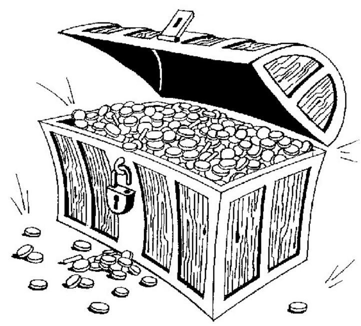
1994

6-й класс

1994.01. Есть пять монет достоинством 1, 2, 3, 5 и 10 пиастров. Одна из них фальшивая, то есть, ее вес в граммах не равен ее достоинству. Как при помощи чашечных весов без гирь определить фальшивую монету?



1994.02. На шахматной доске расставлены ладьи так, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали находится ровно одна ладья. Доску разбили на четыре равных квадрата. Докажите, что число ладей в правом верхнем квадрате равно числу ладей в левом нижнем квадрате.

1994.03. На каждой из одиннадцати карточек написано по цифре, не превосходящей пяти. Расположив эти карточки в ряд, Миша получил одно 11-значное число; затем, расположив те же карточки по-другому, Миша получил второе 11-значное число. Докажите, что сумма двух этих чисел будет содержать хотя бы одну чётную цифру в своей десятичной записи.

1994.04. При дворе принца Лимона служили герцоги, графы и бароны. В начале правления принца придворных было 1994, но каждый день один из них убивал другого на дуэли, причём герцоги убивали только графов, графы — только баронов, а бароны — только герцогов. При этом никто не выиграл дуэль дважды. В конце концов остался в живых лишь барон Апельсин. Какой титул был у первого погибшего придворного?

1994.05. У Кости есть 222 ромба вида ◇, 333 треугольника $\triangle$ и 444 трапеции вида ⏢, причём все отрезки на рисунках имеют длину 1. Докажите, что Костя не сможет сложить многоугольник периметра 888, использовав при этом все плитки. При складывании стороны фигурок должны точно совмещаться.

1994.06. На доске выписано в ряд 101 натуральное число. За один ход разрешается из любых двух соседних чисел вычесть по единице. Известно, что такими операциями можно получить наборы

$$\{1, 0, 0, \ldots, 0, 0, 0\} \quad \text{и} \quad \{0, 0, 0, \ldots, 0, 0, 1\}.$$

Докажите, что из исходного ряда чисел можно получить набор из 101 числа

$$\{0, 0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, 0, 0\} \qquad \text{(единица на 51 месте).}$$

7-й класс

1994.07. См. задачу 4.

1994.08. Три двузначных числа таковы, что сумма любых двух из них равна числу, отличающемуся от третьего лишь порядком цифр. Какой может быть сумма этих трех чисел?

1994.09. В клетках квадратной таблицы 10×10 расставлены 0 и 1,причём известно, что из любых четырех строчек таблицы какие-то две совпадают. Докажите, что в таблице есть два одинаковых столбца.

1994.10. Есть сто монет достоинством 1, 2, 3, …, 100 пиастров. Среди них не более 20 фальшивых, то есть таких, что их вес в граммах не равен их достоинству. Как при помощи чашечных весов без гирь определить, фальшива ли монета достоинством в 10 пиастров?

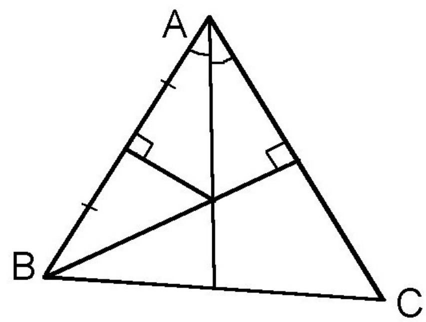
1994.11. Могут ли расстояния от некоторой точки на плоскости до вершин некоторого квадрата быть равными 1, 4, 7 и 8?

1994.12. В марсианском алфавите k букв, и два слова называются похожими, если в них одинаковое количество букв и они отличаются лишь в одном месте (например, ТРИКС и ТРУКС). Докажите, что все слова в языке можно разбить на k групп, в каждой из которых все слова не похожи друг на друга.

1994.13. Бумажный квадрат разбит линиями, проведенными карандашом, на n прямоугольников. Докажите, что можно сделать не более $n-1$ прямолинейного разреза, после которых бумажный квадрат распадется в точности на нарисованные прямоугольники. Части нельзя накладывать друг на друга, а разрез не обязан начинаться или кончаться на краю.

8-й класс

1994.14. В треугольнике ABC биссектриса из вершины A, высота из вершины B и серединный перпендикуляр к стороне AB пересекаются в одной точке. Найдите величину угла A.



