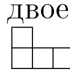
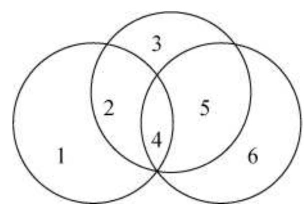
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2005 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 6 класс.

---

1. Расставьте в таблице 4×5 клеток 10 единиц, 5 двоек и 5 четверок так, чтобы в любой фигурке из четырех клеток вида , сумма чисел не была равна восьми. (Фигурку можно поворачивать и переворачивать.) (*К. Кохась*)

2. В классе 30 учеников. Они сидят за 15 партами так, что ровно половина всех девочек класса сидят с мальчиками. Докажите, что их не удастся пересадить (за те же 15 парт) так, чтобы ровно половина всех мальчиков класса сидели с девочками. (*С. Иванов*)

3. Три одинаковых круга расположены так, как показано на рисунке, причем площадь каждой из 6 частей равна целому числу квадратных сантиметров. Докажите, что если из суммы площадей первой, третьей и шестой части отнять площади второй и пятой частей, получится число, делящееся на 3. (*К. Кохась*)



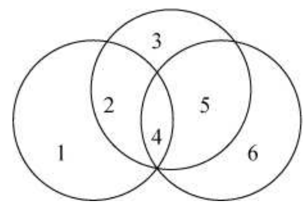
4. Костя задумал пятизначное число, затем вычеркнул одну из его цифр и полученное четырехзначное число сложил с исходным пятизначным. Получилось 41 751. Найдите задуманное число. Не забудьте обосновать свой ответ. (*К. Кохась*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2005 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 7 класс.

---

1. Покажите, как раскрасить клетки квадрата 9×9 в красный, синий и белый цвета так, чтобы в любом квадрате 3×3 было по три клетки каждого цвета, в любом столбце было по три клетки каждого цвета и любая синяя клетка имела бы и красную, и белую соседние клетки (две клетки являются соседними, если имеют общую сторону).

2. Три одинаковых круга расположены так, как показано на рисунке, причем площадь каждой из 6 частей равна целому числу квадратных сантиметров. Докажите, что если из суммы площадей первой, третьей и шестой части отнять площади второй и пятой частей, получится число, делящееся на 3. (*К. Кохась*)

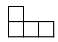


3. Поезд Москва – Нью-Йорк имеет сплошную нумерацию мест в вагонах (нумерация начинается с 1). Во всех вагонах одно и то же число мест. Известно, что места 2014 и 2045 находятся в одном и том же вагоне, а места 2508 и 2542 в разных, причем не соседних, вагонах. Сколько мест в одном вагоне? (*В. Франк*)

4. На доске написаны три четырехзначных натуральных числа. Если заменить в их записи все двойки на тройки, то сумма полученных чисел будет равна 10 985. А если заменить все четверки на семерки, то сумма будет равна 11 667. Чему равна сумма самих написанных чисел? (*К. Кохась*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2005 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I ТУР. 8 КЛАСС.

---

1. Заполните таблицу 8×8 числами 1, 2 и -4 так, чтобы в любом квадрате размера 4×4 клетки сумма чисел была равна нулю, а в любой фигурке из четырех клеток вида  сумма чисел была не равна нулю. (Фигурку можно поворачивать и переворачивать.) (*К. Кохась*)

2. В школе 450 учеников. Они сидят по двое за 225 партами так, что ровно половина всех девочек школы сидят с мальчиками. Докажите, что их не удастся пересадить (за те же 225 парт) так, чтобы ровно половина всех мальчиков школы сидели с девочками. (*С. Иванов*)

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполняются равенства $\angle B = \angle C$ и $CD = 2AB$. На стороне BC выбрана такая точка X, что $\angle BAX = \angle CDA$. Докажите, что $AX = AD$. (*С. Иванов*)

4. Будем обозначать через $[x]$ целую часть числа x (например, $[2{,}5] = 2$). Дано число $a > 30$. Известно, что

$$[a] \cdot [a^2] = [a^3]\,.$$

Докажите, что дробная часть числа a не превосходит $\frac{1}{2700}$.

(*Примечание*: может быть положительно оценено и частичное продвижение в задаче, например, доказательство того, что дробная часть не превосходит $\frac{1}{100}$.) (*А. Голованов*)

5. Одно и то же нечетное натуральное число разделили с остатком на каждое из чисел $2, 3, 4, \ldots, 1\,000\,000$. Все полученные остатки оказались различными, при этом один из них равен нулю. Докажите, что нулевой остаток получился при делении на число, большее 1000. (*С. Иванов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2005 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ

I тур. 9 класс.

