1995

6-й класс

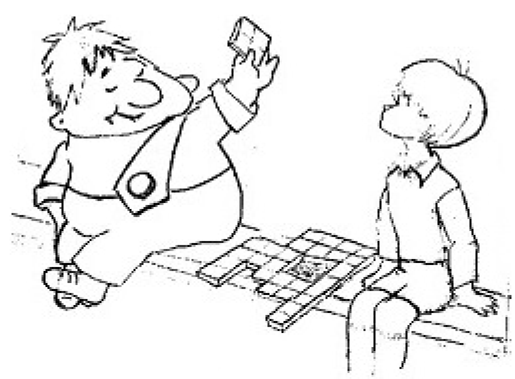
1995.01. 25 школьников стоят в ряд. Самый левый школьник выше самого правого. Докажите, что найдется школьник, у которого левый сосед выше правого.

1995.02. На доске написано число 12. В течение каждой минуты число либо умножают, либо делят либо на 2, либо на 3, и результат записывают на доску вместо исходного числа. Докажите, что число, которое будет написано на доске ровно через час, не будет равно 54.

1995.03. Утром в луже плавало 19 синих и 95 красных амеб. Иногда они сливались: если сливаются две красные, то получается одна синяя амеба, если сливаются две синие, то получившаяся амеба тут же делится и в итоге образуются четыре красные амебы, наконец, если сливаются красная и синяя амеба, то это приводит к появлению трех красных амеб. Вечером в луже оказалось 100 амеб. Сколько среди них синих?

1995.04. Найти все тройки простых чисел x, y, z, такие, что $19x - yz = 1995$.

1995.05. В клетчатом квадрате 9×9 закрашено 19 клеток. Докажите, что либо найдутся две закрашенные клетки, имеющие общую сторону, либо найдется незакрашенная клетка, к сторонам которой примыкают не менее двух закрашенных.



1995.06. Есть шоколадка 17×17 долек. Малыш и Карлсон играют в такую игру: ход состоит в том, что один из имеющихся прямоугольных кусков шоколада разламывают на две прямоугольные части, причём Карлсон сразу после своего хода съедает одну из образовавшихся частей. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Первым ходит Малыш. Кто выиграет при правильной игре?

7-й класс

1995.07. См. задачу 1.

1995.08. См. задачу 4.

1995.09. В войске герцога Икторна 1000 гоблинов. Любые два гоблина либо дружат, либо враждуют, либо незнакомы. Гоблины — существа малообщительные, разговаривают только с друзьями. К тому же все они в плохом настроении, поскольку у каждого гоблина любые два его друга враждуют, а любые два врага дружат. Докажите, что для того, чтобы все войско узнало о предстоящем наступлении на Данвин, герцог должен сообщить об этом не менее чем 200 гоблинам.

1995.10. Клетчатый прямоугольник разрезали на прямоугольники 1×2 (доминошки) так, что любая прямая, идущая по линиям сетки, рассекает кратное четырем число доминошек. Докажите, что длина одной из сторон делится на 4.

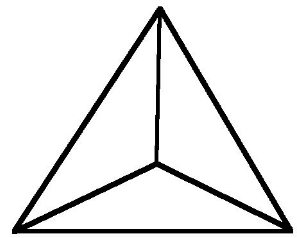
1995.11. На экране калькулятора набрано число 1. Раз в секунду калькулятор производит следующее действие: если число на экране делится на 2^k, то калькулятор прибавляет к нему любое число от 1 до $(k+1)$. Докажите, что любая степень двойки когда-нибудь обязательно появится на экране.

1995.12. Есть шоколадка 1995×1995 долек. Малыш и Карлсон играют в такую игру: ход состоит в том, что один из имеющихся прямоугольных кусков шоколада разламывают на две прямоугольные части, одну из которых можно после этого сразу же съесть (а можно и не есть). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Первым ходит Карлсон. Кто выиграет при правильной игре?

