САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2008 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 9 класс.

---

1. График $y = x^2 + ax + b$ пересекает оси координат в трех разных точках A, B, C. Центр описанной окружности треугольника ABC лежит на прямой $y = x$. Докажите, что $a + b + 1 = 0$. *(Ф. Бахарев)*

2. В королевстве между некоторыми городами открыты дороги с двусторонним движением так, что из любого города можно проехать по дорогам в любой другой. Проезд по дорогам платный, причем стоимость у всех дорог разная.

Министр составил список всех возможных маршрутов по дорогам страны, проходящих через каждый город ровно один раз. Король-реформатор отметил в каждом из этих маршрутов самую дорогую дорогу и приказал закрыть все дороги, которые были отмечены хотя бы один раз. После этого оказалось, что из города A нельзя проехать в город B, из города B — в город C, а из города C — в город A. Докажите, что приказ короля был выполнен неправильно. *(С. Берлов, А. Смирнов)*

3. Пятиугольник $ABCDE$ описан около окружности S. Сторона BC касается S в точке K. Известно, что $AB = BC = CD$. Докажите, что $\angle EKB = 90°$. *(А. Смирнов)*

4. На доске выписаны числа $x_1, \ldots, x_{100}$, такие что $x_1 = 1/2$ и для любого n от 1 до 99 выполняется равенство $x_{n+1} = 1 - x_1 x_2 \ldots x_n$. Докажите, что $x_{100} > 0.99$. *(Ф. Петров)*

. . . .

Олимпиада 2008 года. II тур. 9 класс. Выводная аудитория.

5. Даны различные натуральные числа a, b, c. Докажите неравенство

$$\text{НОД}(ab+1, bc+1, ac+1) \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

(Ф. Петров)

6. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке E, а отрезки AC и BD — в точке F. Выберем на луче EF точку P так, что $\angle BPE = \angle CPE$. Докажите, что $\angle APB = \angle DPC$. *(А. Смирнов)*

7. Квадрат 2008×2008 разбит на области, каждая из которых представляет собой квадратик 1×1. В каждой области записано число 0 или 1, причем нулей и единиц в квадрате поровну. Разрешается стереть границу между двумя соседними областями, объединив их в одну; при этом числа, записанные в этих областях, удаляют, а в полученную область записывают их среднее арифметическое. После нескольких таких операций останется одна область, совпадающая со всем квадратом. Докажите, что можно так производить операции, что записанное в этой области число будет меньше, чем $1/2^{10^6}$. *(К. Сухов)*

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2008 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II ТУР. 10 КЛАСС.

---

1. Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ таков, что если заменить любой из его коэффициентов на 1, то получится квадратный трехчлен, имеющий хотя бы один вещественный корень. Докажите, что исходный трехчлен принимает хотя бы в одной точке отрицательное значение. (*А. Голованов*)

2. Точка O — центр описанной окружности вписанного четырехугольника $ABCD$. Известно, что $\angle AOC = \angle BAD = 110^\circ$ и $\angle ABC > \angle ADC$. Докажите, что $AB + AD > CD$. (*А. Пастор*)

3. Даны различные натуральные числа a, b, c. Докажите, что

$$\text{НОД}(ab+1, bc+1, ac+1) \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

(*Ф. Петров*)

4. Ведущий загадал число от 1 до n. Ему можно задать сразу несколько вопросов про это число, на которые предполагается ответ "да" или "нет". После чего ведущий отвечает на все эти вопросы, правда не обязательно в том порядке в котором они задавались. Какое наименьшое число вопросов нужно задать, чтобы гарантировано узнать задуманное ведущим число? (*А. Акопян*)

. . . .

Олимпиада 2008 года. II тур. 10 класс. Выводная аудитория.

5. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке E, а отрезки AC и BD — в точке F. На луче EF отмечена точка P такая, что $\angle BPE = \angle CPE$. Докажите, что $\angle APB = \angle DPC$. (*А. Смирнов*)

6. Диагональ выпуклого 100-угольника называется хорошей, если с каждой стороны от нее расположено четное число сторон. 100-угольник разбили на треугольники непересекающимися диагоналями, ровно 49 из которых хорошие. Треугольники раскрашены в два цвета правильным образом (т. е. треугольники одного цвета не могут иметь общую сторону). Докажите, что треугольников первого и второго цвета поровну. (*О. Иванова*)

7. Последовательность (x_n) задается следующим образом: $x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_{n+1} = 1 - x_1 x_2 \ldots x_n$ при $n \geq 1$. Докажите, что $0.99 < x_{100} < 0.991$. (*Ф. Петров*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2008 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II ТУР. 11 КЛАСС.

1. Дан квадрат $10\,000 \times 10\,000$. Какое наименьшее количество клеток надо отметить в этом квадрате так, чтобы в каждом квадрате 10×10 и в каждой горизонтальной полоске 1×100 была отмечена хотя бы одна клетка? (*С. Берлов*)

2. Пятиугольник $ABCDE$ описан около окружности ω. Сторона BC касается ω в точке K. Известно, что $AB = BC = CD$. Докажите, что $\angle EKB = 90^\circ$.

(*А. Смирнов*)

3. Даны 2008 квадратных трехчленов $x^2 - a_k x + b_k$, $k = 1, 2, \ldots, 2008$, у которых на месте коэффициентов a_k и b_k встречаются по одному разу все числа от 1 до 4016. Никакие два трехчлена не имеют общих корней. На вещественной прямой отметили все корни этих трехчленов. Докажите, что расстояние между какими-то двумя отмеченными точками меньше $1/250$.

4. По кругу расставлены 100 натуральных чисел, никакие два из которых не делятся друг на друга. Между каждыми двумя соседними числами (одновременно) вписывается результат от деления левого из них на их наибольший общий делитель, после чего исходные 100 чисел стираются. Эту операцию повторили несколько раз. Какое наибольшее количество единиц может теперь стоять вдоль круга?

(*М. Антипов*)

. . . .

Олимпиада 2008 года. II тур. 11 класс. Выводная аудитория.

5. Все грани тетраэдра $ABCD$ — остроугольные треугольники. В гранях ABC и ABD провели высоты AK и AL соответственно. Оказалось, что точки C, K, L, и D лежат на одной окружности. Докажите, что $AB \perp CD$. (*Д. Максимов*)

6. Какое наибольшее значение может принимать наибольший общий делитель трех чисел $ab + 1$, $bc + 1$ и $ac + 1$, если a, b и c — различные натуральные числа, сумма которых не превосходит $3\,000\,000$? (*Ф. Петров*)

7. В стране 10 000 городов, некоторые из которых соединены дорогами. Из каждого города выходит меньше 100 дорог. Кроме того, любой циклический маршрут, содержащий нечетное число дорог, проходит как минимум по 101 дороге. Докажите, что можно разбить страну на 100 групп по 100 городов так, чтобы любая дорога связывала города из разных групп. (*С. Берлов*)