1. В школе 450 учеников. Они сидят по двое за 225 партами так, что ровно половина всех девочек школы сидят с мальчиками. Докажите, что их не удастся пересадить (за те же 225 парт) так, чтобы ровно половина всех мальчиков школы сидели с девочками. (*С. Иванов*)

2. Четырехзначное число, состоящее из различных ненулевых цифр, делится на число, образованное своими первыми двумя цифрами, а также на число, образованное своими последними двумя цифрами. Докажите, что оно делится либо на 3, либо на 13. (*В. Франк*)

3. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ диагонали AD, BE и CF равны. Пусть P — точка пересечения диагоналей AD и CF, R — точка пересечения диагоналей BE и CF, Q — точка пересечения диагоналей AD и BE. Известно, что $AP = PF$, $BR = CR$ и $DQ = EQ$. Докажите, что точки A, B, C, D, E и F лежат на одной окружности.

(*Д. Карпов, Т. Образцов*)

4. На доске написано число, большее 1. Каждую минуту Федя делит написанное на доске число на его дробную часть и записывает на доску вместо старого. Докажите, что когда-нибудь на доске появится либо целое число, либо число, большее чем 20052004. (Напомним, что дробная часть числа x — это разность между x и ближайшим целым числом, не превосходящим x.) (*Д. Ростовский*)

5. Одно и то же нечетное натуральное число разделили с остатком на каждое из чисел 2, 3, 4, …, 100 000. Все полученные остатки оказались различными, при этом один из них равен нулю. Докажите, что нулевой остаток получился при делении на число, большее 50 000. (*С. Иванов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2005 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I ТУР. 10 КЛАСС.

---

1. Решите в натуральных числах уравнение

$$x + y^{10} = \text{НОК}(x, y)\,.$$

(НОК(x, y) — это наименьшее общее кратное чисел x и y.) (*Ф. Петров*)

2. AD — диаметр окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$. Точка E симметрична точке A относительно середины BC. Докажите, что $DE \perp BC$.

3. В клетках таблицы 10×10 расставлены натуральные числа от 21 до 40. Известно, что каждое из чисел 21, 24 и 40 встречается в ней ровно по 5 раз. Кроме того, числа, записанные в каждой строке, образуют (слева направо) арифметическую прогрессию. Чему может быть равна сумма всех чисел в таблице? (*А. Храбров*)

4. Одно и то же нечетное натуральное число разделили с остатком на каждое из чисел 2, 3, 4, …, 100 000. Все полученные остатки оказались различными, при этом один из них равен нулю. Докажите, что нулевой остаток получился при делении на число, большее 50 000. (*С. Иванов*)

5. Будем обозначать через $[x]$ целую часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x (например, $[2,5] = 2$), а через $\{x\}$ — дробную часть, т. е. $\{x\} = x - [x]$. Вещественное число $a > 2$ таково, что

$$[a-2] \cdot [a^2 + 2a + 4] = [a^3 - 8]\,.$$

Докажите, что $3\{a\}[a]^2 < 1$. (*А. Голованов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2005 года ПО МАТЕМАТИКЕ

I тур. 11 класс.

1. Дано три натуральных числа. Дима подсчитал наибольший общий делитель каких-то двух из них и получил 1 000 004. Саша тоже подсчитал НОД каких-то двух из них и получил 1 000 006. Наконец, Костя, подсчитав НОД каких-то двух данных чисел, получил 1 000 008. Докажите, что кто-то из мальчиков ошибся.

2. В треугольнике ABC с углом B, равным $60°$, проведена биссектриса CL. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Описанная окружность треугольника ALI пересекает сторону AC в точке D. Докажите, что точки B, L, D и C лежат на одной окружности.

(*С. Берлов*)

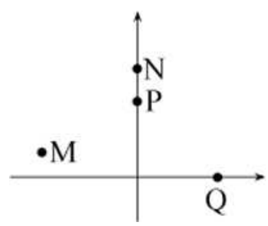
3. В клетках таблицы 10×10 расставлены натуральные числа от 21 до 40. Известно, что каждое из чисел 21, 24 и 40 встречается в ней ровно по 5 раз. Кроме того, числа, записанные в каждой строке, образуют (слева направо) арифметическую прогрессию. Чему может быть равна сумма всех чисел в таблице? (*А. Храбров*)

4. Могут ли графики многочленов

$$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + a \quad \text{и} \quad g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

располагаться на плоскости таким образом, что график $f(x)$ проходит через точки M, P и Q, а график $g(x)$ — через точки M и N (см. рисунок)?

(*Д. Ростовский*)



5. Дана бесконечная последовательность положительных чисел a_1, a_2, a_3, ... Известно, что $a_1 > 1$ и при любом натуральном n выполнено равенство $a_{n+1} = a_n/\sqrt{\{a_n\}}$. Докажите, что в этой последовательности найдется член, больший чем 20052004. (Через $\{x\}$ обозначается *дробная часть* числа x, т. е. разность между x и ближайшим целым числом, не превосходящим x.) (*Д. Ростовский, А. Храбров*)