САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2008 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
Отборочный тур. 9 класс.

1. Многочлен третьей степени с целыми коэффициентами имеет три положительных иррациональных корня. Докажите, что они не могут образовывать геометрическую прогрессию. (*А. Храбров*)

2. На вечеринке собрались несколько школьников, причем у каждого участника вечеринки был знакомый среди присутствующих. Кроме того, у каждого из собравшихся знакомых мальчиков оказалось ровно в 3.2 раза больше, чем знакомых девочек. Какое наименьшее количество школьников могло собраться на вечеринку? (*С. Берлов*)

3. Обозначим через $p(a)$ минимальный простой делитель натурального числа $a > 1$. Для натуральных $m, n > 1$ выполняется соотношение

$$m + n = (p(m) - p(n))(p(m) + p(n)).$$

Какие значения может принимать число m? (*М. Черный*)

4. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Пусть s_1 — окружность, проходящая через A и B и касающаяся прямой AC, а s_2 — окружность, проходящая через C и D и касающаяся AC. Докажите, что прямые AC, BD и вторая общая внутренняя касательная к s_1 и s_2 проходят через одну точку. (*А. Смирнов*)

5. Суперконь — шахматная фигура, один ход которой состоит из двух шагов обычного коня. (В частности, суперконь держит под боем ту клетку, на которой сам стоит.)

Несколько клеток бесконечной доски покрашено в синий цвет. Обозначим за N количество клеток, на которые можно попасть ходом коня с синих клеток. Докажите, что можно поставить на доску не более $N/8$ суперконей, которые будут держать под боем все синие клетки. (*I. Rusza*)

6. Дана трапеция $ABCD$ ($AB \| CD$). Обозначим через R_1 и R_2 радиусы описанных окружностей треугольников ACD и BCD. Докажите, что

$$AB^2 \leq 4R_1R_2.$$

(*Д. Джукич*)

7. Докажите, что для любых натуральных a и b верно неравенство

$$(ab)^{a^2+b^2}\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{2ab} \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{2(a+b)^2}$$

(*К. Сухов*)

8. Двое игроков по очереди выписывают на доску последовательность натуральных чисел. Изначально последовательность состоит из трех членов: 1, 2, 3. За один ход можно дописать к последовательности один член, равный сумме последнего из написанных членов с одним из более ранних. Выигрывает тот, кто получит число, не меньшее 1000. Кто выигрывает при правильной игре? (*О. Иванова*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2008 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Отборочный тур. 10 класс.

1. Даны унитарные квадратные трехчлены $f_1, \ldots, f_{101}$. Все их попарные суммы имеют по два корня, причем все эти $101 \cdot 100$ корней различны. Докажите, что множество корней исходных трехчленов не может состоять ровно из 98 различных чисел. (*А. Храбров*)

2. Пусть $p(a)$ — наименьший простой делитель натурального числа a. Натуральные числа $m, n > 1$ таковы, что $m^2 + n = p(m) + p(n)^2$. Докажите, что $m = n$. (*М. Черный, С. Берлов*)

3. В Стране Чудес прошли выборы. На каждом из 30 избирательных участков было зарегистрировано 1000 избирателей. Известно, что на каждом участке доля проголосовавших за партию "ВЕДРО" была больше нуля и равнялась доле избирателей этого участка, пришедших на выборы. По официальным данным партия "ВЕДРО" набрала ровно 64,3% голосов от числа избирателей, пришедших на выборы. Докажите, что официальные данные не верны. (*М. Мурашкин*)

4. Пусть I и I_A — соответственно центры вписанной и вневписанной окружностей треугольника ABC. Прямая ℓ_A проходит через ортоцентры треугольников BIC и BI_AC. Аналогичным образом определяются прямые ℓ_B и ℓ_C. Докажите, что прямые ℓ_A, ℓ_B и ℓ_C пересекаются в одной точке. (*С. Берлов*)

5. В куче 140 спичек. Двое по очереди берут спички, первый — от 1 до 3, второй — от 1 до 5. Когда все спички разобраны, подсчитывают разность числа спичек у игроков. Если она делится на 7 или на 13 — выигрывает второй, иначе выигрывает первый. Кто выиграет при правильной игре? (*К. Кохась*)

