САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2007 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I ТУР. 6 КЛАСС.

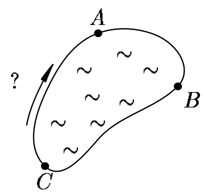
1. У ромашки 8 лепестков. Расставьте на лепестках ромашки 8 различных натуральных чисел, не превосходящих 25, так, чтобы числа на соседних лепестках отличались на 5 или на 7. (*О. Иванова, К. Кохась*)

2. У кота Матроскина на тельняшке 40 полосок: 20 черных и 20 белых. Он может перекрасить любую полоску в противоположный цвет (от этого некоторые полоски сливаются и становятся "толще"). Может ли после 13 перекрашиваний остаться ровно 12 полосок? Не забудьте обосновать свой ответ. (*К. Кохась*)

3. Оля задумала число. Остаток задуманного числа при делении на 9 равен неполному частному. Кроме того, остаток задуманного числа при делении на 14 тоже равен неполному частному. Какое число задумала Оля? Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет.

(*О. Иванова*)

4. На берегу озера три деревни — A, B и C. Туристы обходят озеро вдоль берега. Они вышли из деревни A двумя группами; первая группа пошла в сторону B, вторая — в сторону C. Дойдя до этих деревень, туристы разделились: в каждой группе несколько человек повернули обратно и вернулись в A с той же стороны, откуда вышли. Все остальные продолжили поход и в конце концов вернулись в A с другой стороны, обойдя озеро. Известно, что в первой группе было 100 человек, а в C побывало на 10 человек больше, чем в B. Сколько человек прошло во время похода из C в A?



(*Р. Семизаров*)

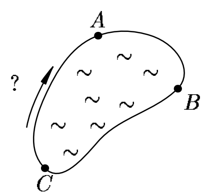
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2007 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 7 класс.

1. Можно ли расставить в таблице 5×5 различные натуральные числа так, чтобы разность любых двух соседних была равна либо 4, либо 7? (Числа в таблице считаются соседними, если они стоят рядом в одной строке или в одном столбце. При вычислении разности из большего числа вычитается меньшее.) (*С. Иванов, К. Кохась*)

2. На контрольной работе по перекрашиванию юный хамелеон перекрашивался из красного цвета в желтый, из желтого — в зеленый, из зеленого — в синий, из синего — в фиолетовый, а из фиолетового — опять в красный. Хамелеон перекрасился 2007 раз и стал из зеленого желтым. Известно, что он допустил одну ошибку, из-за которой покраснел, когда не должен был этого делать. Какого цвета он был перед этим покраснением? (*К. Сухов*)

3. Оля задумала число. Остаток задуманного числа при делении на 26 равен неполному частному. Кроме того, остаток задуманного числа при делении на 29 тоже равен неполному частному. Какое число задумала Оля? Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет. (*О. Иванова*)

4. На берегу озера три деревни — A, B и C. Туристы обходят озеро вдоль берега. Они вышли из деревни A двумя группами; первая группа пошла в сторону B, вторая — в сторону C. Дойдя до этих деревень, туристы разделились: в каждой группе несколько человек повернули обратно и вернулись в A с той же стороны, откуда вышли. Все остальные продолжили поход и в конце концов вернулись в A с другой стороны, обойдя озеро. Известно, что в первой группе было 100 человек, а в C побывало на 10 человек больше, чем в B. Сколько человек прошло во время похода из C в A?



(*Р. Семизаров*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2007 года ПО МАТЕМАТИКЕ

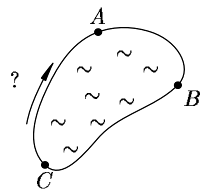
I тур. 8 класс.

1. Можно ли расставить в таблице 5×5 различные натуральные числа так, чтобы разность любых двух соседних была равна либо 4, либо 7? (Числа в таблице считаются соседними, если они стоят рядом в одной строке или в одном столбце. При вычислении разности из большего числа вычитается меньшее.) (*С. Иванов, К. Кохась*)

2. На контрольной работе по перекрашиванию юный хамелеон перекрашивался из красного цвета в желтый, из желтого — в зеленый, из зеленого — в синий, из синего — в фиолетовый, а из фиолетового — опять в красный. Хамелеон перекрасился 2007 раз и стал из зеленого желтым. Известно, что он допустил одну ошибку, из-за которой покраснел, когда не должен был этого делать. Какого цвета он был перед этим покраснением? (*К. Сухов*)

3. Дан треугольник KML, в котором $\angle KML = 121^\circ$. Точки S и N на стороне KL таковы, что $KS = SN = NL$. Известно, что $MN > KS$. Докажите, что $MS < NL$. (*Ф. Петров, К. Сухов*)

4. На берегу озера три деревни — A, B и C. Туристы обходят озеро вдоль берега. Они вышли из деревни A двумя группами; первая группа пошла в сторону B, вторая — в сторону C. Дойдя до этих деревень, туристы разделились: в каждой группе несколько человек повернули обратно и вернулись в A с той же стороны, откуда вышли. Все остальные продолжили поход и в конце концов вернулись в A с другой стороны, обойдя озеро. Известно, что в первой группе было 100 человек, а в C побывало на 10 человек больше, чем в B. Сколько человек прошло во время похода из C в A?



