САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2007 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II ТУР. 9 КЛАСС.

1. Квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + px + q$ таков, что уравнение $f(f(x)) = 0$ имеет ровно один корень. Докажите, что коэффициенты p и q неотрицательны.

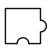
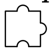
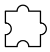
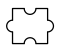
(*С. Иванов*)

2. AA_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC, в котором $\angle ABC = 45°$. Точки O и H — соответственно центр описанной окружности и ортоцентр $\triangle ABC$. Докажите, что прямая A_1C_1 проходит через середину отрезка OH.

(*С. Берлов*)

3. Десятичная запись квадрата натурального числа состоит из одной двойки и $k-1$ единицы, записанных в некотором порядке. Докажите, что k не делится на 11.

(*К. Сухов*)

4. На день рождения барону Мюнхгаузену подарили паззл, в котором очень много фигурок вида , , ,  и . Барон утверждает, что сложил из 2006 таких фигурок прямоугольник, причем все проямолинейные стороны фигурок оказались на границе прямоугольника. Не ошибается ли барон? (Фигурки можно поворачивать и переворачивать. Внутри прямоугольника не должно быть пустот и наложений фигурок друг на друга.)

(*Е. Сопкина, Д. Карпов*)

Награждение победителей олимпиады состоится 23 мая 2007 г. в 16.00 в кинозале Дворца творчества юных (Невский пр., 39)

Задачи и результаты олимпиады будут опубликованы на сайте http://www.pdmi.ras.ru/~olymp

....

Олимпиада 2007 года. II тур. 9 класс. Выводная аудитория.

5. $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, такой что $AD = BD = AC$. Точки M и N — середины сторон AB и CD соответственно. Отрезок MN пересекает диагонали четырехугольника в точках X и Y, P — точка пересечения AN и DM. Докажите, что $PX = PY$.

(*А. Смирнов*)

6. На доске выписаны числа $1, 2, 3, \ldots, 2007$. Разрешается выбрать несколько из чисел в этом ряду и заменить каждое из этих чисел на их среднее арифметическое. Произведено несколько таких операций. Докажите, что число, стоящее на после этого на месте единицы, меньше $2006\frac{1}{4}$.

(*Р. Сахипов*)

7. В стране A имеется $n \geq 3$ городов, которые соединены дорогами так, что из любого города можно доехать до любого другого. Если закрыть на ремонт любой набор дорог, образующих кольцевой маршрут, то найдется пара городов, между которыми нельзя проехать по оставшимся дорогам. Какое наибольшее число дорог может быть в A?

(*М. Антипов*)

Формулировка на языке графов. В связном графе $n \geq 3$ вершин. При удалении всех ребер любого цикла граф становится несвязным. Какое максимальное количество ребер может быть в таком графе?

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2007 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II ТУР. 10 КЛАСС.

---

1. Квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + ax + b$ таков, что уравнение $f(f(x)) = 0$ имеет ровно один корень. Докажите, что коэффициенты a и b неотрицательны. (*С. Иванов*)

2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Биссектриса внешнего угла C пересекает прямые AB и A_1B_1 в точках L и K соответственно. Оказалось, что $CL = 2CK$. Найдите угол C треугольника.

3. На доске были написаны 10 единиц. Каждую минуту какие-то 5 чисел увеличиваются на 50%, а другие 5 чисел уменьшаются на 50%. Может ли через час оказаться, что сумма чисел на доске равна 10? (*О. Иванова*)

4. В стране 100 городов и 199 дорог. (Каждая дорога соединяет два города, любые два города соединены не более чем одной дорогой.) Из любого города можно доехать по дорогам в любой другой. Докажите, что можно закрыть несколько дорог, образующих замкнутый маршрут, так, чтобы по оставшимся дорогам по-прежнему можно было доехать из любого города в любой другой. (*М. Антипов*)

`Награждение победителей олимпиады состоится 23 мая 2007 г. в 16.00`
`в кинозале Дворца творчества юных (Невский пр., 39)`

`Задачи и результаты олимпиады будут опубликованы на сайте`
`http://www.pdmi.ras.ru/~olymp`

....

Олимпиада 2007 года. II тур. 10 класс. Выводная аудитория.

5. $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, такой что $AD = BD = AC$. Точки M и N — середины сторон AB и CD соответственно, Отрезок MN пересекает диагонали четырехугольника в точках X и Y, P — точка пересечения отрезков AN и DM. Докажите, что $PX = PY$. (*А. Смирнов*)

6. Федя выписывает слева направо бесконечную последовательность ненулевых цифр. После выписывания каждой цифры он раскладывает на простые множители получившееся к этому моменту натуральное число. Докажите, что рано или поздно один из этих простых множителей окажется больше 100. (*Ф. Петров*)

7. На доске $n \times n$ стоят n^2 разных фишек. За одно действие разрешается переставить произвольным образом фишки, стоящие в одной горизонтали или в одной вертикали. Докажите, что за $3n - 4$ действия нельзя получить расстановку, симметричную исходной относительно главной диагонали. (*С. Иванов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2007 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 11 класс.

1. Каждый из учеников класса записал в своей тетрадке геометрическую прогрессию, состоящую из трех различных положительных чисел. Пусть A — сумма первых членов всех этих прогрессий, B — сумма их вторых членов, и C — сумма их третьих членов. Докажите, что последовательность A, B, C не является арифметической прогрессией. (*Ф. Бахарев*)

2. Квадрат натурального числа содержит несколько единиц и одну двойку. Докажите, что он делится на 11. (*К. Сухов*)

3. Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Оказалось, что $AB = BD$, $CE = EF$. Диагонали AC и BE пересекаются в точке X, диагонали BE и DF — в точке Y и диагонали BF и AE в точке Z. Докажите, что треугольник XYZ — равнобедренный.

4. В стране 100 городов и 199 дорог. (Каждая дорога соединяет два города, любые два города соединены не более чем одной дорогой.) Из любого города можно доехать по дорогам в любой другой. Докажите, что можно закрыть несколько дорог, образующих замкнутый маршрут, так, чтобы по оставшимся дорогам по-прежнему можно было доехать из любого города в любой другой. (*М. Антипов*)

Награждение победителей олимпиады состоится 23 мая 2007 г. в 16.00 в кинозале Дворца творчества юных (Невский пр., 39)

Задачи и результаты олимпиады будут опубликованы на сайте http://www.pdmi.ras.ru/~olymp

....

Олимпиада 2007 года. II тур. 11 класс. Выводная аудитория.

5. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC выбраны точки E и F так, что $AE = EF$ и $\angle CEF = \angle ABC$. Точка K на отрезке EC такова, что $EK = FC$. Докажите, что отрезок, соединяющий середины отрезков AF и EC, в два раза короче KF.

6. Федя выписывает слева направо бесконечную последовательность ненулевых цифр. После выписывания каждой цифры он раскладывает на простые множители получившееся к этому моменту натуральное число. Докажите, что рано или поздно один из этих простых множителей окажется больше 100. (*Ф. Петров*)

7. Последовательность x_n задана правилом

$$x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{n(n+1)},$$

причем $x_1 \in (0, 1)$. Докажите, что эта последовательность ограничена. (*А. Храбров*)