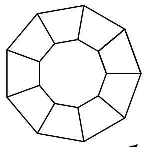
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2007 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ

II ТУР. 6 КЛАСС.

1. По кругу стоят 22 человека, каждый из них — рыцарь (который всегда говорит только правду) или лжец (который всегда лжет). Каждый из них произнес фразу: *следующие 10 человек по часовой стрелке после меня — лжецы.* Сколько среди этих 22 людей лжецов? (*К. Кохась*)

2. Из красных и синих отрезков составили фигуру, изображенную на рисунке. Для каждого красного отрезка подсчитали, сколько синих отрезков имеют с ним общие концы. Может ли сумма подсчитанных чисел быть равна 25? (*К. Кохась*)



3. На кольцевом шоссе длиной 100 км находится 10 столбов. На каждом столбе написано расстояние в километрах по шоссе до ближайшего столба. Оказалось, что сумма десяти написанных на столбах чисел равна 20. Докажите, что на шоссе есть участок длиной 16 км, на котором нет ни одного столба. (*О. Иванова*)

4. На доске пишут числа. За одну операцию можно дописать сразу два числа — $2 \cdot A$ и $3 \cdot A$, если на доске уже написано число A. Можно ли, начав с некоторого числа и дописывая числа по указанному правилу, добиться того, чтобы сумма всех чисел на доске стала равна 2007? (*Р. Семизаров*)

. . . .

Олимпиада 2007 года. II тур. 6 класс. Выводная аудитория.

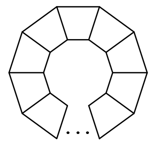
5. Фальшивомонетчик берет купюру и пририсовывает к ней справа некоторое количество нулей. Может ли он пририсовать на нескольких купюрах всего 239 нулей так, чтобы общая сумма возросла в 1000 раз? В обращении находятся купюры в 5, 10, 50, 100, 500, 1000 и 5000 руб. (А у фальшивомонетчика могут получаться и купюры большего достоинства.) (*А. Дюбина*)

6. В лесу родилось 100 елочек. 1 января на всех было разное количество иголок. За ночь на каждой елке вырастает 1, 2 или 3 иголки. В течение некоторого периода времени каждый день на всех елках было разное количество иголок, причем для любой елки был день, когда иголок на ней было больше, чем на всех остальных елках. Докажите, что этот период длился как минимум 198 дней (включая 1 января). (*О. Иванова*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2007 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 7 класс.

1. Вася и Петя получили от своих родителей по 100 рублей и решили покататься по городу. Вася катался на маршрутках за 17 р и за 10 р, а Петя – на автобусах за 12 р. К вечеру оказалось, что они поездили одинаковое количество раз и потратили одинаковое количество денег. Сколько у них осталось?

2. Из 2007 красных и синих отрезков составили фигуру, изображенную на рисунке (один 669-угольник расположен внутри другого, соответственные вершины соединены отрезками). Для каждого красного отрезка подсчитали, сколько синих отрезков имеют с ним общие концы. Может ли сумма подсчитанных чисел быть равна 2007?



(*К. Кохась*)

3. На доске было написано одно натуральное число меньшее 100. За одну операцию на доску можно дописать сразу два числа — $2 \cdot A$ и $3 \cdot A$, если на доске уже написано число A. Через некоторое время сумма всех чисел на доске оказалась равна 8667. Какое число было записано на доске изначально? (*Р. Семизаров*)

4. На острове рыцарей (которые говорят только правду) и лжецов (которые всегда лгут) состоялся шахматный фестиваль. 64 любителя шахмат встали по одному на клетки большой шахматной доски. После этого каждый сказал: *среди людей, стоящих со мной на одной горизонтали, больше лжецов, чем среди людей, стоящих со мной на одной вертикали.* Докажите, что количество рыцарей делится на 8. (*Ф. Петров*)

. . . .

Олимпиада 2007 года. II тур. 7 класс. Выводная аудитория.

5. На биссектрисе AL треугольника ABC, в котором $AL = AC$, выбрана точка K таким образом, что $CK = BL$. Докажите, что $\angle CKL = \angle ABC$.

6. Три простых числа таковы, что квадрат суммы любых двух из них, уменьшенный на 1, делится на третье. Докажите, какие-то два из этих простых чисел равны.

7. В государстве 50 городов, из каждого города выходит четыре дороги (любая дорога соединяет два города, между любыми двумя городами проложено не более одной дороги, все дороги имеют разную длину, измеряемую не обязательно целым числом километров). Суммарная длина всех дорог равна 25 000 км. Из каждого города выехала машина в самый близкий город. В сумме машины проехали 5000 км. Докажите, что длина одной из дорог не менее 300 км. (*О. Иванова*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2007 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ

II тур. 8 класс.

---

1. Два восьмизначных числа отличаются перестановкой цифр. Может ли их сумма быть равна 20062007? (*Н. Кушпель, Ф. Петров*)

2. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки X и Y так, что $AX = BY$ и при этом $\angle XYB = \angle BAC$. Точка B_1 — основание биссектрисы угла B. Докажите, что прямые XB_1 и YC параллельны. (*Ф. Петров*)

3. На острове рыцарей (которые говорят только правду) и лжецов (которые всегда лгут) состоялся шахматный фестиваль. 64 любителя шахмат встали по одному на клетки большой шахматной доски. После этого каждый сказал: *среди людей, стоящих со мной на одной горизонтали, больше лжецов, чем среди людей, стоящих со мной на одной вертикали.* Докажите, что количество рыцарей делится на 8. (*Ф. Петров*)

4. Сколько решений имеет уравнение

$$\text{НОК}(a, b+1) = \text{НОК}(b, a+3)$$

в натуральных числах, меньших миллиона? (*Ф. Петров*)

. . . .

Олимпиада 2007 года. II тур. 8 класс. Выводная аудитория.

5. В государстве 50 городов, из каждого города выходит четыре дороги (любая дорога соединяет два города, между любыми двумя городами проложено не более одной дороги, все дороги имеют разную длину, измеряемую не обязательно целым числом километров). Суммарная длина всех дорог равна 25 000 км. Из каждого города выехала машина в самый близкий город. В сумме машины проехали 5000 км. Докажите, что длина одной из дорог не менее 300 км. (*О. Иванова*)

6. В Эрмитаже в галерее героев войны 1812 г. висит 5 рядов по 19 портретов героев. Каждый портрет может висеть лицом к стене или к посетителям. Двое смотрителей играют в игру. За один ход можно перевернуть любые 4 портрета. Проигрывает тот смотритель, после хода которого получится расположение портретов, уже встречавшееся в ходе игры (возможно, в исходный момент). Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его партнер? (*К. Сухов, М. Русских*)

7. Калькулятор ФП-2007 умеет делать только одну операцию: умножать число на его первую цифру. Докажите, что введя в калькулятор 15-значное число, нельзя получить число 6^{100}. (*Ф. Петров*)