1995.13. На двух полках стоит в беспорядке многотомная энциклопедия “Все о собаках”. Самым левым на верхней полке стоит том “Моськи”. Каждое утро библиотекарь меняет местами два тома с соседними номерами, стоящих на разных полках. В один прекрасный день все тома вернулись на исходные полки. Докажите, что “Моськи” по-прежнему стоят слева на верхней полке.

8-й класс

1995.14. На каждом из шести изображенных на рисунке отрезков стоит натуральное число. К любым трем числам, чьи отрезки образуют треугольник, можно одновременно прибавить 1. Докажите, что можно сделать так, чтобы суммы чисел, стоящих на сторонах любого из этих четырех треугольников, давали одинаковый остаток при делении на 3.

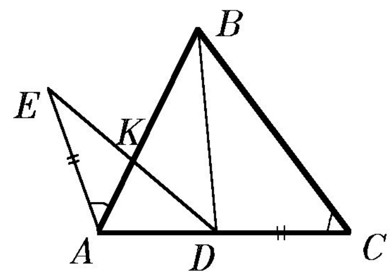


1995.15. См. задачу 9.

1995.16. Обозначим через $p(n,k)$ количество делителей числа n, не меньших, чем k. Чему равна сумма

$$p(1001,1)+p(1002,2)+p(1003,3)+\ldots+p(2000,1000)\,?$$

1995.17. BD — биссектриса угла B треугольника ABC. Точка E выбрана так, что $\angle EAB=\angle ACB$, $AE=DC$, и при этом отрезок ED пересекает отрезок AB в точке K. Докажите, что $KE=KD$.



1995.18. Наследство состоит из нескольких бриллиантов и оценивается в \$1 000 000. Известно, что его можно разделить на 5, а можно и на 8 равных частей. Какую наибольшую стоимость может иметь самый маленький бриллиант?

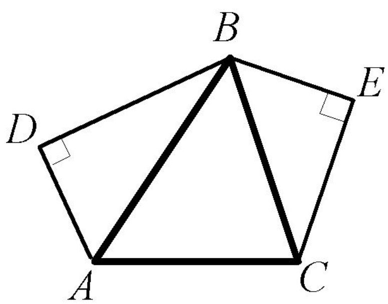
1995.19. В вершинах правильного стоугольника произвольным образом расставлены числа от 1 до 100. Разрешается поменять местами два числа, отличающиеся на 1. В результате выполнения таких операций каждое число передвинулось в соседнюю вершину по часовой стрелке. Докажите, что в какой-то момент менялись местами два числа, находившиеся в диаметрально противоположных вершинах.

1995.20. Клетчатый прямоугольник разрезали на прямоугольники 1×2 (доминошки) так, что любая прямая, идущая не по линиям сетки параллельно одной из сторон, рассекает чётное число доминошек. Докажите, что длина одной из сторон делится на 4.

9-й класс

1995.21. $a, b > 0$, $a + b \leqslant 2$. Докажите, что

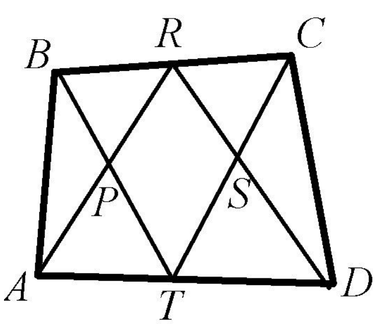
$$\frac{a}{b+ab} + \frac{b}{a+ab} \geqslant 1\,.$$



1995.22. На плоскости даны треугольник ABC и такие точки D и E, что $\angle ADB = \angle BEC = 90°$. Докажите, что длина отрезка DE не превосходит полупериметра треугольника ABC. (На рисунке показано лишь одно из возможных положений точек.)

1995.23. Решите в натуральных числах уравнение $x^{(2^x)} = y^{(512^y)}$.

1995.24. Докажите, что количество способов разрезать прямоугольник на уголки из трех клеток вида всегда чётно.



