САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2005 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 6 класс.

---

1. Саша написал 26 последовательных натуральных чисел и выбрал десять из них. Сумма выбранных чисел оказалась простым числом. Может ли так быть, что сумма остальных 16 чисел — тоже простое число? (*А. Храбров*)

2. В город, где живут только рыцари и лжецы, приехал Фантомас. Некоторые жители побеседовали с Фантомасом, а некоторые из тех, кто побеседовал, даже пригласили его в гости. На вопрос "кто разговаривал с Фантомасом" положительно ответили 50 % горожан, а на вопрос "кто пригласил его в гости" — 60 %. Кого больше среди тех, кто разговаривал с Фантомасом, но не пригласил его в гости, — рыцарей или лжецов? (*Ф. Назаров*)

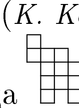
3. На плоскости нарисовано шесть отрезков, причем никакие два из них не лежат на одной прямой. Отмечены все точки пересечения отрезков. Оказалось, что каждая отмеченная точка принадлежит ровно двум отрезкам. На первом отрезке отмечено 3 точки, на втором — 4 точки, на трех следующих — по 5 точек. Сколько точек отмечено на шестом отрезке? (*К. Кохась*)

4. Сумма двух десятизначных чисел, записываемых только единицами и девятками, начинается с двойки. Докажите, что в записи суммы количество троек равно сумме количества нулей и количества восьмерок. (*О. Ванюшина*)

. . . .

Олимпиада 2005 года. II тур. 6 класс. Выводная аудитория.

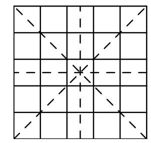
5. Есть таблица 2×8 (2 — по вертикали) и карточки с числами от 1 до 16. Двое игроков по очереди кладут по одной карточке на свободные клетки таблицы. Когда все карточки разложены, игроки отмечают в каждом столбце наименьшее число и находят сумму всех отмеченных чисел. Если эта сумма не делится на 7 — выигрывает первый игрок, а если делится — второй. Кто выиграет при правильной игре? (*К. Кохась, Д. Челкак*)

6. В квадрате 11×11 разместили 19 клеточных фигур вида . Докажите, что какая-то клетка квадрата накрыта не менее чем тремя фигурками. (*К. Кохась*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2005 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 7 класс.

---

1. Клетки квадрата 5×5 раскрашены в три цвета. Докажите, что можно перекрасить не более 9 клеток так, что при сгибании квадрата по одной из пунктирных линий раскраски половинок квадрата совпадут. (*К. Кохась*)



2. В волейбольном турнире, состоящем из 9 туров, приняли участие 10 команд. В каждом туре команды некоторым образом разбивались на 5 пар и команды из одной пары играли между собой (при этом никакие две команды не играли друг с другом больше 1 раза). Команда "Лузер" после 5-го тура занимала чистое второе место (т. е. имела меньше побед, чем одна из команд и больше, чем все остальные). Докажите, что по окончании турнира она не могла занять чистое последнее место (т. е. иметь меньше побед, чем все остальные команды). (*Ф. Бахарев*)

3. Сумма двух двадцатизначных чисел, записываемых только единицами и девятками, начинается с двойки. Докажите, что в записи суммы количество троек равно сумме количества нулей и количества восьмерок. (*О. Ванюшина*)

4. Есть таблица 8×8 и карточки с числами от 1 до 64. Двое игроков по очереди кладут по одной карточке на свободные клетки таблицы. Когда все карточки разложены, игроки отмечают в каждом столбце наименьшее число и находят сумму всех отмеченных чисел. Если эта сумма четна — выигрывает первый игрок, а если нечетна — второй. Кто выиграет при правильной игре? (*К. Кохась, Д. Челкак*)

. . . .

Олимпиада 2005 года. II тур. 7 класс. Выводная аудитория.

5. На концерт пришли 125 человек, причем каждый был знаком ровно с 10 другими. В перерыве некоторые слушатели ушли. Оказалось, что все оставшиеся по-прежнему имеют в зале одинаковое количество знакомых. Докажите, что среди ушедших были знакомые друг с другом. (*С. Берлов*)

6. Дан равносторонний треугольник ABC. На сторонах AB, AC и BC выбраны точки X, Y и Z соответственно так, что $BZ = 2AY$ и $\angle XYZ = 90°$. Докажите, что $AX + CZ = XZ$. (*С. Берлов*)

7. На железной дороге Петербург–Владивосток имеется 200 остановок (включая конечные). Поезда от Петербурга до Владивостока ходят так, что для любых двух остановок существует поезд, останавливающийся на них, но не останавливающийся между ними. Какое наименьшее количество поездов может ходить по маршруту Петербург–Владивосток? (*В. Франк*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2005 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 8 класс.

1. Какое наибольшее количество различных натуральных чисел можно выбрать так, чтобы сумма любых трех из них была простым числом? (*Ф. Петров*)

2. Дан треугольник ABC. На сторонах AB, AC и BC выбраны точки D, E и F соответственно так, что $BF = 2CF$, $CE = 2AE$ и $\angle DEF = 90°$. Докажите, что $\angle ADE = \angle EDF$. (*С. Берлов*)

3. На концерт пришли 125 человек, причем каждый был знаком ровно с 10 другими. В перерыве некоторые слушатели ушли. Оказалось, что все оставшиеся по-прежнему имеют одинаковое количество знакомых в зале. Докажите, что среди ушедших были знакомые друг с другом. (*С. Берлов*)

4. Есть 30 карточек, на каждой из которых написано вещественное число (эти числа не обязательно различны). Карточки разбили на пары, и оказалось, что сумма чисел в каждой паре равна 1. Потом карточки разбили на пары другим способом, и оказалось, что во всех парах, кроме одной, произведение чисел равно 1. Докажите, что и в оставшейся паре произведение чисел равно 1. (*Ф. Петров*)

. . . .

Олимпиада 2005 года. II тур. 8 класс. Выводная аудитория.

5. Даны натуральные числа a, b и c, ни одно из которых не является делителем другого. Известно, что

$$\text{НОД}(a, b) + \text{НОК}(a, b) = \text{НОД}(a, c) + \text{НОК}(a, c) + 1.$$

Докажите, что $c < b \leq \frac{3}{2}c$. (*С. Иванов*)

6. На клетчатой бумаге нарисован треугольник, вершины которого лежат в узлах, а стороны не идут по линиям сетки. Каждая клетка разбита на 4 одинаковых квадратика, левый верхний из которых окрашен в красный цвет, а правый нижний — в синий. Докажите, что в треугольнике красный и синий цвета занимают одинаковую площадь. (*С. Иванов*)

7. Фальшивомонетчик изготовил 90 фальшивых монет, весящих по 9 грамм, и по неосторожности добавил к ним 10 настоящих, весящих по 10 грамм. Монеты перемешались, и он не может отличить одни от других. У него есть весы, которые позволяют взвесить любое количество монет, но выдают либо точный вес, либо вес, на 1 грамм больший истинного. Может ли он с помощью этих весов гарантированно найти хотя бы одну фальшивую монету? (*С. Берлов*)