вы слушаете лекции по топологии, то разумно почитать ее перед лекциями, пытаясь самостоятельно доказывать приводимые утверждения до того, как их докажет лектор.

Читатели, которые могут самостоятельно доказать утверждения из основной темы, вообще говоря, не нуждаются в решении всех задач, предлагаемых в вариациях, и могут ограничиться беглым знакомством с их условиями и решением наиболее трудных из них. С другой стороны, чем труднее вам доказывать утверждения основной темы, тем с большим вниманием следует отнестись к иллюстративным задачам и с меньшим – к задачам со звездочкой.

Многие из предлагаемых иллюстративных задач придумать легко. Более того, при серьезном изучении предмета примеры такого типа и нужно постоянно придумывать.

С другой стороны, некоторые задачи, представленные в этой книжке, придумать совсем не просто. Мы широко использовали всевозможные источники, как литературные, так и преподавательский фольклор.

Новое слово в математике: *согда*

В математической речи часто встречается сложный союз “тогда и только тогда, когда” (другие варианты: “в том и только в том случае, если”, “для того, чтобы . . . необходимо и достаточно, чтобы”). Ни в одном естественном национальном языке нет короткого союза с тем же смыслом. В письменный английский математики ввели союз “iff”, и он получил широкое распространение. Мы предлагаем на ту же роль другое слово – *согда*, которое звучит по-русски и имеет достаточно ясную этимологию. Его второй слог *-гда* является активным славянским корнем, указывающим на время. Он входит в слова *тогда*, *всегда*, *когда*, *иногда*, *никогда*, *некогда*. Первый слог *со-* является не менее активной приставкой, которая служит для образования слов, означая общее участие, совместность и т. п., например, *современник*, *соавтор*, *согласие*, *соратник*. Вместе получается общность времени, что соответствует длинной форме “тогда и только тогда, когда”.

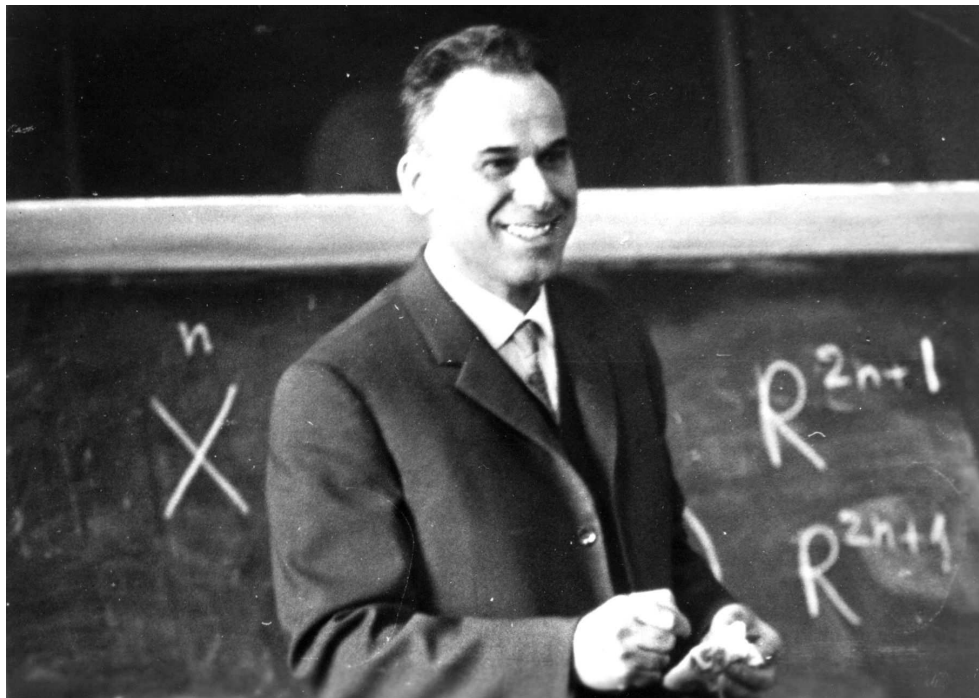
Как создавалась эта книга

Основная тема следует курсу лекций, поставленному Владимиром Абрамовичем Рохлиным на математико-механическом факультете Ленинградского государственного университета в шестидесятые годы минувшего века. Нам кажется уместным начать с обстоятельств создания этого курса, хотя писать эту книгу мы стали уже после смерти Владимира Абрамовича (который умер в 1984 году). В шестидесятые годы в Советском Союзе математика была одной из наиболее привлекательных областей науки для молодых людей, уступая среди негуманитарных наук разве что физике. Каждый год на отделение математики мат-меха ЛГУ поступали более ста студентов, несколько десятков из которых были выпускниками математических школ. Программа лекционных курсов мат-меха подверглась серьёзному обновлению.