1994.15. См. задачу 4.

1994.16. Дано 15-значное число, записанное нулями и единицами, которое делится на 81, но не делится на 10. Докажите, что из него нельзя вычеркнуть один из нулей так, чтобы полученное число по-прежнему делилось на 81.

1994.17. Есть сто монет достоинством 1, 2, 3,..., 100 пиастров. Среди них ровно 16 фальшивых, то есть таких, что их вес в граммах не равен их достоинству. Как при помощи чашечных весов без гирь найти все фальшивые монеты?

1994.18. Найдите все натуральные числа n, для которых сумма квадратов всех их собственных (то есть, не равных n) делителей равна $2n+2$.

1994.19. Тушенка продается в банках пяти типов — они различаются по весу и цене (см. таблицу). На складе имеется 1994 банки общим весом 1 тонна. Докажите, что их общая стоимость меньше 1 600 000 рублей.

Вес, г	Цена, руб
330	600
420	700
550	800
640	900
710	1000

1994.20. См. задачу 13.

9-й класс

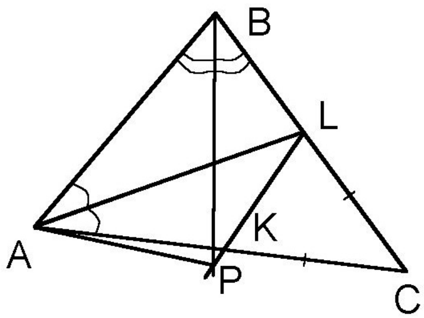
1994.21. На острове, население которого составляют только рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут, находится НИИ. Каждый из его сотрудников однажды сделал два заявления:

а) В институте нет и десяти человек, которые работают больше меня;

б) По крайней мере сто человек в институте получают зарплату большую, чем моя.

Известно, что нагрузка у всех работников разная, как и зарплата. Сколько человек работает в НИИ?

1994.22. Натуральные числа p и q таковы, что $p \geqslant q$. У ослика Иа-Иа есть pq палочек, из которых он может составить p q-угольников.



Докажите, что из этих же палочек Иа-Иа может составить q p-угольников.

1994.23. AL — биссектриса треугольника ABC, K — точка на стороне AC такая, что $CK = CL$. Прямая LK и биссектриса угла B пересекаются в точке P. Докажите, что $AP = PL$.

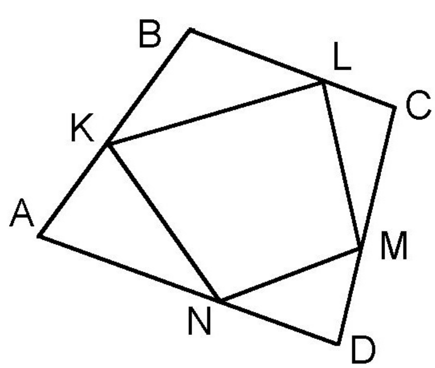
1994.24. Про натуральные числа a, b, c и d известно, что

$$\frac{a^2+b}{a+c} = d\,.$$

Докажите, что $d \leqslant b + (c-1)^2$.

1994.25. Двое играют в игру. Первый игрок загадал число, а второй игрок за ход может назвать любые k различных натуральных чисел, не больших 100, после чего первый сообщает сумму задуманного числа и одного из названных чисел. При каком максимальном k второй сможет рано или поздно отгадать задуманное число?

1994.26. Квадрат разбит на несколько прямоугольников так, что любая горизонтальная прямая пересекает ровно n прямоугольников, а любая вертикальная прямая — ровно m прямоугольников (рассматриваются только прямые, не содержащие сторон прямоугольников).



Каково минимально возможное число прямоугольников разбиения?

1994.27. На сторонах AB, BC, CD и DA произвольного четырехугольника $ABCD$ взяты точки K, L, M и N соответственно. Обозначим через S_1, S_2, S_3 и S_4 площади треугольников AKN, BKL, CLM и DMN соответственно. Докажите, что

$$\sqrt[3]{S_1} + \sqrt[3]{S_2} + \sqrt[3]{S_3} + \sqrt[3]{S_4} \leqslant 2\sqrt[3]{S_{ABCD}}\,.$$

10-й класс

1994.28. В акционерном обществе “Елки-палки” 1994 акционера, причём известно, что любые 1000 из них в совокупности обладают контрольным пакетом (то есть, не менее чем половиной акций). Какую наибольшую долю акций может иметь один акционер?

1994.29. Назовем треугольник “невысоким”, если по крайней мере две его высоты имеют длину, не большую 1. На плоскости даны четыре точки такие, что все образуемые ими треугольники — невысокие. Докажите, что существует прямая, от которой все эти точки удалены на расстояние, не превосходящее 1/2.

