

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2005 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II ТУР. 9 КЛАСС.

1. Даны натуральные числа a , b и c . Докажите неравенство

$$\text{НОД}(a, b) + \text{НОД}(a, b + c) \leq a + c.$$

(С. Берлов)

2. Докажите, что не существует четырех попарно различных квадратных трехчленов со старшими коэффициентами равными 1 таких, что сумма любых двух из них имеет ровно один корень.

(Ф. Петров)

3. В треугольнике ABC провели биссектрису CK , а в треугольнике BCK — биссектрису KL . Прямые AC и KL пересеклись в точке M . Известно, что $\angle BAC > \angle BCA$. Докажите, что $AK + KC > AM$.

(А. Пастор)

4. В квадрате 8×8 расставлены числа от 1 до 64. При этом в каждой строчке числа убывают (слева направо) и в каждом столбце числа убывают (сверху вниз). Докажите, что сумма 8 чисел на диагонали, идущей из левого-нижнего угла в правый-верхний не меньше 204.

(С. Берлов)

.....

Олимпиада 2005 года. II тур. 9 класс. Выводная аудитория.

5. Сколько существует таких натуральных чисел n , что при делении 1 000 000 на n неполное частное оказывается больше остатка?

(М. Антипов)

6. Даны непересекающиеся окружности S_1 и S_2 и их общие внешние касательные l_1 и l_2 . На l_1 между точками касания отметили точку A , а на l_2 — точки B и C так, что AB и AC — касательные к S_1 и S_2 . Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей S_1 и S_2 , а K — точка касания вневписанной окружности треугольника ABC со стороной BC . Докажите, что середина отрезка O_1O_2 равноудалена от точек A и K .

(Д. Джуквич, А. Смирнов)

7. В Тридевятом царстве 2005 городов. Некоторые города соединены дорогами с односторонним движением. Известно, что для любых двух городов из одного из них можно добраться до другого, не нарушая правил дорожного движения (то есть для городов A и B можно проехать либо из A в B , либо из B в A). Король хочет направить в несколько городов своих заместников так, чтобы в любой город, где нет заместника, можно было напрямую попасть из города, где есть заместитель. Докажите, что для этого ему будет достаточно 1003 заместников.

(Д. Карпов, С. Берлов)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2005 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 10 класс.

1. Даны четыре квадратных трехчлена. Их старшие коэффициенты равны единице, а сумма любых двух из них имеет ровно один корень. Докажите, что три из этих четырех трехчленов совпадают. (Ф. Петров)

2. Окружность, проходящая через вершины B и C прямоугольного треугольника ABC , пересекает гипотенузу AC в точке X . Касательные к этой окружности, проведенные в точках X и B , пересекаются в точке Y . Докажите, что точка Y лежит на средней линии треугольника ABC , параллельной стороне BC , или на ее продолжении. (А. Смирнов)

3. В левом нижнем углу доски $n \times n$ стоит хромой король, умеющий ходить только в трех направлениях: вправо, вверх и по диагонали вправо-вверх. Обозначим через A_n количество всех его маршрутов, ведущих в противоположный угол доски, а через A_n^* — количество таких маршрутов, не заходящих в левый столбец и верхнюю строчку (кроме начальной и конечной позиции). Докажите, что $A_n^* = 2A_{n-1}$. (К. Кохась)

4. Найдите все пары взаимно простых натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению $x^3 - x = 2(y^3 - y)$. (А. Храбров)

.....

Олимпиада 2005 года. II тур. 10 класс. Выводная аудитория.

5. Барон Мюнхгаузен убил на охоте 15 уток весом 50, 51, ..., 64 кг. Ему известен вес каждой из уток. С помощью чашечных весов барон собирается доказать зрителям, что первая утка весит 50 кг, вторая — 51 кг, третья — 52 кг, и т. д. (вначале зрители не знают про веса уток абсолютно ничего). Какое наименьшее количество гирь потребуется барону, если и гири, и уток можно размещать на обеих чашах весов, а количество взвешиваний не ограничено? (Весы гирь известны как барону, так и зрителям. В наличии неограниченный запас гирь весами 1, 2, ..., 1000 кг.)

(А. Храбров)

6. AE и CD — высоты остроугольного треугольника ABC . Биссектриса угла B пересекает отрезок DE в точке F . На отрезках AE и CD взяли такие точки P и Q соответственно, что четырехугольники $ADFQ$ и $CEFP$ — вписанные. Докажите, что $AP = CQ$. (А. Смирнов)

7. Дано n различных натуральных чисел. На доску выписали их попарные наибольшие общие делители и наименьшие общие кратные. Каким может быть наименьшее количество различных чисел, выписанных на доске? (Ф. Петров)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2005 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 11 класс.

1. Существуют ли такие четыре различных квадратных трехчлена, старшие коэффициенты которых равны 1, что сумма любых двух из них имеет ровно один корень? (Ф. Петров)

2. Окружность, проходящая через вершины B и C прямоугольного треугольника ABC , пересекает гипотенузу AC в точке X . Касательные к этой окружности, проведенные в точках X и B , пересекаются в точке Y . Докажите, что точка Y лежит на средней линии треугольника ABC , параллельной стороне BC , или на ее продолжении. (А. Смирнов)

3. Сколько существует таких натуральных чисел n , что при делении 1 000 000 на n неполное частное оказывается больше остатка? (М. Антипов)

4. В квадрате 8×8 расставлены числа от 1 до 64. При этом в каждой строчке числа возрастают слева направо и в каждом столбце числа возрастают сверху вниз. Пусть A — наименьшее возможное значение суммы чисел, стоящих на одной из диагоналей, а B — наименьшее возможное значение суммы чисел на другой диагонали. Докажите, что $A = B$. (С. Берлов)

.....

Олимпиада 2005 года. II тур. 11 класс. Выводная аудитория.

5. Барон Мюнхгаузен убил на охоте 15 уток весом 50, 51, ..., 64 кг. Ему известен вес каждой из уток. С помощью чашечных весов барон собирается доказать зрителям, что первая утка весит 50 кг, вторая — 51 кг, третья — 52 кг, и т. д. (вначале зрители не знают про веса уток абсолютно ничего). Какое наименьшее количество гирь потребуется барону, если и гири, и уток можно размещать на обеих чашах весов, а количество взвешиваний не ограничено? (Весы гири известны как барону, так и зрителям. В наличии неограниченный запас гирь весами 1, 2, ..., 1000 кг.)

(А. Храбров)

6. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает вписанную в этот треугольник окружность в точках F и L . Точка D — основание перпендикуляра из точки C на эту биссектрису. K — основание перпендикуляра из центра вписанной окружности на BD . Докажите, что F , L , B и K лежат на одной окружности.

(Ф. Бахарев)

7. На бесконечном листе клетчатой бумаги проведена горизонтальная прямая вдоль линии сетки. Можно ли расставить в клетках верхней полуплоскости вещественные числа, по модулю не превосходящие единицы, так, чтобы выполнялись два условия:

- (i) в каждом (бесконечном) столбце все числа различны;
 - (ii) число, стоящее в любой клетке, не лежащей на границе полуплоскости, равно среднему арифметическому четырех своих соседей?
- (Н. Филонов)