До создания рохлинского курса топология преподавалась на мат-мехе только в рамках спецкурсов. Рохлину удалось включить в систему общих обязательных курсов семестровый курс топологии. Курс состоял из трёх глав, посвященных, соответственно, общей топологии, фундаментальной группе и накрытиям и многообразиям. Содержание первых двух глав мало отличалось от основного материала этой книги. Последняя глава начиналась с общего определения топологического многообразия, включала топологическую классификацию одномерных многообразий и завершалась либо топологической классификацией триангулированных двумерных многообразий, либо элементами дифференциальной топологии вплоть до вложимости гладкого многообразия в евклидово пространство.

Трое из четырёх авторов принадлежат первым поколениям студентов, слушавших этот рохлинский курс лекций. Это был семестровый курс, три часа в неделю в первом семестре второго курса. От силы две двухчасовые лекции в течении всего семестра посвящались решению задач. Эти занятия проводил не

Рохлин, а его аспиранты. К примеру, в 1966–68 годах их вёл Миша Громов – выдающийся геометр, в настоящее время профессор парижского Института высших исследований и нью-йоркского Института Куранта. Рохлин считал курс теоретическим и не хотел тратить лекционное время на решение задач. И вправду, в рамках этого курса студентов не приходилось обучать решению серий рутинных задач наподобие традиционных для математического анализа задач на технику дифференцирования и интегрирования.



Владимир Абрамович Рохлин читает лекцию, шестидесятые годы.

Хоть мы и построили свою книгу, отправляясь от лекций Рохлина, никакого представления о стиле рохлинских лекций книга не даёт. Это были блестящие лекции. Владимир Абрамович почти ничего не писал на доске. Тем не менее, записывать за ним было легко. Он говорил не торопясь, максимально простыми и идеально правильными фразами.

Последний раз свой обязательный курс топологии Рохлин прочёл в 1973 году. В августе 1974 в связи с тяжёлой болезнью Рохлина администрации матмеха пришлось искать, кем заменить его как лектора. Задача осложнялась тем, что экзаменационные результаты за предыдущий год были из рук вон плохи. В 1973 году время, отведённое на курс, было увеличено до четырёх часов в неделю, тогда как число студентов увеличилось, а уровень их подготовки, соответственно, снизился. И экзаменационные оценки “рухнули”.

Было решено весь поток, состоявший приблизительно из 175 студентов, разделить на два потока. Лекции студентам, которым предстояло специализироваться по прикладной математике, было поручено читать профессору

В. А. Залгаллеру, а лекции студентам-математикам – ассистенту О. Я. Виро. По предложению Залгаллера были введены практические занятия – один час в неделю. В результате время, отведённое на лекции, уменьшилось, а вместе со временем сократился *de facto* и объём материала.

Оставалось понять, что же делать на практических занятиях. Пришлось разработать систему задач и упражнений, которые давали бы возможность повторить определения, данные на лекциях, и позволяли бы развивать навыки в доказательстве простых теорем из общей топологии в обстановке несложной аксиоматической теории. При постепенно снижающемся уровне предварительной подготовки студентов практические занятия и задачи становились всё более полезными.

Задачи первой части книги – результат наших усилий в этом направлении. В 1988 году задачи эти были опубликованы издательством ЛГУ в небольшой книжке "Задачи по топологии".

Студенты нашли книжку полезной. Один из них, Алексей Соловьёв даже перевёл её на английский по собственной инициативе, когда поступил в аспирантуру Университета Калифорнии. Перевод открыл новый этап работы над книгой. Мы стали развивать параллельно русскую и английскую версии и охватили практически весь материал рохлинского курса. В 2000 году в издательстве Санкт-Петербургского государственного университета вышло второе русское издание книги, уже включавшее в себя главу о фундаментальной группе и накрытиях.

Авторы использовали английскую версию в своих лекциях в Соединённых Штатах (Университет Калифорнии), Франции (Страсбургский университет) и Швеции (Упсальский университет). Лекции читались для весьма разных аудиторий: как для студентов, так и для аспирантов. Кроме того, мы получали запросы от знакомых и незнакомых профессоров на разрешение использовать английскую версию в их лекциях как в тех же, так и в других странах. Возникли новые требования к тексту. Например, нас просили включить в книгу решения задач и доказательства теорем, чтобы привести её в соответствие с западными стандартами и превратить из задачника в самодостаточный учебник. Поколебавшись, мы удовлетворили эти просьбы, тем более, что к ним присоединилось издательство Американского Математического Общества, которое публикует в 2007 году английскую версию.

Мы благодарны всем нашим коллегам за их советы и помощь. Многочисленные полезные замечания и предложения были высказаны М. Ю. Звагельским, А. В. Корчагиным, С. С. Подкорытовым, А. Н. Шумаковичем. Мы благодарны Алексею Соловьёву за английские переводы первого издания этой книжки.

Мы особо признательны Виктору Абрамовичу Залгаллеру, чей педагогический опыт и искреннее желание помочь сыграли неоценимую роль для нас тогда, когда мы были молодые.

Каждому из нас посчастливилось быть учеником Владимира Абрамовича Рохлина, памяти которого мы и посвящаем эту книгу.



Авторы, слева направо:
Олег Янович Виро,
Вячеслав Михайлович Харламов,
Никита Юрьевич Нецветаев,
Олег Александрович Иванов.