1995.25. В четырехугольнике $ABCD$ на сторонах BC и AD взяты, соответственно, точки R и T. P — точка пересечения отрезков BT и AR; S — точка пересечения отрезков CT и DR. Оказалось, что $PRST$ — параллелограмм. Докажите, что $AB \parallel CD$.

1995.26. a, b, c — натуральные числа, причём $(a - b)$ — простое число и $3c^2 = c(a + b) + ab$. Докажите, что $8c + 1$ — точный квадрат.

1995.27. В государстве 2000 городов. Некоторые пары городов соединены дорогами так, что из любого города можно проехать в любой другой. Докажите, что это государство можно разбить на несколько республик (возможно, всего на одну) так, чтобы в каждой республике из любого города можно было единственным образом проехать в любой другой город этой республики, не выезжая за ее пределы. (В каждой республике должно быть не менее двух городов.)

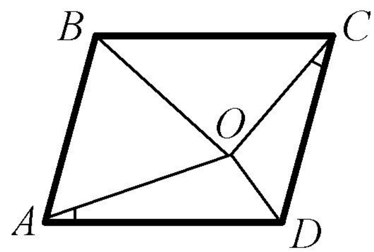
10-й класс

1995.28. Квадратный трехчлен $f(x)$ имеет два вещественных корня, разность которых не меньше 1995. Докажите, что уравнение

$$f(x)+f(x+1)+\ldots+f(x+1995)=0$$

имеет два вещественных корня.

1995.29. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка O так, что $\angle OAD=\angle OCD$. Докажите, что $\angle OBC=\angle ODC$.

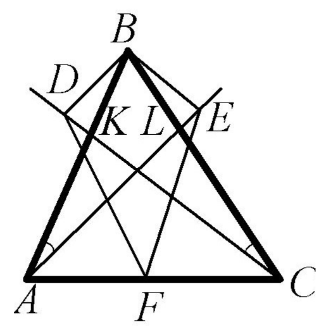


1995.30. Шахматная фигура "пулеметчик" бьет в каком-то одном направлении по вертикали или горизонтали (например, по горизонтали влево) на любое число клеток. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга пулеметчиков можно расставить на шахматной доске 20×20?

1995.31. Пусть $d(n)$ — количество натуральных делителей числа n. Можно ли выбрать сто натуральных чисел a_1, a_2, …, a_{100} так, чтобы при всех k от 1 до 100 выполнялось равенство

$$d(a_1+a_2+\ldots+a_k)=a_k\,?$$

1995.32. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны такие точки K и L соответственно, что $\angle KCB=\angle LAB=\alpha$. Из точки B опущены перпендикуляры BD и BE на прямые AL и CK соответственно. Точка F — середина стороны AC. Найдите углы треугольника DEF.



1995.33. См. задачу 27.

1995.34. В последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, состоящей из натуральных чисел, сумма первых десяти членов равна 100, а начиная с a_{11}, каждое число a_n равно количеству $i<n$, таких, что $a_i+i\geqslant n$. Известно, что $a_{11}=10$. Докажите, что начиная с некоторого места, все члены последовательности равны между собой.

11-й класс

1995.35. В шеренгу стоят 1995 новобранцев. По Уставу, в наряд на чистку сортира можно отправить либо каждого третьего, либо каждого четвертого. (То есть, первого, четвертого, седьмого и т. д., либо первого, пятого, девятого и т. д.)

Сформированный наряд сразу приступает к делу. Старшина собирается сформировать три наряда. Докажите, что по крайней мере один новобранец может быть уверен, что не попадет ни в один из нарядов.

1995.36. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — натуральные числа, N — их произведение. Известно, что N делится на квадрат каждого из чисел $a_1, \ldots, a_n$. Для каждой пары (i, j), $i < j$, вычислили наибольший общий делитель чисел a_i и a_j; M — произведение всех этих наибольших общих делителей. Докажите, что M^2 делится на N.

1995.37. См. задачу 29.

1995.38. См. задачу 30.