(*Р. Семизаров*)

5. На координатной плоскости нарисованы всевозможные прямые вида $y = ax + b$, где a и b — натуральные числа, не превосходящие 12. Какое наибольшее количество из этих прямых проходит через одну точку? (*А. Голованов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2007 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ

I тур. 9 класс.

1. В классе учатся мальчики и девочки. Средний вес мальчиков равен 42 кг, девочек — 27 кг, а всех школьников — 35,5 кг. Докажите, что количество мальчиков делится на 17. (*А. Храбров*)

2. Значения двух различных квадратных трехчленов

$$x^2 - ax - b \quad \text{и} \quad x^2 - px - q$$

в точке t совпадают. Известно, что a, b, p, $q > 0$ и $ab = pq$. Докажите, что $t > 0$. (*Д. Карпов*)

3. У Димы есть клетчатый квадратный лист 20×20. Вначале все его клетки покрашены в белый цвет. Дима может произвольным образом выделить клетчатый квадрат 11×11 на своем листе и перекрасить все клетки этого квадрата: белые — в черный цвет, а черные — в белый цвет. Сможет ли Дима с помощью нескольких таких операций получить шахматную раскраску клеток листа 20×20 (т. е. раскраску, в которой любые две соседние по стороне клетки покрашены в разные цвета)? Сторона клетки равна 1. (*Д. Карпов*)

4. На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC отмечены точки D и E, такие что $AD \perp BC$ и $AD = DE$. На стороне AC отмечена точка F, такая что $EF \perp BC$. Найдите угол $\angle ABF$. (*А. Пастор*)

5. Несколько натуральных чисел, оканчивающихся на 8, представлены в виде неправильных дробей. Пусть P — сумма числителей всех этих дробей, а Q — сумма их знаменателей. Оказалось, что $P = 2007 \cdot Q$. Найдите последнюю цифру числа P. (*Р. Семизаров*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2007 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 10 класс.

1. Можно ли расставить в таблице 5×5 различные натуральные числа так, чтобы разность любых двух соседних была равна либо 4, либо 7? (Числа в таблице считаются соседними, если они стоят рядом в одной строке или в одном столбце. При вычислении разности из большего числа вычитается меньшее.) (*С. Иванов, К. Кохась*)

2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, при этом $AB = BD$ и $AC = BC$. Докажите, что $\angle ABC < 60°$.

3. Даны два квадратных трехчлена $f(x)$ и $g(x)$. Известно, что каждое из выражений $3f(x) + g(x)$ и $f(x) - g(x)$ — квадратный трехчлен, имеющий ровно один корень. Известно также, что трехчлен $f(x)$ имеет два корня. Докажите, что трехчлен $g(x)$ не имеет корней. (*С. Иванов*)

4. На координатной плоскости нарисованы всевозможные прямые вида $y = ax + b$, где a и b — натуральные числа, не превосходящие 12. Какое наибольшее количество из этих прямых проходит через одну точку? (*А. Голованов*)

5. Калькулятор АЖ-2007 оперирует парой чисел a и b и имеет 9 кнопок, помеченных цифрами от 1 до 9. Если нажать на кнопку с цифрой x, равной 1, 2, 3 или 4, то калькулятор заменяет число a на $a+x$, а число b — на $b - x^2$. Если же нажатая цифра x равна 5, 6, 7, 8 или 9, то он заменяет a на $a-x$, а b — на $b+x^2$. Вначале оба числа равны 2007. Можно ли, нажимая кнопки, добиться того, чтобы оба числа стали равны нулю? (*С. Берлов, К. Кохась*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2007 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I ТУР. 11 КЛАСС.

---

1. Можно ли расставить в таблице 5×5 различные натуральные числа так, чтобы любые два соседних числа отличались ровно в 16 или ровно в 128 раз? (Числа в таблице считаются соседними, если они стоят рядом в одной строке или в одном столбце.) (*С. Иванов, К. Кохась*)

2. Федя поделил натуральное число с остатком на 999, и оказалось, что неполное частное равно остатку. Дима обнаружил, что при делении того же числа на 599 неполное частное тоже равно остатку. Докажите, что и при делении этого числа на 1499 неполное частное равно остатку. (*О. Иванова*)

3. В тетраэдре $ABCD$ углы ABC и ADC прямые. Известно, что $AC = 2$. Докажите, что $BD < 2$. (*Ф. Бахарев*)

4. На координатной плоскости нарисованы графики всевозможных функций вида

$$y = x^3 + ax + b\,,$$

где a и b — натуральные числа, не превосходящие 80. Какое наибольшее количество из этих графиков пересекается в одной точке? (*А. Голованов*)

5. На Марсе в ходу две денежные единицы: рубли и тугрики. Разменный автомат действует следующим образом: если положить в него n^2 рублей (при любом натуральном n, не превосходящем 26), то он выдает n тугриков. Если же положить в него m тугриков (при любом натуральном $m \geq 27$), то он выдаст m^2 рублей. Марсианин Саша подошел к автомату, имея в кармане только 89 тугриков. Могло ли в результате нескольких обменов у Саши остаться 2007 рублей и ни одного тугрика? (*С. Берлов, К. Кохась*)