1994.30. Натуральные числа a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 и c_2 таковы, что

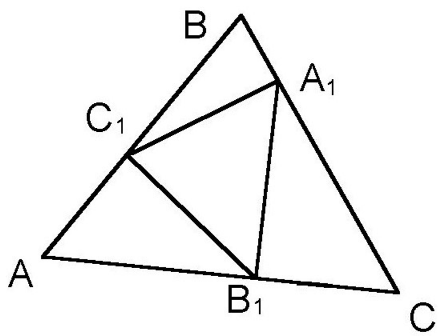
$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 31, \\ b_1 + b_2 &= 32, \\ c_1 + c_2 &= 1994\,. \end{aligned}$$

Докажите, что произведения $a_1b_1c_1$ и $a_2b_2c_2$ не равны.

1994.31. На полке стоят 1994 тома энциклопедии. Каждое утро библиотекарь Федя берет три тома и как-то расставляет их на тех же местах, а каждый вечер уборщица Дуся меняет какие-то два тома местами. Докажите, что Дуся может действовать так, что в любой момент времени на своих местах будет стоять менее пяти томов (исходно тома расставляет уборщица).

1994.32. На сторонах AB, BC и CA произвольного треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Обозначим через S_1, S_2 и S_3 площади треугольников AB_1C_1, BA_1C_1 и CA_1B_1 соответственно. Докажите, что

$$\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{S_{\triangle ABC}}\,.$$

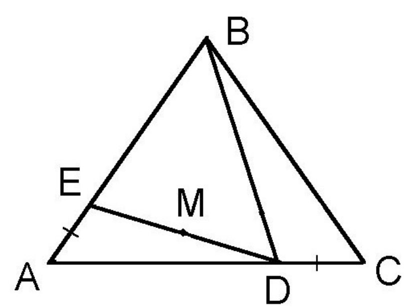


1994.33. См. задачу 26.

1994.34. Двое играют в игру. Первый игрок загадал число, а второй игрок за ход может назвать любые пять различных натуральных чисел, не больших 9, после чего первый сообщает сумму задуманного числа и одной из названных цифр. За какое минимальное число ходов второй может отгадать задуманное число?

11-й класс

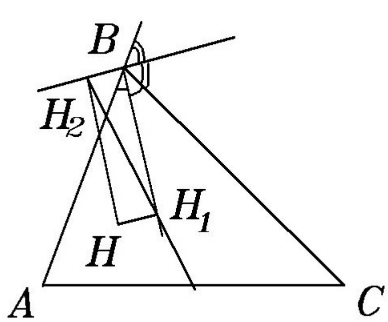
1994.35. На стороне AC равностороннего треугольника ABC выбрана точка D, а на стороне AB точка E так, что $AE = CD$. M — середина отрезка DE. Докажите, что $AM = \frac{1}{2}BD$.



1994.36. См. задачу 21.

1994.37. Натуральные числа a, b, x и y таковы, что $ax+by$ делится на a^2+b^2. Докажите, что числа x^2+y^2 и a^2+b^2 имеют общий делитель, больший 1.

1994.38. См. задачу 31.



1994.39. Точка H — ортоцентр треугольника ABC, а точки H_1 и H_2 — ее проекции на биссектрисы внутреннего и внешнего углов B. Докажите, что прямая H_1H_2 делит сторону AC пополам.

1994.40. См. задачу 26.

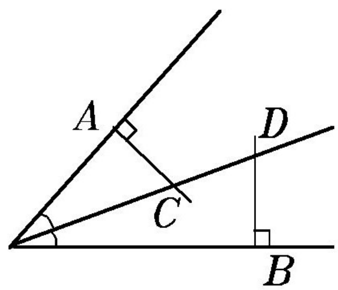
1994.41. Дана конечная последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Разрешается для любого $k < n$ заменить внутри последовательности числа a_1, $a_2, \ldots, a_k$ на числа

$$a_{k+1} - a_k,\ a_{k+1} - a_{k-1},\ \ldots,\ a_{k+1} - a_1$$

(в указанном порядке). Докажите, что при помощи таких операций можно получить единственную последовательность чисел, в которой каждое число, кроме последнего, не меньше полусуммы своих соседей.

Отборочный тур

9–10-е классы

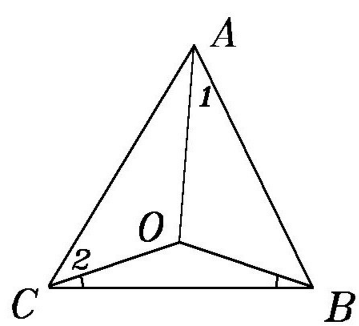


1994.42. В точках A и B, лежащих на разных сторонах угла, восстановлены перпендикуляры к сторонам, которые пересекают биссектрису угла в точках C и D. Докажите, что середина отрезка CD равноудалена от точек A и B.