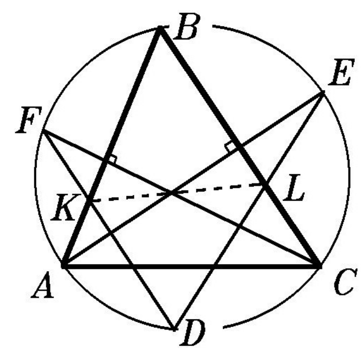
1995.39. $f(x)$ — многочлен третьей степени. Докажите, что существует такое $k \in \mathbb{N}$, что многочлен

$$f(x) + f(x+1) + \ldots + f(x+k)$$

имеет ровно один вещественный корень.

1995.40. Вокруг остроугольного треугольника ABC описана окружность.

Высоты треугольника из вершин A и C пересекают окружность в точках E и F соответственно, D — произвольная точка на (меньшей) дуге AC, K — точка пересечения DF и AB, L — точка пересечения DE и BC. Докажите, что прямая KL проходит через ортоцентр треугольника ABC.



1995.41. Докажите, что в любой компании, состоящей из чётного числа людей, найдутся два человека, у которых в этой компании чётное число общих знакомых.

Отборочный тур

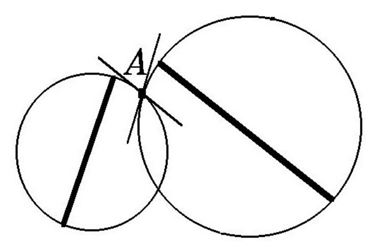
9-й класс

1995.42. p и q — простые числа, такие, что $p^2 + 1$ делится на q, а $q^2 - 1$ делится на p. Докажите, что $p + q + 1$ — составное число.

1995.43. $a, b, c > 0$. Докажите неравенство:

$$\left(\frac{a+2b}{c}\right)^2 + \left(\frac{b+2c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c+2a}{b}\right)^2 \geqslant 27\,.$$

1995.44. На плоскости даны две пересекающиеся окружности. Точка A — одна из двух точек пересечения этих окружностей. В каждой окружности проведен диаметр, параллельный касательной в точке A к другой окружности, причём эти диаметры не пересекаются. Докажите, что концы этих диаметров лежат на одной окружности.

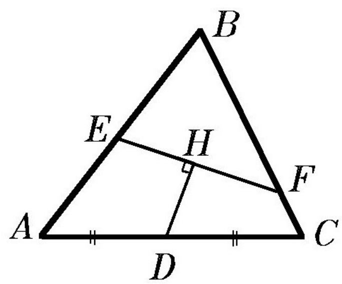


1995.45. На плоскости дано 1995 точек, некоторые пары точек соединены отрезками. Точки первоначально раскрашены в два цвета. Каждую минуту (одновременно) те точки, которые соединены с чётным количеством точек такого же цвета, меняют свой цвет. Докажите, что исходная раскраска не сможет снова получиться через нечётное число минут.

1995.46. Пусть M — множество значений многочлена $x^2 + 1$ в целых точках. Докажите, что множество M не содержит ни одной бесконечной (непостоянной) геометрической прогрессии.

1995.47. Прямоугольник разбит на доминошки (то есть прямоугольники 1×2). Докажите, что его клетки можно раскрасить в два цвета так, чтобы любая доминошка в данном разбиении содержала клетки разных цветов, но в любом другом разбиении этого прямоугольника на доминошки нашлась бы доминошка, содержащая две клетки одного цвета.

1995.48. H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC; D — середина стороны AC.



Прямая, проходящая через H перпендикулярно отрезку DH, пересекает стороны AB и BC в точках E и F. Докажите, что $HE = HF$.

1995.49. Существует ли возрастающая последовательность натуральных чисел $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что при всех натуральных n сумма цифр числа b_{n+1}^5 равна числу b_n^5?

10-й класс

1995.50. См. задачу 42.

1995.51. См. задачу 44.

1995.52. См. задачу 45.

