САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2006 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 9 класс.

1. Дан квадратный трехчлен $f(x)$ и геометрическая прогрессия q_1, q_2, q_3, q_4, все члены которой различны. Может ли оказаться так, что $f(q_1) = q_2$, $f(q_2) = q_3$ и $f(q_3) = q_4$? (*Д. Ростовский, А. Порецкий*)

2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Биссектриса угла ACB пересекает эти высоты в точках F и L. Докажите, что середина отрезка FL равноудалена от точек A_1 и B_1. (*Ф. Бахарев*)

3. На 2006 карточках написано по натуральному числу. Изначально все числа взаимно просты в совокупности и больше единицы (но среди них могут быть одинаковые). Каждую минуту выбирают карточку с наибольшим числом (если наибольшее число написано на нескольких карточках, выбирается одна них), вычисляют его наименьший простой делитель и прибавляют этот делитель к числам на нескольких других карточках. Докажите, что числа на всех 2006 карточках не могут стать равными. (*С. Берлов*)

4. Костя режет на части клетчатый квадрат 70×70. Каждую минуту он берет наибольшую по площади из имеющихся частей квадрата (если таких частей несколько, то Костя может взять любую из них) и режет эту часть на две прямолинейным разрезом по линии сетки. Докажите, что через час площади всех частей будут меньше трети площади исходного квадрата. (*К. Кноп, Д. Карпов*)

. . . .

Олимпиада 2006 года. II тур. 9 класс. Выводная аудитория.

5. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D. Произвольный луч ℓ, выходящий из вершины B, пересекает отрезок AC в точке K, а описанную окружность треугольника ABC — в точке L. Докажите, что описанная окружность треугольника DKL проходит через фиксированную точку, отличную от D и не зависящую от выбора луча ℓ. (*Д. Столяров*)

6. На Марсе есть 2007 стран и более 2007 городов. Из каждого марсианского города выходит ровно 2006 дорог, соединяющих этот город с городами всех остальных стран. Известно, что из любого города можно добраться по дорогам до любого другого города. Докажите, что существует замкнутый маршрут, проходящий (по одному разу) не менее чем через 4012 городов. (*Д. Карпов*)

7. Две несократимые дроби $\frac{p}{q}$ и $\frac{m}{n}$ представили в десятичной записи. Среди разрядов после запятой с номерами от 500 000 до 1 000 000 оказалось менее 5 000 разрядов, в которых цифры этих дробей не совпадают, но хотя бы один такой разряд есть. Докажите, что знаменатель одной из этих дробей больше 10^{50}. (*А. Голованов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2006 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 10 класс.

1. Дан квадратный трехчлен $f(x)$ и число a. Известно, что числа a, $f(a)$, $f(f(a))$ и $f(f(f(a)))$ образуют геометрическую прогрессию с положительным знаменателем. Докажите, что она постоянная. *(Д. Ростовский, А. Порецкий)*

2. На сторонах AB, AC и BC треугольника ABC взяли точки K, L и M соответственно так, что $\angle BAC = \angle KLM = \angle BCA$. Докажите, что если $AL + LM + MB > CL + LK + KB$, то $LM < LK$. *(Ф. Бахарев)*

3. Имеется 100 реек длиной 1, 2, …, 100 см. Двое играют в следующую игру: за ход можно выбрать три рейки, сложить из них треугольник и сжечь его. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его противник? *(А. Солынин)*

4. Дано простое число $p > 2$. Дима подсчитал остатки от деления на p чисел $1!, 2!, 3!, \ldots, (p-1)!$. Докажите, что у него получилось больше чем $\sqrt{p}$ различных остатков. *(А. Храбров)*

....

Олимпиада 2006 года. II тур. 10 класс. Выводная аудитория.

5. По кругу написаны числа 0, 1, 2, …, 11 (именно в таком порядке). Разрешается взять число, заменить его на ноль, а к его соседям прибавить по половине этого числа. Можно ли сделать равными одиннадцать из этих двенадцати чисел? *(Ф. Бахарев)*

6. Дан треугольник ABC, все стороны которого различны. На лучах AB и CB отмечены точки B_1 и B_2 так, что $AB_1 = CB$, $CB_2 = AB$. На лучах CA и BA отмечены точки A_1 и A_2 так, что $CA_1 = BA$, $BA_2 = CA$. На лучах BC и AC отмечены точки C_1 и C_2 так, что $BC_1 = AC$, $AC_1 = BC$. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке. *(А. Смирнов)*

7. Числа от 1 до 2006 расставлены по кругу так, что выполнено следующее свойство: если $a + 1$ — левый сосед числа b, то $b + 1$ — левый сосед числа a (предполагается, что 2006+1 и 1 — одно и то же число). Докажите, что найдется такое число x, левым соседом которого является число $x + 1$. *(М. Антипов)*

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2006 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ

II тур. 11 класс.

---

1. Костя режет на части куб $90 \times 90 \times 90$, составленный из единичных кубиков. Каждую минуту он выбирает наибольшую по объему часть (если таких частей несколько — то любую из них) и режет ее надвое плоским разрезом, идущим по граням кубиков сетки (таким образом, все части суть параллелепипеды, составленные из единичных кубиков). Докажите, что через час объемы всех частей будут меньше половины объема исходного куба. (*К. Кноп, Ф. Петров*)

2. Дано простое число p. Докажите, что числа $1!, 2!, 3!, \ldots, (p-1)!, p!$ дают больше чем $\sqrt{p}$ различных остатков по модулю p. (*А. Храбров*)

3. В окружность ω вписан четырехугольник $ABCD$. Касательные к ω, проведенные в точках A и D, пересекаются в точке P, при этом дуга $ABCD$ лежит вне треугольника ADP. На луче BA нашлась точка K, такая что $PK \| AC$, а на луче CD — точка N, такая что $PN \| BD$. Докажите, что точки B, C, K, N лежат на одной окружности. (*Ф. Петров*)

4. Квадрат с вершинами (0,0), (0, 2006), (2006,2006) и (2006,0) разбит на 4000 треугольников. Докажите, что внутри одного из них лежит точка с целыми координатами. (*К. Сухов*)

5. Многочлен $p(x)$ n-й степени ($n \geq 3$) имеет n различных вещественных корней, наименьший из которых равен 0, а наибольший равен 1.

а) Докажите, что многочлен $p'(x)$ имеет корень, не меньший чем $1 - 1/n$.

б) Докажите, что расстояние между наибольшим и наименьшим корнем $p'(x)$ не меньше чем $\sqrt{1 - 2/n}$. (*Секефальви-Надь, 1918*)