САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2012 года ПО МАТЕМАТИКЕ
II тур. 9 класс.

---

1. Найдите все такие целые числа b, для которых уравнение $[x^2] - 2012x + b = 0$ имеет нечетное число корней. (*А. Храбров*)

2. Натуральные числа a, b, c больше 100 и взаимно просты в совокупности (то есть все три числа не имеют общего делителя, кроме 1). Известно, что $a + b$ делится на c и $b + c$ делится на a. Найдите наименьшее возможное значение b. (*С. Берлов*)

3. Биссектриса угла между диагоналями вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекает стороны AB и CD в точках X и Y соответственно. Известно, что середина стороны AD равноудалена от точек X и Y. Докажите, что середина стороны BC также равноудалена от точек X и Y. (*С. Берлов*)

4. В ЕГЭ принимают участие 25 школьников. Экзамен состоит из нескольких вопросов, на каждый из которых можно дать один из пяти вариантов ответа. Оказалось, что любые два школьника не более чем на один вопрос ответили одинаково. Докажите, что в ЕГЭ было не больше 6 вопросов.

. . . .

Олимпиада 2012 года. II тур. 9 класс. Выводная аудитория.

5. В клетках квадрата 100×100 расставлены натуральные числа, причем в каждой строчке и в каждом столбце все числа различны. Может ли оказаться, что для любого квадрата со сторонами, идущими по линиям сетки, сумма чисел в четырех угловых клетках этого квадрата является квадратом натурального числа? (*В. Франк*)

6. На биссектрисе угла B треугольника ABC (внутри треугольника) выбрана точка L, а на отрезке BL выбрана точка K. Известно, что $\angle KAB = \angle LCB = \alpha$. Внутри треугольника выбрана точка P такая, что $AP = PC$ и $\angle APC = 2\angle AKL$. Докажите, что $\angle KPL = 2\alpha$. (*С. Берлов*)

7. У ослика Иа-Иа есть 2012 палочек натуральной длины, сумма их длин равна n. Ослик хочет выломать из них 2012 палочек: длины 1, длины 2, ..., длины 2012. (Из одной палочки можно выламывать несколько, например, из палочки длины 6 можно выломать палочки длины 1 и 4). При каком наименьшем n Иа-Иа заведомо сможет это сделать? (*А. Храбров*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2012 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ

II тур. 10 класс.

1. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} x^3 - ax^2 + b^3 = 0 \\ x^3 - bx^2 + c^3 = 0 \\ x^3 - cx^2 + a^3 = 0 \end{cases}$$

не имеет вещественных решений, если числа a, b и c различны.

2. На стороне BE треугольника ABE выбраны точки C и D так, что $BC = CD = DE$. Точки X, Y, Z и T — центры описанных окружностей треугольников ABE, ABC, ADE и ACD соответственно. Докажите, что T — точка пересечения медиан треугольника XYZ. (*С. Иванов*)

3. В ЕГЭ принимают участие 25 школьников. Экзамен состоит из нескольких вопросов, на каждый из которых можно дать один из пяти вариантов ответа. Оказалось, что любые два школьника не более чем на один вопрос ответили одинаково. Докажите, что в ЕГЭ было не больше 6 вопросов.

4. По окружности расставлены несколько ненулевых вещественных чисел. Для любых двух чисел a и b, стоящих рядом, числа $a + b$ и $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ — целые. Докажите, что среди данных чисел есть не более четырех различных.

. . . .

Олимпиада 2012 года. II тур. 10 класс. Выводная аудитория.

5. Натуральное число имеет ровно миллион натуральных делителей (включая единицу и само число). Они выписаны в порядке убывания. Какое наименьшее возможное количество делителей может иметь 250-е число в этом списке? (*Ф. Петров*)

6. $ABCD$ — параллелограмм, прямая ℓ проходит через B перпендикулярно BC. Две окружности с общей хордой CD касаются прямой ℓ в точках P и Q. Докажите, что отрезки DP и DQ видны из середины AB под равными углами. (*Ф. Петров*)

7. На координатной плоскости в первой четверти проведены 100 непересекающихся единичных отрезков, параллельных координатным осям. Эти отрезки — зеркала (с обеих сторон), они отражают свет по правилу «угол падения равен углу отражения». (При попадании в край зеркала луч света не изменяет своего направления.) Из точки, лежащей в единичном круге с центром в начале координат, выпускают луч света в направлении биссектрисы первого координатного угла. Докажите, что эту начальную точку можно выбрать так, чтобы луч отразился от зеркал не более 150 раз. (*С. Иванов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2012 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II ТУР. 11 КЛАСС.

1. Вещественные числа a, b, c таковы, что среди трех уравнений

$$x^3 - ax^2 + b = 0, \quad x^3 - bx^2 + c = 0, \quad x^3 - cx^2 + a = 0$$

любые два имеют общий корень. Докажите, что $a = b = c$.

2. На полке в алфавитном порядке стоит многотомная энциклопедия “Всё о собаках”, каждый том на своем специально выделенном месте. Возле каждого места прикреплена инструкция, предписывающая одно из четырех действий: переставить этот том на одно или два места влево или вправо. Если одновременно выполнить все инструкции, тома окажутся расставленными на тех же местах в другом порядке. Кинолог Дима каждое утро выполняет все инструкции. Однажды он обнаружил, что том “Болонки” стоит на месте, которое вначале занимал том “Таксы”. Докажите, что через некоторое время том “Мопсы” будет стоять на первоначальном месте тома “Пудели”. (*Д. Максимов, Ф. Петров*)

3. В основании пирамиды $SABCD$ лежит выпуклый четырехугольник $ABCD$, такой что $BC \cdot AD = BD \cdot AC$. Оказалось, что $\angle ADS = \angle BDS$ и $\angle ACS = \angle BCS$. Докажите, что плоскость SAB перпендикулярна плоскости основания.

4. Вещественные числа $x_1, \ldots, x_n$ таковы, что

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1\,.$$

Докажите, что найдутся наборы вещественных чисел $y_1, \ldots, y_n$ и $z_1, \ldots, z_n$, такие что

$$|y_1| + |y_2| + \ldots + |y_n| \leqslant 1, \quad \max\bigl(|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_n|\bigr) \leqslant 1$$

и $x_i = \frac{y_i + z_i}{2}$ при всех i. (*Ф. Петров*)

. . . .

Олимпиада 2012 года. II тур. 11 класс. Выводная аудитория.

5. Даны натуральные числа n и k, причем $n \geqslant k$. Некоторое натуральное число S имеет не менее n натуральных делителей (включая единицу и само число). Все делители числа S выписаны в ряд в порядке убывания. Какое наименьшее количество делителей может иметь k-е число в этом списке? (*Ф. Петров*)

6. На координатной плоскости в первой четверти проведены 100 непересекающихся единичных отрезков, параллельных координатным осям. Эти отрезки — зеркала (с обеих сторон), они отражают свет по правилу «угол падения равен углу отражения». (При попадании в край зеркала луч света не изменяет своего направления.) Из точки, лежащей в единичном круге с центром в начале координат, выпускают луч света в направлении биссектрисы первого координатного угла. Докажите, что эту начальную точку можно выбрать так, чтобы луч отразился от зеркал не более 150 раз. (*С. Иванов*)

7. Некоторые города России соединены с некоторыми городами Украины международными авиалиниями. Межгосударственный совет по содействию миграции собирается ввести на каждой авиалинии одностороннее движение так, чтобы, вылетев из города, в него уже нельзя было вернуться (пользуясь другими односторонними авиалиниями). Докажите, что количество способов сделать это не делится на три.
(*Ф. Петров*)