1994.43. Натуральные числа a, b и $n > 1$ таковы, что $(a+b)^n$ делится на ab. Докажите, что a^{n-1} делится на b.

1994.44. Отрезки, соединяющие точку P, лежащую внутри квадрата $ABCD$, с вершинами, разбивают квадрат на четыре треугольника. Докажите, что отношение площадей каких-то двух из них лежит в промежутке $[{}^3\!/_5;\ {}^5\!/_3]$.

1994.45. На доске написано число 1994. Каждую секунду к числу на доске прибавляют его максимальный простой делитель. Докажите, что когда-нибудь это число будет делиться на 1995.



1994.46. В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC взята точка O такая, что $\angle OBC = \angle OCB = 20°$. Кроме того, $\angle BAO + \angle OCA = 70°$. Найдите угол A.

1994.47. В клетках таблицы 1995×1995 расставлены плюсы и минусы. Разрешается выбрать 1995 клеток, никакие две из которых не лежат в одной строке или в одном столбце, и поменять знаки в выбранных клетках.

Докажите, что при помощи таких операций можно добиться того, чтобы в таблице осталось не более 1994 плюсов.

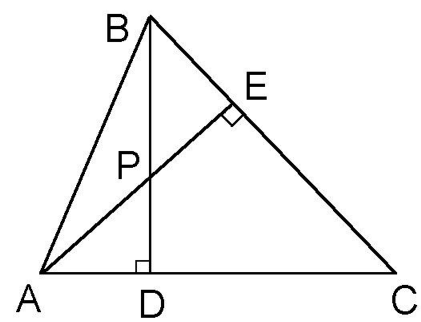
1994.48. Рассматриваются все последовательности натуральных чисел (a_n) длины 1994, обладающие следующим свойством: $a_1 = 1$, $a_{n+1} \leqslant 1 + a_n$. Докажите, что количество таких последовательностей с чётной суммой членов равно количеству последовательностей с нечётной суммой членов.

1994.49. 200 теннисистов проводят турнир по швамбранской системе. Это означает, что каждый день перед очередными играми они выстраиваются в шеренгу по невозрастанию количества набранных к этому моменту очков, после чего разбиваются на 100 пар стоящих рядом игроков. Докажите, что если турнир длится достаточно долго, то в какой-то день результаты некоторых двух игроков будут различаться более, чем на 50 очков. (Ничьих в теннисе не бывает, за победу теннисист получает 1 очко, за поражение — 0).

11-й класс

1994.50. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BD и AE, пересекающиеся в точке P. Докажите, что

$$AB^2 = AP \cdot AE + BP \cdot BD\,.$$



1994.51. Натуральные числа x и y, большие 1,таковы, что x^2+y^2-1 делится на $x+y-1$. Докажите, что $x+y-1$ — составное число.

1994.52. Докажите, что для любых вещественных положительных a и b выполнено неравенство $a^a + b^b > ab$.

1994.53. По окружности расставлено 1994 точки, покрашенные в 10 цветов. Известно, что среди любых 100 подряд идущих точек встречаются точки всех цветов. Докажите, что среди каких-то 90 подряд идущих точек тоже встретятся точки всех цветов.

1994.54. Вещественные числа a, b и c таковы, что числа $\frac{1+bc}{b-c}$, $\frac{1+ca}{c-a}$, $\frac{1+ab}{a-b}$ — целые. Докажите, что эти целые числа попарно взаимно просты.

1994.55. Докажите, что площадь четырехугольника со сторонами a, b, c, d не превосходит $\frac{1}{4}\big((a+c)^2+bd\big)$.

1994.56. Пусть a_n — $(n+1)$-я с конца цифра десятичной записи числа 2^{5^n}. Докажите, что последовательность (a_n) непериодична.

1994.57. Чук и Гек играют в следующую игру: Гек рисует на плоскости систему точек, некоторые из которых он соединяет непересекающимися отрезками так, что отрезки не образуют замкнутых ломаных. Затем каждым своим ходом игрок может покрасить любую неокрашенную еще точку в один из 4 данных цветов так, чтобы никакие две “соседние” точки не были окрашены в один цвет. Первым ходит Чук, и он выигрывает, если в конце игры все точки окажутся окрашенными. В противном случае (если ходов больше нет, но не все точки окрашены) выигрывает Гек. Кто выигрывает при правильной игре?