1995.53. $d_1, d_2, \ldots, d_k$ — все возможные натуральные делители некоторого натурального числа N, выписанные в порядке возрастания. Оказалось, что

$$d_2 - d_1,\ d_3 - d_2,\ d_4 - d_3,\ \ldots,\ d_k - d_{k-1}$$

— также все возможные делители какого-то натурального числа (не обязательно в порядке возрастания). Найдите все N, для которых такое может быть.

1995.54. В Цветочном городе живут 1995 коротышек. У них имеется 995 десятикопеечных монет и неограниченный запас пятаков (монет по 5 коп.). Иногда коротышки меняются монетами: один дает другому монету в 10 копеек, а тот ему — два пятака. Как-то вечером каждый из коротышек заявил: “Сегодня я отдал ровно 10 монет”. Докажите, что кто-то из них ошибся.

1995.55. См. задачу 75.

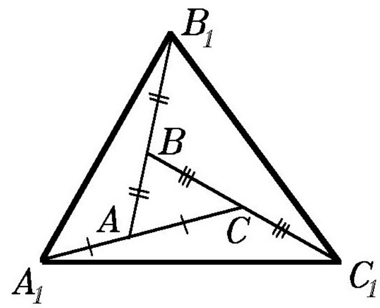
1995.56. Найдите все простые p и q, для которых $p^2 - p + 1 = q^3$.

1995.57. На доске написаны числа 0, 1, $\sqrt{2}$. Разрешается к любому из этих чисел прибавить разность двух других, умноженную на произвольное рациональное число. Можно ли такими операциями получить числа 0, 2, $\sqrt{2}$?

11-й класс

1995.58. См. задачу 69.

1995.59. Дан треугольник ABC. На продолжении стороны AB за точку B, на продолжении BC за точку C и на продолжении стороны CA за точку A выбраны точки B_1, C_1, A_1 соответственно, так, что



$$AB = BB_1,\ BC = CC_1,\ CA = AA_1\,.$$

Оказалось, что треугольник $A_1B_1C_1$ — равносторонний. Докажите, что треугольник ABC — тоже равносторонний.

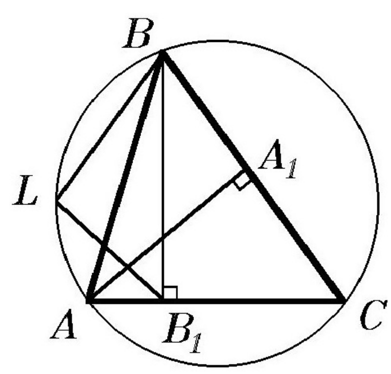
1995.60. $a, b, c, d > 0$. Докажите неравенство:

$$(ac + bd)^5 + (ad + bc)^5 \leqslant (a + b)^5(c^5 + d^5)\,.$$

1995.61. Можно ли расставить по окружности числа от 1 до 25 так, чтобы сумма любых пяти стоящих подряд чисел давала при делении на 5 остаток 1 или 4?

1995.62. См. задачу 54.

1995.63. M — некоторое множество простых чисел, в котором больше одного элемента. Известно, что для всякого (конечного) подмножества $N \subset M$ число $\left(\prod\limits_{k\in N} k\right) - 1$ имеет простые делители только из M. Докажите, что M совпадает с множеством всех простых чисел.



1995.64. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. На (меньшей) дуге AB описанной около треугольника окружности выбрана точка L, такая, что $LC = CB$. При этом оказалось, что $\angle BLB_1 = 90^\circ$. Докажите, что высота AA_1 делится высотой BB_1 пополам.

1995.65. В Северной Балбесии 100 городов, некоторые из них соединены дорогами так, что из каждого города можно доехать до любого другого. При этом всего в Северной Балбесии 1000 дорог. Правительство хочет закрыть некоторые дороги (возможно, все) так, чтобы из каждого города выходило чётное число оставшихся дорог (возможно, ни одной). Сколькими способами оно может это сделать?