6. Дан параллелограмм $ABCD$ такой, что $\angle BAC = 40°$ и $\angle BCA = 20°$. На диагонали AC отмечены точки E и G, а на стороне AD — точки F и H так, что точки B, E и F лежат на одной прямой, $\angle ABG = \angle AHG = 90°$, и $AF = EG$. Докажите, что $AF = HD$. (*Р. Сахипов*)

7. Многочлен степени n (где $n \not| \, 2$) с рациональными коэффициентами имеет ровно n вещественных корней, образующих геометрическую прогрессию. Докажите, что как минимум один из его корней рационален. (*А. Храбров*)

8. Назовем *расстоянием* между двумя вершинами графа длину самого короткого пути между ними (длина пути измеряется в ребрах). В графе $n > 7$ вершин и не менее, чем $\frac{n(n-7)}{2} + 10$ ребер. Докажите, что вершины нашего графа можно разбить на две группы так, чтобы расстояние между любыми двумя вершинами из разных групп не было равно трем ребрам. (*Д. Карпов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2008 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
Отборочный тур. 11 класс.

---

1. Пусть $p(a)$ — минимальный простой делитель натурального числа a. Натуральные числа m и n, большие 1, таковы, что $m^2+n = p(m)+p(n)^2$. Докажите, что $m = n$. (*М. Черный, С. Берлов*)

2. Суперконь — шахматная фигура, один ход которой состоит из двух шагов обычного коня. (В частности, суперконь держит под боем ту клетку, на которой сам стоит.)

Несколько клеток бесконечной клетчатой плоскости покрашено в синий цвет. Количество клеток, на которые можно попасть ходом коня с синей клетки, равно N. Докажите, что можно поставить на доску не более $N/8$ суперконей, которые будут держать под боем все синие клетки. (*I. Rusza*)

3. Даны два остроугольных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Известно, что стороны AB, BC и AC первого треугольника численно равны величинам углов C_1, A_1, B_1 второго, и наоборот, стороны A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 равны углам C, A, B. Чему может быть равна сумма площадей этих треугольников? (*К. Кохась*)

4. Вневписанные окружности касаются сторон AB и AC треугольника ABC в точках P и Q соответственно. Точка L — середина PQ, точка M — середина BC. Точки L_1 и L_2 симметричны точке L относительно середин отрезков BM и CM соответственно. Докажите, что $L_1P = L_2Q$. (*С. Берлов, А. Смирнов*)

5. Двое игроков по очереди выписывают на доску последовательность натуральных чисел. Изначально последовательность состоит из трех членов: 1, 2, 3. За один ход можно дописать к последовательности один член, равный сумме последнего из написанных членов с одним из более ранних. Выигрывает тот, кто первым получит число, не меньшее чем 1000000. Кто выиграет при правильной игре? (*О. Иванова*)

6. Внутри остроугольного треугольника ABC выбрана такая точка K, что $\angle AKC = 2\angle ABC$, и $AK/KC = (AB/BC)^2$. Точки A_1 и C_1 — середины сторон BC и AB. Докажите, что точка K лежит на описанной окружности треугольника A_1BC_1. (*С. Берлов, Ф. Петров*)

7. Многочлен степени n с рациональными коэффициентами имеет n различных иррациональных корней, образующих геометрическую прогрессию. Какие значения может принимать число n? (*А. Храбров*)

8. На n карточках написаны целые числа a_1, a_2, $\ldots$, a_n, не большие, чем 1, с положительной суммой (например: $1, 1, 1, 0, 0, 0, -2$). Набор карточек назовем интересным, если сумма чисел на этих карточках равна 1. Для всякого интересного набора напишем на доске число $(k-1)!(n-k)!$, где k — число карточек в этом наборе. Докажите, что сумма выписанных на доску чисел равна $n!$

(В приведенном примере мы 3 раза напишем 0!6!, 9 раз 1!5!, 9 раз 2!4!, 4 раза 3!3!, 3 раза 4!2!, 3 раза 5!1!, 1 раз 6!0! — в сумме 7!). (*А. Зелевинский*)